



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Ёрикке, О множествах пика для
гельдеровских классов (опровержение гипотезы
Е. М. Дынькина), *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987,
том 157, 45–54

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

23 марта 2025 г., 04:50:48



О МНОЖЕСТВАХ ПИКА ДЛЯ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССОВ
(ОПРОВЕРЖЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ Е. М. ДЫНЬКИНА)

Гельдеровский класс A_α , $0 < \alpha \leq 1$, состоит из всех функций f , аналитических в единичном круге \mathbb{D} и непрерывных в его замыкании $\text{clos } \mathbb{D}$, для которых

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \text{const } |z_1 - z_2|^\alpha, \quad z_1, z_2 \in \text{clos } \mathbb{D}.$$

Замкнутое множество $E \subset \mathbb{T}$ (\mathbb{T} - единичная окружность) называется множеством пика для A_α , если существует функция f , $f \in A_\alpha$ такая, что $|f| < 1$ на $\mathbb{T} \setminus E$ и $f|_E \equiv 1$ (f - так называемая функция пика). Проблеме описания множеств пика классов A_α ($0 < \alpha < 1$) посвящен ряд работ (вот некоторые из них: [1], [2], [3], [5], [7]). Эта проблема интересна также в связи с задачей описания сингулярного спектра (одномерной) модели Фридрикса ([3], [2], [4]). Е. М. Дынькин заметил, что любое множество неединственности для класса Жеврея G_α (по поводу определения этого класса и полного описания множеств единственности для него см. [6]) является множеством пика для класса A_α и выдвинул гипотезу, что этими множествами исчерпывается весь класс \mathcal{P}_α множеств пика для A_α ($0 < \alpha < 1$) (см. [1]). В частности, предполагалось, что $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in L^1(\mathbb{T})$ для любого $E \in \mathcal{P}_\alpha$. ($\text{dist}(\cdot, E)$ обозначает функцию расстояния от точки до множества E). С помощью стандартных оценок для преобразования Гильберта (см. [1], [3], [5]) получается лишь неравенство слабого типа для функции $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}$ ($E \in \mathcal{P}_\alpha$):

$$m\{z \in \mathbb{T} : \text{dist}(z, E) \leq \delta\} = O(\delta^\alpha), \quad \delta \rightarrow +0.$$

(m - мера Лебега на \mathbb{T}). Мы докажем, что на самом деле, включение $E \in \mathcal{P}_\alpha$ не влечет суммируемость функции $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}$.

ТЕОРЕМА. При любом $\alpha \in (0, 1)$ существует множество $E \in \mathcal{P}_\alpha$, для которого $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \notin L^1(\mathbb{T})$.

Тем самым множество \mathcal{P}_α существенно шире класса множеств неединственности для G_α . Проблема полного описания множеств из \mathcal{P}_α (при $0 < \alpha < 1$) остается открытой.

Построение множества $E \in \mathcal{P}_\alpha$ с $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \notin L^1(\mathbb{T})$.
Фиксируем произвольное число $\alpha \in (0, 1)$. Легко видеть, что доста-

точно построить замкнутое множество E , $E \subset (-\pi, \pi)$, такое что $\int_{-\pi}^{\pi} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx = \infty$, и неотрицательную функцию $F \in L^1((-\pi, \pi))$, $F \in C^2((-\pi, \pi) \setminus E)$, $\text{supp } F \subset (-\pi, \pi)$, такую что при некотором $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$|F(x) + i\tilde{F}(x)| \geq c \text{dist}(x, E)^{-\alpha} \quad \text{для } 0 < \text{dist}(x, E) < \varepsilon, \quad (1)$$

$$\frac{|F'(x) + i\tilde{F}'(x)|}{|F(x) + i\tilde{F}(x)|^2} \leq C \text{dist}(x, E)^{\alpha-1} \quad \text{для } 0 < \text{dist}(x, E) < \varepsilon. \quad (2)$$

(Из условий автоматически вытекает, что \tilde{F} дифференцируема на множестве $(-\pi, \pi) \setminus E$). Здесь отрезок $[-\pi, \pi)$ отождествляется с окружностью \mathbb{T} с помощью отображения $\varphi \rightarrow e^{i\varphi}$ и \tilde{F} означает сопряженную с F функцию,

$$\tilde{F}(x) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(t) dt}{2itg \frac{t-x}{2}}$$

Убедимся в том, что такое множество E принадлежит \mathcal{P}_α . Действительно, функция $f^*(e^{ix}) = F(x) + i\tilde{F}(x)$ ($x \in [-\pi, \pi)$) является граничным значением аналитической в \mathbb{D} функции f с положительной вещественной частью. Поэтому функция $\frac{1}{1+f}$ аналитична в \mathbb{D} и $\text{Re} \frac{1}{1+f} > 0$ в \mathbb{D} . Ясно, что $\frac{1}{1+f}$ ограничена в \mathbb{D} . Оценки (1) и (2) показывают, что эта функция продолжается в $\text{clos } \mathbb{D}$ до функции g класса A_α , обращающейся в нуль ровно на E . (Действительно, проверить нужно лишь, что

$$\left| \frac{1}{1+f^*(e^{ix_1})} - \frac{1}{1+f^*(e^{ix_2})} \right| \leq \text{const} |e^{ix_1} - e^{ix_2}|^\alpha \quad (x_1, x_2 \in [-\pi, \pi)).$$

Когда x_1 и x_2 принадлежат различным интервалам открытого множества $(-\pi, \pi) \setminus E$, это вытекает сразу из (1). Интегрирование оценки (2) дает нужное неравенство, когда x_1, x_2 принадлежат одному и тому же интервалу. В качестве функции g можно взять функцию $\frac{1-g}{1+g}$.

Построим теперь множество E и функцию F . Множество E будет состоять из возрастающей последовательности точек $\Gamma \subset (-\pi, 0)$ и ее предела 0. Положим $F = F_+ + F_-$, где $F_+ \stackrel{\text{def}}{=} F \chi_{[0, \pi)}$, $F_- \stackrel{\text{def}}{=} F \chi_{[-\pi, 0)}$ (χ_A - характеристическая функция множества A). В качестве F_+ берем функцию, равную нулю на $[-\pi, 0)$, совпадающую с функцией $t \mapsto \frac{1}{t \log \frac{1}{t} (\log \log \frac{1}{t})^{1+\beta}}$ при малых

положительных \dagger (здесь $\beta \in (0,1)$ - произвольное число), а вне некоторой окрестности нуля \mathcal{F}_+ гладко падает к нулю. Заметим, что $\mathcal{F}_+ \in L^1([-\pi, \pi])$. Следующая лемма показывает, что $\tilde{\mathcal{F}}_+ \notin L_1([-\pi, \pi])$.

ЛЕММА I. При $x < 0$, x близким к нулю имеет место оценка

$$|\tilde{\mathcal{F}}_+(x)| \asymp \frac{1}{|x|(\log \log \frac{1}{|x|})^\beta}$$

(Здесь, как обычно, знак \asymp означает, что отношение выражений, стоящих справа и слева, заключено между двумя положительными постоянными.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x < 0$ имеем $\tilde{\mathcal{F}}_+(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\mathcal{F}(t) dt}{2tq \frac{t+|x|}{2}}$ =
 $= -\frac{1}{\pi} \int_0^{|x|} -\frac{1}{\pi} \int_{|x|}^\pi \stackrel{\text{def}}{=} (I_1(x) + I_2(x)), I_1 > 0, I_2 > 0$. При малых $|x|$, $x < 0$, справедливо соотношение

$$I_1(x) \asymp \frac{\text{const}}{|x|} \int_0^{|x|} \frac{dt}{t \log \frac{1}{t} (\log \log \frac{1}{t})^\beta} = \frac{\text{const}}{|x| (\log \log \frac{1}{|x|})^\beta}$$

Нетрудно видеть, что при малых $|x|$, $x < 0$, $I_2(x) \leq \text{const} I_1(x)$. •

Построение множества E и функции \mathcal{F} теперь осуществляет-ся по следующей схеме. Для натурального k обозначим промежуток $[-2^{-k}, -2^{-k-1}]$ символом I_k . Для $k \geq k_0$ (k_0 - фиксированное, достаточно большое число) пусть Γ_k - множество, состоящее из n_k равноотстоящих друг от друга точек, делящих I_k на n_k интервалов равной длины $l_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{-k-1}}{n_k}$, т.е.

$$\Gamma_k = \{-2^{-k} + sl_k\}_{s=0,1,\dots,n_k-1}. \text{ Положим теперь } \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=k_0}^\infty \Gamma_k, E \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \cup \{0\}.$$

Числа n_k выберем столь быстро стремящимися к бесконечности, что

$$\int_{-\pi}^0 \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx = -\infty \quad (\text{или, что то же самое, } \sum l^{1-\alpha} = \infty,$$

где сумма берется по длинам l всех составляющих интервалов открытого множества $(-\pi, 0) \setminus E$). С другой стороны, если n_k растут не слишком быстро, то на "большой части" Ω промежутка $(-\pi, 0)$

(а именно во всех точках, "не слишком близких к E ") выполнено неравенство $|\tilde{\mathcal{F}}_+(x)| \geq c \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$. Интеграл $\int_{-\pi}^0 \tilde{\mathcal{F}}_+$ рас-

ходится, на этом основана надежда, что можно выбирать n_k такими,

что $\int_{-\pi}^0 \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx = \infty$, но Ω столь большое, что

$$\int_{(-\pi, 0) \setminus \Omega} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx < \infty. \text{ Теперь } \mathcal{F}_- \text{ полагается равной}$$

$\sqrt{\text{dist}(x, E)^{-\alpha}}$ в точках $x \in (-\pi, 0) \setminus \Omega$, т.е. в точках,

очень близких к Γ ($\nu > 0$ - подходящая постоянная) и гладко падающей к нулю при удалении от множества Γ , так чтобы неравенство $|\tilde{F}_-(x) + i\tilde{F}_+(x)| \geq \text{const} \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$ было выполнено везде на $(-\pi, 0)$. Тогда $\int \tilde{F}_- < \infty$. Остается следить за тем, чтобы на Ω выполнялось неравенство $|\tilde{F}_-| \leq \frac{1}{2} |\tilde{F}_+|$, и также за выполнением оценки (2).

Выбор n_k и построение \tilde{F}_- . Заметим, что $\tilde{F}_+(x) \asymp \frac{1}{2^{-k}(\log k)^\beta}$ для $x \in I_k (k \geq k_0)$. Положим

$$\rho_k = (2^{-k}(\log k)^\beta)^{1/\alpha}. \quad (3)$$

Если ℓ_k существенно больше ρ_k , то $|\tilde{F}_+(x)| \geq c_1 \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$ на большей части Ω_k промежутка $\tilde{I}_k \stackrel{\text{def}}{=} (-2^{-k}-\ell_k, -2^{-k-1}) \supset I_k$, $\Omega_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \rho_k < \text{dist}(x, \Gamma_k) < \ell_k\}$. Положим теперь

$$n_k = \left[\frac{2^{-k-1}}{(2^{-k}(\log k)^\beta)^{1/\alpha}} \right] \quad (4)$$

($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x .) Тогда

$$\ell_k \asymp (2^{-k}(\log k)^\beta)^{1/\alpha} \quad (5)$$

существенно больше, чем ρ_k .

ЛЕММА 2. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx = \text{const} \sum_{k \geq k_0} n_k \ell_k^{1-\alpha} + \text{const} \times$

$$\asymp \left\{ \sum_{k \geq k_0} \frac{2^{-k}}{(2^{-k}(\log k)^\beta)^{1/\alpha}} \cdot (2^{-k}(\log k)^\beta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 \right\} =$$

$$= 1 + \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k(\log k)^\beta} = \infty.$$

(Напомним, что $\beta \in (0, 1)$). •

Построим теперь \mathcal{F}_- . Пусть $\rho \in \Gamma_k$. Через \mathcal{F}_ρ обозначим неотрицательную функцию, равную $\frac{1}{|x-\rho|^\alpha}$ при $|x-\rho| \leq \rho_k$, равную нулю при $|x-\rho| \geq 2\rho_k$, которая на множестве $\rho_k < |x-\rho| < 2\rho_k$ гладко падает к нулю так, чтобы везде выполнялись неравенства

$$|\mathcal{F}_\rho(x)| \leq \frac{\text{const}}{|x-\rho|^\alpha} \quad (6a)$$

$$|\mathcal{F}'_p(x)| \leq \frac{\text{const}}{|x-p|^{\alpha+1}} \quad (6b)$$

$$|\mathcal{F}''_p(x)| \leq \frac{\text{const}}{|x-p|^{\alpha+2}} \quad (6c)$$

(const здесь не зависит от p и k). Легко видеть, что такие функции \mathcal{F}_p можно строить при любом $p \in \Gamma$. Положим $\mathcal{F}_- \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq k_0} \sum_{p \in \Gamma_k} \nu \mathcal{F}_p$, где $\nu > 0$ - подходящая постоянная, которую мы выберем позже.

ЛЕММА 3. $\int_{-\pi}^0 \mathcal{F}_- < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\int_{-\pi}^0 \mathcal{F}_- = \sum_{k \geq k_0} \sum_{p \in \Gamma_k} \nu \int \mathcal{F}_p =$

$$= \nu \sum_{k \geq k_0} n_k \int \mathcal{F}_{-2^{-k-1}} \asymp \sum_{k \geq k_0} n_k \rho_k^{1-\alpha} \times$$

$$\asymp \sum_{k \geq k_0} \frac{2^{-k}}{(2^{-k}(\log k)^\beta k)^{1/\alpha}} \cdot (2^{-k}(\log k)^\beta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k^{1/\alpha}(\log k)^\beta} < \infty.$$

(Мы использовали то, что $\alpha < 1$). •

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНКИ (I). Ясно, что при $x > 0$ оценка (I) выполнена. При $x \in (-2^{-k_0} - l_{k_0}, 0) \setminus E$ мы докажем более сильную оценку

$$|\mathcal{F}(x) + i\tilde{\mathcal{F}}(x)| \geq C_1 (\text{dist}(x, E))^{-\alpha} |x|^{-1} (\log \log \frac{1}{|x|})^{-\beta}, \quad (7)$$

которая нам потребуется для доказательства неравенства (2). Рассмотрим сначала случай, когда $|x-p| \leq \rho_k$ для некоторого $p \in \Gamma_k$, $k \geq k_0$. Для таких x оценка (7) легко вытекает из следующей цепочки неравенств: $\mathcal{F}'_p(x) = \frac{\nu}{|x-p|^\alpha} = \frac{\nu}{\text{dist}(x, E)^\alpha} \geq \nu \rho_k^{-\alpha} = \frac{\nu}{2^{-k}(\log k)^\beta} \geq \geq \nu \text{const} |x|^{-1} (\log \log \frac{1}{|x|})^{-\beta}$ для $x < 0$, $|x| \asymp 2^{-k}$, $|x-p| \leq \rho_k$.

Пусть, наоборот, $x \in \Omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \geq k_0} \Omega_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(x) &= -\frac{1}{\pi} \nu. p. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathcal{F}(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt = -\frac{\nu}{\pi} \sum_{p: x \in \operatorname{supp} \mathcal{F}_p} \nu. p. \int \frac{\mathcal{F}_p(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{p > x, x \notin \operatorname{supp} \mathcal{F}_p} \frac{\nu \mathcal{F}_p(t) + \mathcal{F}_+(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt - \frac{\nu}{\pi} \int_{p < x, x \notin \operatorname{supp} \mathcal{F}_p} \frac{\mathcal{F}_p(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt = \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}_1(x) + \mathcal{J}_2(x) + \mathcal{J}_3(x).$$

Из построения функции \mathcal{F}_p и оценки (6в) легко получается, что $|\mathcal{J}_1(x)| \leq \frac{\nu \text{const}}{|x-p|^\alpha}$ (где const не зависит от ν, x и p).

Неравенство для $\mathcal{J}_2, |\mathcal{J}_2(x)| \geq \frac{\text{const}}{|x|(\log \log \frac{1}{|x|})^\beta} \geq \text{const} |\tilde{\mathcal{F}}_+(x)|$,

легко вытекает из леммы I, положительности функций $\mathcal{F}_p (p \in \Gamma)$ и \mathcal{F}_+ , а также положительности функции $2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}$ в случае $t > x, t-x$ мало. Оценку выражения \mathcal{J}_3 дает следующая

ЛЕММА 4. Если $x \in \Omega_k = \{x < 0, \rho_k < \operatorname{dist}(x, E) < \ell_k\}$, то

$$0 < \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_3(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\sum_{p < x, x \notin \operatorname{supp} \mathcal{F}_p} \mathcal{F}_p(t)}{-2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt \leq \frac{\text{const}}{\rho_k^\alpha}.$$

Здесь const не зависит от ν и x .

С помощью леммы 4 теперь легко закончить доказательство неравенства (7). Действительно, неравенство $\operatorname{dist}(x, E)^{-\alpha} \leq \rho_k^{-\alpha} \leq \frac{1}{c_r} |\tilde{\mathcal{F}}_+(x)|$, выполненное для $x \in \Omega_k$, и оценки для $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ позволяют выбрать положительную постоянную ν так, чтобы при всех $x \in \Omega$ выполнялось неравенство

$$|\tilde{\mathcal{F}}(x)| \geq \frac{1}{2} |\tilde{\mathcal{F}}_+(x)| \geq \text{const} \frac{1}{|x|(\log \log \frac{1}{|x|})^\beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Оценку достаточно проводить для $k > 2k_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_3(x) &= \sum_{k_0 \leq j \leq k-2} \int \frac{\sum_{p \in \Gamma_j} \mathcal{F}_p(t)}{-2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt + \\ &+ \int \frac{\sum_{p \in \Gamma_k \cup \Gamma_{k-1}, p < x, x \notin \operatorname{supp} \mathcal{F}_p} \mathcal{F}_p(t)}{-2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt = A_1(x) + A_2(x). \end{aligned}$$

Оценим отдельно A_1 и A_2 .

$$\begin{aligned} A_1(x) &\leq \text{const} \sum_{k_0 \leq j \leq k-2} \frac{n_j \rho_j^{1-\alpha}}{2^{-j}} \leq \text{const} \sum_{k_0 \leq j \leq k-2} \frac{2^{-j-1} (2^{-j} (\log j)^\beta)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(2^{-j} (\log j)^\beta)^{\frac{1}{\alpha}} 2^j} = \\ &= \text{const} \sum_{k_0 \leq j \leq k-2} \frac{2^j}{j^{1/\alpha} (\log j)^\beta} = \text{const} \left(\sum_{k_0 \leq j \leq \frac{k}{2}} + \sum_{\frac{k}{2} < j \leq k-2} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \text{const} \left(2^{\frac{k}{2}} \sum_{k_0 \leq j} \frac{1}{j^{1/\alpha} (\log j)^\beta} + 2^{k-2} \sum_{\frac{k}{2} < j \leq k-2} \frac{1}{j^{1/\alpha} (\log j)^\beta} \right) \leq$$

$$\leq \text{const} \frac{2^k}{k^{\frac{1}{\alpha} + 1} (\log k)^\beta} < \text{const} \frac{1}{\rho_k}$$

В последнем неравенстве использована формула (3), в предпоследнем сумма $\sum_{k_0 \leq j}$ (сходящегося ряда) оценена через постоянную,

а выражение $\sum_{\frac{k}{2} < j < k-2} \frac{1}{j^{1/\alpha} (\log j)^\beta}$ оценено через $\text{const} \frac{k}{k^{\frac{1}{\alpha}} (\log k)^\beta}$.

Далее,

$$A_2(x) \leq \text{const} \left\{ \rho_k^{1-\alpha} \left(\sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m l_k} \right) + \rho_{k-1}^{1-\alpha} \left(\sum_{m=1}^{n_{k-1}} \frac{1}{m l_{k-1}} \right) \right\} \leq$$

$$\leq \text{const} \left(\frac{\rho_k^{1-\alpha}}{l_k} \log n_k + \frac{\rho_{k-1}^{1-\alpha}}{l_{k-1}} \log n_{k-1} \right) \leq$$

$$\leq \text{const} \left(\frac{1}{\rho_k^\alpha} \frac{\rho_k}{l_k} \log k + \frac{1}{\rho_{k-1}^\alpha} \frac{\rho_{k-1}}{l_{k-1}} \log k \right) \leq \text{const} \frac{1}{\rho_k^\alpha}$$

(Мы использовали (3), (4), (5)). ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНКИ (2). Для малых $x > 0$ имеем

$$\frac{|\mathcal{F}'(x) + i \tilde{\mathcal{F}}'(x)|}{|\mathcal{F}(x) + i \tilde{\mathcal{F}}(x)|^2} \leq \frac{|\mathcal{F}'(x)|}{|\mathcal{F}(x)|^2} + \frac{|\tilde{\mathcal{F}}'(x)|}{|\tilde{\mathcal{F}}(x)|^2} = \gamma_1(x) + \gamma_2(x).$$

При малых $x > 0$

$$|\mathcal{F}'(x)| \leq \frac{\text{const}}{x^2 \log \frac{1}{x} (\log \log \frac{1}{x})^{1+\beta}} \quad (8)$$

Поэтому

$$\gamma_1(x) = x^2 \left(\log \frac{1}{x} (\log \log \frac{1}{x})^{1+\beta} \right)^2 \cdot |\mathcal{F}'(x)| \leq$$

$$\leq \text{const} \log \frac{1}{x} (\log \log \frac{1}{x})^{1+\beta} = O(x^{\alpha-1}).$$

Нужная оценка для $\gamma_2(x)$ вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 5. При малых $x > 0$ справедлива оценка

$$\tilde{F}'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\tilde{F}'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \mathcal{F}_-(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} \right) dt =$
 $= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\mathcal{F}_-(t)}{4 \sin^2 \frac{t-x}{2}} dt = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$ (Мы воспользовались сумми-

руемостью функции \mathcal{F}_- .)

Для оценки $\tilde{F}'_+(x)$ (x — малое положительное число) мы возьмем функцию $\Phi \in C_0^\infty(\{|t| < \frac{1}{4}\})$, равную единице в интервале $\{|t| < \frac{1}{4}\}$, и положим $\mathcal{F}_+(t) = \mathcal{F}_+(t) \Phi(1 - \frac{t}{|x|}) + \mathcal{F}_+(t) (1 - \Phi(1 - \frac{t}{|x|})) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t)$. Для t близких к x имеем

$$\tilde{F}'_2(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{|s-x| > \frac{x}{4}} \frac{\mathcal{F}_+(s) (1 - \Phi(1 - \frac{s}{x}))}{4 \sin^2 \frac{s-t}{2}} ds = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Для таких же t имеем

$$\tilde{F}'_1(t) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{|s-x| < \frac{x}{2}} \frac{\mathcal{F}_1'(s)}{2 \operatorname{tg} \frac{s-t}{2}} ds.$$

Учитывая оценку (8), а также неравенство

$$|\mathcal{F}_1''(x)| \leq \frac{\text{const}}{x^3 \log \frac{1}{x} (\log \log \frac{1}{x})^{1+\beta}}, \quad (9)$$

справедливое для малых положительных x , мы получаем такие же оценки (только с другими постоянными) для функций $\mathcal{F}_1'(s)$ и $\mathcal{F}_1''(s)$ при условии $|s-x| < \frac{x}{2}$. Поэтому

$$|\tilde{F}'_1(t)| \leq \text{const} \int_{|s'| < \frac{1}{2}x} \frac{s'}{x^3 \log \frac{1}{x} (\log \log \frac{1}{x})^{1+\beta} s'} ds' \leq$$

$$\leq \frac{\text{const}}{x^2 \log \frac{1}{x} (\log \log \frac{1}{x})^{1+\beta}} = O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

при малом $x > 0$ и t близких к x . ●

Оценка (2) доказана для $x > 0$. Пусть теперь $x < 0$. Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 6. При любом $p \in \Gamma$ и любом $x < 0$ имеет место оценка

$|\tilde{\mathcal{F}}_p'(x)| \leq \frac{\text{const}}{|x-p|^{1+\alpha}}$ с постоянной const , не зависящей от x и p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует неравенства (6) и проводится по той же схеме что и вывод оценки $\tilde{\mathcal{F}}_+'(x)$ при малых $x > 0$. Мы его опускаем.

ЛЕММА 7. Для $x < 0$, $x \notin E$, выполнена оценка

$$\tilde{\mathcal{F}}_-'(x) = O(\text{dist}(x, E)^{-1-\alpha}) + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in I_k$, $k \geq k_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_-'(x) &= \sum_{p \in \Gamma: |p-x| \leq c\ell_k} \nu \tilde{\mathcal{F}}_p'(x) - \frac{\nu}{\pi} \sum_{\substack{p \in U \\ j > k_0, |k-j| > 1}} \int_{\Gamma_j} \frac{\mathcal{F}_p(t)}{4 \sin^2 \frac{t-x}{2}} dt - \\ &- \frac{\nu}{\pi} \sum_{\substack{p \in U \\ j \geq k_0, |j-k| \leq 1}} \int_{\Gamma_j, |p-x| > c\ell_k} \frac{\mathcal{F}_p(t)}{4 \sin^2 \frac{t-x}{2}} dt \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \Sigma_1(x) + \Sigma_2(x) + \Sigma_3(x). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}} \rightarrow 2^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \rightarrow 2^{\frac{1}{\alpha}} \quad (k \geq k_0, k \rightarrow \infty), \quad (10)$$

мы в силу предыдущей леммы получаем $|\Sigma_1(x)| \leq \text{const} \text{dist}(x, E)^{-1-\alpha}$. Вторая сумма $\Sigma_2(x)$ оценивается грубо:

$$|\Sigma_2(x)| \leq \text{const} \frac{\int \mathcal{F}(t) dt}{\text{dist}(x, \bigcup_{j \geq k_0, |j-k| > 1} I_j)^2} \leq \frac{\text{const}}{x^2}.$$

Наконец, $|\Sigma_3(x)| \leq \text{const} \frac{\beta_k^{1-\alpha}}{\ell_k^2}$. Действительно,

$$\begin{aligned} |\Sigma_3(x)| &\leq \text{const} \sum_{\substack{p \in U \\ j \geq k_0, |j-k| \leq 1 \\ |p-x| > c\ell_k}} \int_{\Gamma_j} \frac{\mathcal{F}_p}{(p-x)^2} \leq \\ &\leq \text{const} \beta_k^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\ell_k^2 j^2} = \text{const} \frac{\beta_k^{1-\alpha}}{\ell_k^2}. \end{aligned}$$

Мы опять учитывали (10). Остается заметить, что $\beta_k \leq \ell_k$, и поэтому $\frac{\beta_k^{1-\alpha}}{\ell_k^2} \leq \frac{1}{\ell_k^{1+\alpha}} \leq \text{const} \text{dist}(x, E)^{-1-\alpha}$ для $x \in I_k$. Для $x < -2^{-k}$ оценка получается аналогично. Лемма доказана. ●

Неравенство (2) для $x < 0$ теперь вытекает из леммы 7, оце-

нок (6в) и (7) и неравенства

$$|\tilde{F}'_+(x)| \leq \text{const} \frac{\int \mathcal{F}_+}{x^2} \quad (x < 0, |x| \text{ мало}).$$

Теорема доказана. ●

Литература

1. Д и н ь к и н Е.М. Множества пика для класса Липшица. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. - Зап. научн.семина.ЛОМИ, т.81, с.249-251.
2. П а в л о в Б.С., Ф а д д е е в Л.Д. Множества корней операторнозначных функций с положительной мнимой частью. - там же, с.85-88.
3. П а в л о в Б.С. Теоремы единственности для функций с положительной мнимой частью. - Проблемы матем. физики. Изд-во ЛГУ, 1970, № 4, с.118-125.
4. Ф а д д е е в Л.Д. О модели Фридрикса в теории возмущений. - Труды Матем. ин-та АН СССР им.В.А.Стеклова, 1964, т.30, с.33-75.
5. H u t t Н. Some results on peak and interpolation sets of analytic functions with higher regularity. - Uppsala Univ.Dep. Math., Thesis, 1976.
6. H r u š č e v S.V. Sets of uniqueness for the Gevrey classes. - Ark.För Mat., 1977, v.15, N 2, p.256-304.
7. B r u n a J. On the peak sets for holomorphic Lipschitz functions. - Indiana Univ.Math.J., 1983, v.32, N 2, p.257-272.

B.Jöricke. On peak sets for Hölder classes (a counterexample to E.M.Dyn'kin's conjecture).

Summary

We construct a peak set $E \subset \mathbb{T}$ for the analytic Hölder class A_α ($0 < \alpha < 1$) such that $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \notin L^1(\mathbb{T})$.