

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. I. Dimitrienko, S. V. Sborschikov, E. A. Gubareva, E. S. Egoleva, A. A. Maltseva,
Multi-scale modeling of high temperature elastic-strength properties of inorganic
matrix composites, *Mat. Model.*, 2015, Volume 27, Number 11, 3–20

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms
of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

March 16, 2025, 06:41:11



УДК 539.3

**МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ УПРУГО-ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА НЕОРГАНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ**

© 2015 г. *Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, Е.А. Губарева, Е.С. Еголева,
А.А. Мальцева*

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
dimit.bmstu@gmail.com

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-19-00847).

Разработана многомасштабная математическая модель тканевых композиционных материалов на алюмохромофосфатном связующем (АХФС) при высоких температурах, которая позволяет прогнозировать изменения микроструктуры в матрице и волокнах композита при высокотемпературном нагреве с учетом протекающих в них физико-химических превращений. На основе микроструктурной модели получены аналитические соотношения, описывающие изменения модулей упругости и прочности АХФС и стекловолокон при высоких температурах. Для расчета упруго-прочностных характеристик тканевого композита на АХФС применены методы многомасштабной гомогенизации и конечно-элементного моделирования микронапряжений в ячейках периодичности. Создан программный модуль, реализующий разработанные математические модели. Результаты сопоставления данных численного моделирования с экспериментальными данными показали, что разработанная модель позволяет вполне удовлетворительно прогнозировать основные особенности температурного изменения упругих характеристик стеклокомпозитов на основе АХФС.

Ключевые слова: композиционные материалы, алюмохромофосфатные связующие, термомеханика, термоупругость, высокие температуры, многомасштабное моделирование, метод асимптотического осреднения, метод конечного элемента.

**MULTI-SCALE MODELING
OF HIGH TEMPERATURE ELASTIC-STRENGTH PROPERTIES
OF INORGANIC MATRIX COMPOSITES**

Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborschikov, E.A. Gubareva, E.S. Egoleva, A.A. Maltseva

Bauman Moscow State Technical University

Mathematical multi-level model for calculation of thermo-elastic properties of textile composites on alumochromophosphate binder under high temperature is developed. The model takes in to account a physical-chemical conversations processes in alumochromophosphate binder and glass fibers under high temperature. Comparison of calculation results with experimental data is con-

ducted, it's shown, that model developed allows to predict a complicated nonlinear character of elastic properties of composite changing under heating up to 1600 K. The developed model can be applied for prediction of elastic properties of alumochromophosphate matrix composites under complicated regime of heating.

Key words: composite materials, alumochromophosphate matrix, thermomechanics, thermoelasticity, thermostrength, high temperatures, multi-scale modeling, homogenization method, finite element method.

1. Введение

Композиционные материалы на основе неорганических связующих (фосфатных, алюмофосфатных, хромофосфатных, магнийфосфатных, алюмохромофосфатных (АХФС)) представляют собой перспективный класс конструкционных материалов для создания теплонагруженных конструкций [1-6]. Материалы данного класса сохраняют работоспособность до температуры 1800К без оплавления, имеют хорошие диэлектрические характеристики во всем интервале рабочих температур, относительно высокие прочностные показатели при температурах до 1100К, обладают термостойкостью в окислительных средах, повышенной ударной вязкостью.

Наиболее удачную композицию представляют собой композиты на основе кварцевой ткани и матрицы из АХФС с добавлением мелкодисперсных наполнителей в виде порошка электроплавленного корунда Al_2O_3 и керамики Si_2O_3 . При высоких температурах в матрице и волокнах таких композиционных материалов происходят сложные фазовые превращения, приводящие к немонотонному необратимому изменению всех термомеханических свойств материала. Вообще говоря, композиты на основе неорганических матриц при высоких температурах представляют собой многофазную систему, состоящую из нескольких твёрдых фаз, механически и химически взаимодействующих между собой.

Первые математические модели термомеханического поведения композитов на неорганических матрицах были разработаны в [7,8], в [8] была предложена многомасштабная модель внутренней структуры алюмофосфатного композита. Цель настоящей работы – построение математической модели композитов на основе АХФС, позволяющей более детально описать переменную микроструктуру многофазного композита с учетом кинетики процессов, протекающих в композиционных материалах на АХФ связующих при высоких температурах, а также позволяющей прогнозировать зависимость модулей упругости и пределов прочности материала от режима температурного нагрева.

2. Многоуровневая модель композиционного материала на основе АХФС при высоких температурах

Композиционные материалы на основе АХФС согласно общей методологии моделирования композитов [9,10] рассмотрим как многоуровневую структуру, состоящую из четырёх структурных уровней (рис.1).

Первый уровень этой структуры образован ячейками периодичности № 1 (ЯП1), которые состоят из двух элементов: кварцевых волокон и АХФ матрицы. При высоких температурах в волокнах и АХФ происходят фазовые превращения, поэтому матрицу и волокна полагаем состоящими из ЯП2а и ЯП2б соответственно. В кварцевых волокнах

при нагреве происходят фазовые превращения, заключающиеся в росте кристобаллитной фазы и уменьшении исходной аморфной фазы стекловолокна, поэтому ЯП2b состоит из двух фаз – аморфной ("a") и кристаллической ("l").

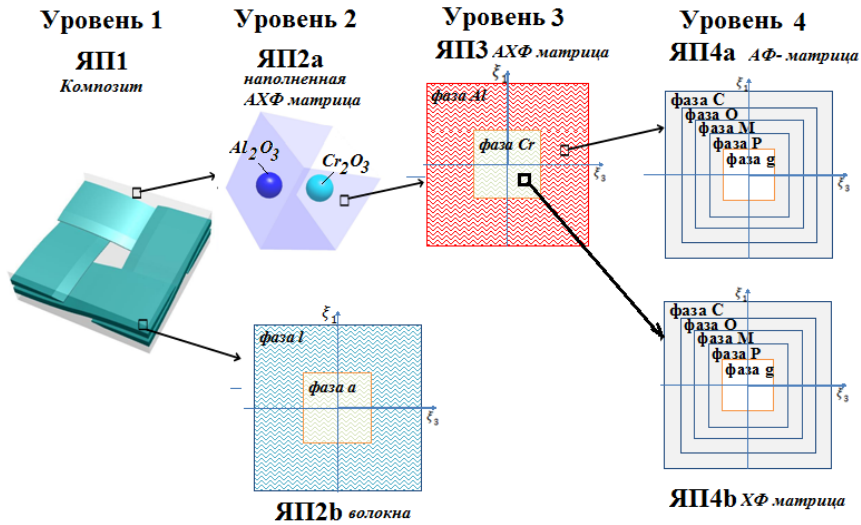


Рис.1. Многоуровневая модель структуры КМ на АХФС.

На 2-м уровне матрица рассматривается как алюмохромофосфатное связующее (АХФС) (полимер) с наполнителем в виде керамических частиц на основе оксидов хрома и алюминия. На 3-м уровне АХФС рассматривается в виде кубической ЯПЗ, содержащей две фазы, каждая из которых соответствует превращению полимера по алюмо- и хромосодержащей цепочке соответственно. Фазы 4-го структурного уровня переходят при разных температурах друг в друга, при этом реализуется следующая схема фазовых превращений [2] (рис.2):

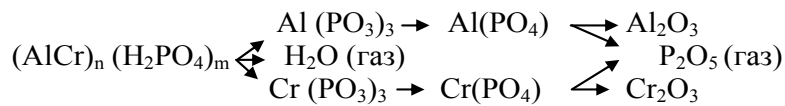


Рис.2. Схема фазовых превращений в АХФС при нагреве до 1500К.

Из приведенных в [2] данных известны температурные диапазоны существования различных фаз, приведенные в табл.1.

Введем следующие обозначения для фаз КМ. На 1-м структурном уровне: φ_f , φ_m – концентрации волокон и матрицы – составляющих ЯП1, связанные соотношением $\varphi_f + \varphi_m = 1$. Эти концентрации не меняются при нагреве: $\varphi_f = \text{const}$, $\varphi_m = \text{const}$. На 2-м структурном уровне: в ЯП2 φ_1 – концентрация керамических включений Al_2O_3 и Cr_2O_3 в матрице ($\varphi_1 = 0.1$). В ЯП2b: φ_a , φ_l – концентрации аморфной и кристаллической фазы волокон, связанные соотношением $\varphi_a + \varphi_l = 1$. В ЯП 3-го уровня обозначим концентрации алюмо- и хромосодержащих фаз (цепочек фазовых превращений): φ_{Al} , φ_{Cr} будем далее полагать, что $\varphi_{Al} = 0.5$, $\varphi_{Cr} = 0.5$. Для ЯП 4-го уровня введем обозначения: φ_2 –

объемная концентрация полимерной Р-фазы $(AlCr_n(H_2PO_4)_m)$, φ_3 – метафосфатной М-фазы $(Al(PO_3)_3, Cr(PO_3)_3)$, φ_4 – ортофосфатной О-фазы $(Al(PO_4), Cr(PO_4))$, φ_5 – керамической С-фазы (Al_2O_3, Cr_2O_3) , φ_6 – концентрация газовой г-фазы $(H_2O+P_2O_5)$. Эти концентрации фаз связаны соотношением

$$\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 = 1. \quad (1)$$

Таблица 1. Температурные области существования различных фазовых составляющих алюмохромфосфатного связующего (АХФС).

Фазы	Температура, К											
	293	570	670	770	870	970	1070	1170	1270	1370	1470	1570
$(AlCr)_n$ $(H_2PO_4)_m$												
$Al(PO_3)_3$												
$Cr(PO_3)_3$												
$Al(PO_4)$												
$Cr(PO_4)$												
Al_2O_3												
Cr_2O_3												
P_2O_5 (газ)												

3. Математическая модель изменения фазового состава АХФ матрицы в ЯП 4-го уровня при нагреве

Математические модели алюмо- и хромосодержащей цепочек превращения АХФС будем рассматривать как отдельные, но аналогичные друг другу. Пренебрегая сжимаемостью твердых фаз, запишем систему уравнений неразрывности для 6-й среды:

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= -J_2, & \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} &= -J_2(1 - \Gamma_2) - J_3, & \rho_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} &= J_3 - J_4, \\ \rho_5 \frac{\partial \varphi_5}{\partial t} &= J_4(1 - \Gamma_5), & \frac{\partial \rho_6 \varphi_6}{\partial t} + \nabla \cdot \varphi_6 \rho_6 \mathbf{V}_6 &= J_4 \Gamma_5, \end{aligned} \quad (2)$$

где обозначены: $J_i = J_i^0 \varphi_i \exp(-E_{Ai} / R\theta(t))$ – массовые скорости фазовых превращений, Γ_i – коэффициенты газификации, ρ_i – плотности фаз, E_{Ai} – энергии активации, J_i^0 – предэкспоненциальные множители, характеризующие скорость фазовых превращений, $\theta(t)$ – переменная температура, R – газовая постоянная, \mathbf{V}_6 – вектор скорости фильтрации газовых фаз в порах. Объемная концентрация газовой фазы находится из условия нормировки (1).

4. Модель для расчета упругих свойств матрицы в ЯП 4-го и 3-го уровней при нагреве

Рассмотрим модельную форму ячейки периодичности V_ξ в виде куба. Оси локальной системы координат $O\xi_i$ ориентированы так, как показано на рис.3. Будем полагать,

что каждая фаза имеет кубическую форму, тогда половину ЯП4а можно параллельными плоскостями разделить на 5 слоев (рис.3). Первый слой толщиной $\gamma_1/2$ содержит одну С-фазу, второй слой толщиной $\gamma_2/2$ – две фазы: С и О и т.д., а пятый слой толщиной $\gamma_5/2$ содержит все 5 фаз. Тогда расчет эффективного модуля упругости матрицы можно осуществить за 2 шага, применяя на каждом шаге принцип сложения слоёв [12] и полагая, что ЯП4 и все фазы находятся в одноосном напряженно-деформированном состоянии по оси $O\xi_3$, при котором отличны от нуля только напряжения $\sigma_{33(ij)} \equiv \sigma_{(ij)}$ и деформации $\varepsilon_{33(ij)} \equiv \varepsilon_{(ij)}$ в каждой j -й фазе i -го слоя.

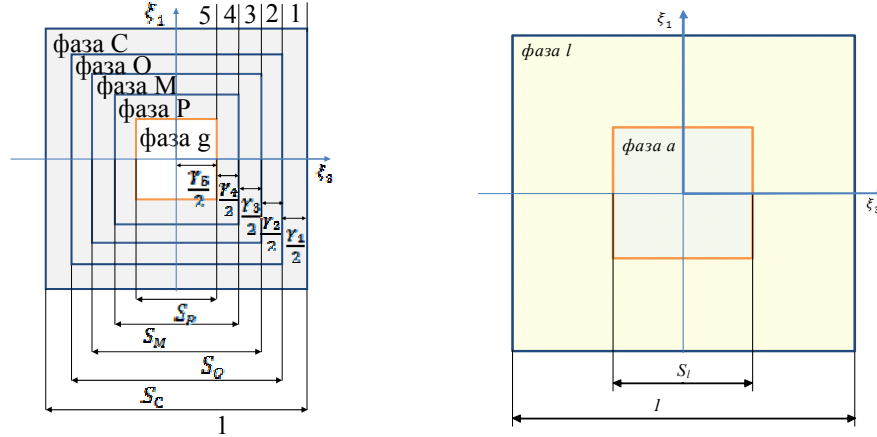


Рис.3. Схема ячеек периодичности ЯП4а матрицы и ЯП2b волокон.

1) На 1-м шаге в каждом из пяти слоев осуществляется сложение фаз, которое идет "по вертикали", напряжения $\sigma_{(ij)}$ в фазах суммируются, а деформации $\varepsilon_{(ij)}$ совпадают, тогда имеют место следующие формулы для вычисления модуля упругости каждого из пяти слоев:

$$\sigma_{(i)} = \sum_{j=1}^5 \beta_{ij} \sigma_{(ij)}, \quad \varepsilon_{(i1)} = \dots = \varepsilon_{(i5)} = \varepsilon_{(i)}, \quad \sigma_{(ij)} = E_{ij} \varepsilon_{(ij)}, \quad \sigma_{(i)} = E_i \varepsilon_{(i)} \quad (3)$$

где E_{ij} – модуль упругости j -й фазы в i -м слое: $E_{i1} = E_C$, $E_{i2} = E_O$, $E_{i3} = E_M$, $E_{i4} = E_P$, $E_{i5} = 0$, $i=1, \dots, 5$, а E_m, E_o, E_p, E_g, E_c – модули упругости фаз матрицы; β_{ij} – относительные площади сечений j -й фазы в i -м слое (рис.3):

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 1, \quad \beta_{i1} = 1 - S_C^2, \quad i = 2, \dots, 5, \\ \beta_{12} &= 0, \quad \beta_{22} = S_C^2, \quad \beta_{i2} = S_C^2 - S_O^2, \quad i = 3, \dots, 5, \\ \beta_{13} &= \beta_{23} = 0, \quad \beta_{33} = S_O^2, \quad \beta_{i3} = S_O^2 - S_M^2, \quad i = 4, 5, \\ \beta_{14} &= \beta_{24} = \beta_{34} = 0, \quad \beta_{44} = S_M^2, \quad \beta_{54} = S_M^2 - S_P^2, \\ \beta_{i5} &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \beta_{55} = S_P^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где S_M, S_O, S_P, S_C – длины сторон фаз в рамках кубической модели, связаны с концентрациями фаз соотношениями

$$\varphi_5 = 1 - S_C^3, \quad \varphi_4 = S_C^3 - S_O^3, \quad \varphi_3 = S_O^3 - S_M^3, \quad \varphi_2 = S_M^3 - S_P^3, \quad \varphi_6 = S_P^3, \quad (5)$$

а E_i – эффективные модули упругости слоев, для которых на основании (3) имеют место следующие формулы:

$$E_i = \sum_{j=1}^5 \beta_{ij} E_{ij}. \quad (6)$$

2) На 2-м шаге осуществляется сложение всех пяти слоев, при этом деформации $\varepsilon_{(i)}$ в фазах суммируются, а напряжения $\sigma_{(i)}$ совпадают, тогда имеют место следующие формулы:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^5 \gamma_j \varepsilon_{(j)}, \quad \sigma_{(1)} = \dots = \sigma_{(5)} = \sigma, \quad \sigma_{(i)} = E_i \varepsilon_{(i)}, \quad \sigma = E_{m_Al} \varepsilon, \quad (7)$$

$$\gamma_1 = (1 - S_C); \quad \gamma_2 = (S_C - S_O); \quad \gamma_3 = (S_O - S_M); \quad \gamma_4 = (S_M - S_P); \quad \gamma_5 = S_P. \quad (8)$$

С помощью формул (7) вычисляем эффективный модуль упругости алюмосодержащей части матрицы в рамках ЯП 4-го уровня

$$E_{m_Al} = \left(\frac{(1 - S_C)}{E_1} + \frac{(S_C - S_O)}{E_2} + \frac{(S_O - S_M)}{E_3} + \frac{(S_M - S_P)}{E_4} + \frac{S_P}{E_5} \right)^{-1} \quad (9)$$

Для модуля упругости С-фазы при высоких температурах примем следующую модель: $E_C = E_C \left(1 - a_\theta \left((\theta - \theta_0) / \theta_0 \right)^n \right)$, где $n = 0.5$, $a_\theta = 0.3$ – константы, характеризующие характер убывания модуля упругости керамической фазы.

Аналогично вычисляем модуль упругости хромосодержащей части матрицы E_{m_Cr} . Тогда на 3-м уровне вычисляем модуль упругости всей матрицы, используя также кубическую модель ЯП (рис.1):

$$E_m = \left(\frac{0.5}{E_{m_Al}} + \frac{1}{E_{m_Al} + E_{m_Cr}} \right)^{-1}. \quad (10)$$

5. Модель изменения фазового состава и упругих свойств волокон в ЯП 2-го уровня при нагреве

Изменение объемной концентрации “аморфной” фазы кварцевых волокон описывается уравнениями

$$\rho_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} = -J_a, \quad J_a = J_a^0 \varphi_a \exp \left(-\frac{E_{Aa}}{R\theta(t)} \right), \quad (11)$$

где ρ_a – плотность аморфной фазы, E_{Aa} – энергия активации аморфной фазы, J_a^0 – предэкспоненциальный множитель.

Изменение модуля упругости кварцевых волокон при нагреве определяется двумя факторами: 1) изменением упругих свойств волокна в аморфном состоянии при относительно низких температурах; 2) физико-химическими процессами кристаллизации при высоких температурах. Первый фактор вызывает обратимое изменение модуля упругости E_f волокон, второй – приводит к необратимым изменениям после охлаждения. Используя модель ячейки периодичности V_ξ с кубической формой фаз (рис.3) и применяя двухшаговый принцип сложения слоев, получаем следующую формулу для вычисления модуля упругости волокон E_f :

$$E_1 = E_l, \quad E_2 = (1 - S_l)E_l + S_l E_a, \quad \phi_l = (1 - S_l^3); \quad \phi_l = S_l^3, \quad (12)$$

$$E_f = \left(\frac{1 - S_l}{E_1} + \frac{S_l}{E_2} \right)^{-1}, \quad (13)$$

где E_l, E_a – модули упругости фаз волокна.

6. Модель для расчета упругих характеристик на 1-м и 2-м уровнях

Для расчета эффективных упругих характеристик ЯП на 1-м и 2-м уровнях, согласно методу [9,10], решается набор локальных задач линейной теории упругости (ЛТУ) L_{pq} теории упругости на 1/8 части ЯП \tilde{V}_ξ

$$\begin{cases} \sigma_{ij(pq)/j} = 0 \text{ в } \tilde{V}_\xi, \\ \sigma_{ij(pq)} = C_{ijkl}(\xi_s, z_1, z_2) \varepsilon_{kl(pq)} \text{ в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s, \\ \varepsilon_{ij(pq)} = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j} + U_{j(pq)/i}) \text{ в } \tilde{V}_\xi, \\ [U_{i(pq)}] = 0, \quad [\sigma_{ij(pq)}] n_j = 0 \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}, \end{cases} \quad (14)$$

где p, q – индексы задач, изменяющиеся от 1 до 3 (всего имеется 9 различных задач L_{pq}), $U_{i(pq)}(\xi_s)$ – компоненты векторов перемещений (искомые неизвестные функции задачи) в задаче L_{pq} , $\sigma_{ij(pq)}, \varepsilon_{kl(pq)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций в ЯП, ξ_s – «локальные» декартовы координаты в ЯП, $_{/i} = \partial / \partial \xi_i$ – производные по локальным координатам, $[U_{i(pq)}]$ – скачки функций на поверхностях раздела $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}$ компонентов композита, где $\alpha = 1, \dots, N - 1$ – номера армирующих компонентов (переплетенных нитей в ткани), $\alpha = N$ – индекс, соответствующий матрице композита, $C_{ijkl}(\xi_s, z_1, z_2)$ – компоненты тензоров модулей упругости структурных компонентов композита (их различие для разных компонент – нитей и матрицы, описывает зависимость от координат ξ_s), z_1, z_2 – параметры повреждаемости компонентов композита, выражения для которых будут представлены далее.

Система (14) дополняется специальными граничными условиями на торцевых поверхностях $\Sigma'_s = \{\xi_s = 0.5\}$ 1/8 ЯП:

$$\begin{aligned} \text{на } \Sigma'_i: \quad & U_{i(pp)} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pp} \delta_{ip}, \quad U_{j(pp)/i} = 0, \quad U_{k(pp)/i} = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \\ \text{на } \Sigma'_j: \quad & U_{i(pq)} = \frac{1}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, \quad U_{j(pq)/j} = 0, \quad U_{k(pq)} = 0, \quad i, j = \{p, q\}, \\ \text{на } \Sigma'_k: \quad & U_{i(pq)/k} = 0, \quad U_{j(pq)/k} = 0, \quad U_{k(pq)} = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad p \neq q. \end{aligned} \quad (15)$$

Граничные условия на плоскостях симметрии $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$ ЯП имеют вид, аналогичный соотношениям (15), в которых следует положить $\bar{\varepsilon}_{pq} = 0$, где $\bar{\varepsilon}_{pq}$ – осредненные деформации по ЯП, являющиеся входными данными для задачи L_{pq} .

Для ЯП2а расчет эффективных модулей упругости осуществляется аналогичным образом, только вместо нитей в ЯП2а наполнителем являются сферические частицы керамики Al_2O_3 и Sr_2O_3 .

7. Расчет компонент тензоров модулей упругости матрицы и армирующих нитей с учетом повреждаемости

Современные армирующие нити не являются монолитными материалами, а состоят из большого числа (обычно несколько тысяч) волокон (моноволокон), которые также соединены между собой матрицей. Для вычисления компонент тензоров модулей упругости нитей $C_{ijkl}^{(\alpha)}(z_1^{(\alpha)}, z_2^{(\alpha)}) = C_{ijkl}(\xi_s, z_1, z_2)$, $\xi_s \in \tilde{V}_{\xi\alpha}$ ($\tilde{V}_{\xi\alpha}$ – область в ЯП, занятая α -й нитью в системе координат $O\xi_i$, связанной с ЯП) воспользуемся моделью смесового типа [12], в которой каждая нить рассматривается как система большого числа параллельно расположенных однонаправленных (1D) элементов цилиндрической формы. Сами нити полагаются имеющими синусоидальную форму с эллиптическим сечением и повернуты в ЯП на некоторый переменный угол ψ_α , соответствующий углу между осью симметрии α -й нити и координатной осью $O\xi_\alpha$ (рис.4).

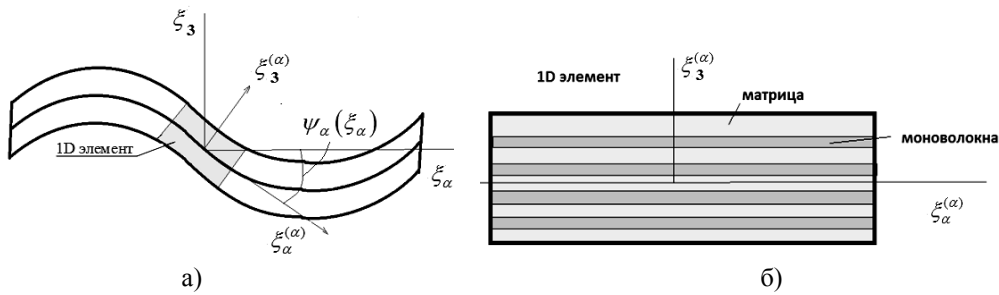


Рис.4. Геометрическая форма нити а) и модель ЯП для 1D элемента в составе нити б).

Вводятся две декартовы системы координат: $O\xi_i$ – исходная система координат, единая для всей ЯП, т.е для всех КЭ, и $O\xi_i^{(\alpha)}$ – собственная система координат, повернутая по отношению к исходной системе координат на угол $\psi_\alpha(\xi_\alpha)$, меняющийся вдоль одной из координат ξ_α . Оси $O\xi_\alpha^{(\alpha)}$ будем полагать совпадающими с осью симметрии α -й нити.

Повернутый сегмент нити назовем 1-D элементом (рис.4б), он представляет собой пучок однонаправленных моноволокон, скрепленных между собой матрицей. 1D – элемент является трансверсально-изотропным материалом, он имеет 5 независимых упругих констант. В собственной декартовой системе координат $O\xi_i^{(\alpha)}$, связанной с α -й нитью, технические модули упругости нити вычислим по смешевым формулам:

$$E_l = E'_f \varphi_f + E_m (1 - \varphi_f), \quad E_t = \left(\frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1 - \varphi_f}{E_m} \right)^{-1},$$

$$\nu_l = \nu_f \varphi_f + \nu_m (1 - \varphi_f), \quad \nu_t = \nu_m, \tag{16}$$

$$G_l = \left(\frac{2\varphi_f(1 + \nu_f)}{E_f} + \frac{2(1 - \varphi_f)(1 + \nu_m)}{E_m} \right)^{-1},$$

где E_l – продольный модуль упругости нити, E_t – поперечный модуль упругости нити, ν_l, ν_t – продольный и поперечный коэффициенты Пуассона нити, G_l – продольный модуль сдвига, $G_t = \frac{E_t}{2(1 + \nu_t)}$ – поперечный модуль сдвига нити. В формулах (16) обозначены: E'_f, E_f – продольный и поперечный модули упругости моноволокон, которые полагаются трансверсально-изотропными, ν_f – коэффициент Пуассона моноволокон, G_f – модуль сдвига моноволокон, E_m и ν_m – модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, φ_f – относительное объемное содержание моноволокон в нитях.

По полученным значениям упругих констант нити (формулы (16)) вычисляются тензоры упругих податливостей $\Pi_{ijkl}^{(\alpha)'}$ нитей в собственных системах координат $O\xi_i^{(\alpha)}$:

$$\Pi_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{(\alpha)' } = \Pi_{\beta\beta\beta\beta}^{(\alpha)' } = \frac{1}{E_l}, \quad \Pi_{3333}^{(\alpha)' } = \frac{1}{E_t}, \quad \Pi_{\alpha\alpha 33}^{(\alpha)' } = \Pi_{\beta\beta 33}^{(\alpha)' } = -\frac{\nu_l}{E_l},$$

$$\Pi_{1122}^{(\alpha)' } = -\frac{\nu_t}{E_t}, \quad \Pi_{\alpha 3\alpha 3}^{(\alpha)' } = \Pi_{\beta 3\beta 3}^{(\alpha)' } = 1/4G_t, \quad \Pi_{1212}^{(\alpha)' } = 1/4G_l. \tag{17}$$

Тензор модулей упругости нитей в собственной системе координат $O\xi_i^{(\alpha)}$ является обратным для тензора упругих податливостей: $C_{ijkl}^{(\alpha)'} = (\Pi_{ijkl}^{(\alpha)'})^{-1}$. Для нахождения компонент тензора модулей упругости нити в единой системе координат $O\xi_i$ используем формулы преобразования компонент тензора 4-го ранга при повороте системы координат на

угол ψ_α

$$C_{ijkl}^{(\alpha)}(z_1^{(\alpha)}, z_2^{(\alpha)}) = C_{mnsr}^{(\alpha)} Q_{im}^{(\alpha)} Q_{jn}^{(\alpha)} Q_{ks}^{(\alpha)} Q_{lr}^{(\alpha)}, \quad (18)$$

где $Q_{im}^{(\alpha)}$ – матрицы поворота нитей на угол ψ_α .

Матрица композита (компонент с номером $\alpha=3$) является изотропной, ее тензор упругих податливостей $\Pi_{ijkl}^{(3)}$ одинаков в собственной и единой системах координат и выражается через технические упругие константы $E_m, \nu_m, G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$ стандартным образом [14]. Если происходит разрушение матрицы в какой-либо точке ЯП, то все компоненты тензора модулей упругости матрицы $C_{ijkl}^{(3)} = (\Pi_{ijkl}^{(3)})^{-1}$ обнуляются.

8. Эффективные упругие характеристики тканевого композита

Для определения компонент тензора эффективных модулей упругости композита \bar{C}_{ijpq} , связывающего осредненные по ЯП напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ и деформации $\bar{\epsilon}_{kl}$ композита обобщенным законом Гука $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}$, воспользуемся решением серии локальных задач L_{pq} (14), (15). После численного решения задач L_{pq} находим поля перемещений $U_{i(pq)}$ и напряжений $\sigma_{ij(pq)}(\xi_s)$ в ЯП при заданных значениях средних деформаций $\bar{\epsilon}_{kl}$. По этим полям находим средние напряжения

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{p,q} \bar{\sigma}_{ij(pq)}, \quad \text{где } \bar{\sigma}_{ij(pq)} = \left\langle \sigma_{ij(pq)} \right\rangle = \int_{\bar{V}_\xi} \sigma_{ij(pq)}(\xi_k) dV_\xi, \quad (19)$$

тогда компоненты тензора эффективных модулей упругости композита вычисляются по формулам

$$\bar{C}_{ijpq} = \bar{\sigma}_{ij(pq)} / \bar{\epsilon}_{pq}, \quad (20)$$

где по p и q суммирования нет. Далее рассчитывался эффективный тензор упругих податливостей $\bar{\Pi}_{ijpq}$, являющийся обратным к \bar{C}_{ijpq} , и были получены 9 технических упругих констант композита: $E_\alpha = 1 / \bar{\Pi}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$ – эффективные модули Юнга; $\nu_{\alpha\beta} = -\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\beta\beta} E_\alpha$ – эффективные коэффициенты Пуассона; $G_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\alpha\beta}$ – эффективные модули сдвига.

9. Численное решение локальных задач

Для нахождения объемных концентраций матрицы в ЯП 4-го уровня (уравнения (2)) и 2-го уровня (уравнения (11)) в данной работе использовался неявный метод Эйлера. Для решения локальных задач L_{pq} (14),(15) применен метод конечных элементов (МКЭ) [9,12]. Данные методы решения задач, включая численное решение больших систем линейных алгебраических уравнений методами сопряженных градиентов, а также препроцессинг и постпроцессинг, 3D визуализацию, были реализованы в виде составных

частей программного комплекса [14,15], разработанного в научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им.Н.Э. Баумана [14,15]. При численной реализации был рассмотрен режим нагрева композита по линейному закону от 293К до 1600К в течение 300 секунд.

Ввиду отсутствия достоверной информации о значении некоторых констант, было сделано допущение о том, что плотности ρ_i твердых фаз композита совпадают. Энергии активации фаз E_{Ai} и предэкспоненциальные множители были подобраны таким образом, чтобы существование каждой из фаз укладывалось в температурный диапазон, соответствующий данным из табл.1. Характеристики фаз матрицы и волокон представлены соответственно в табл.2, характеристики фаз волокон: $\rho_a=2000 \text{ кг/м}^3$, $E_{Aa} / R =7000\text{К}$, $J_a^0=6600 \text{ кг/(м}^3\text{с)}$, $E_a=80 \text{ ГПа}$.

Таблица 2. Характеристики фаз АХФС.

Фазы/(№ фазы)	Характеристики				
	$\rho_i, \text{ кг/м}^3$	$E_{Ai} / R, \text{ К}$	$J_i^0, \text{ кг/(м}^3\text{с)}$	$E_i, \text{ ГПа}$	Γ_i
$\text{AlCr}_n(\text{H}_2\text{PO}_4)_m / (2)$	2000	5600	300000	10	0.05
$\text{Al}(\text{PO}_3)_3 / (3)$	2000	8000	191000	25	-
$\text{Cr}(\text{PO}_3)_3 / (3)$	2000	8200	30000	20	-
$\text{Al}(\text{PO}_4) / (4)$	2000	10000	300000	35	-
$\text{Cr}(\text{PO}_4) / (4)$	2000	10500	30000	30	-
$\text{Al}_2\text{O}_3 / (5)$	2000	-	-	45	0.05
$\text{Cr}_2\text{O}_3 / (5)$	2000	-	-	40	0.05

На рис.5 показаны графики изменения объемных концентраций фаз АХФС по алюмосодержащей и хромосодержащей цепочкам в зависимости от температуры нагрева.

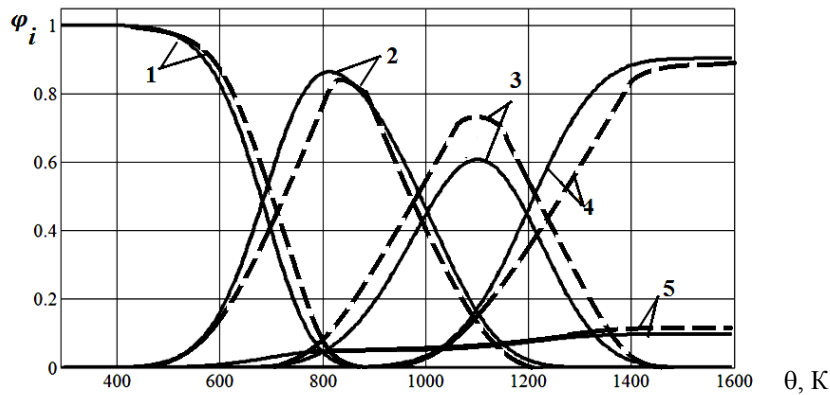


Рис.5. Изменение объемных концентраций фаз φ_i по алюмосодержащей (сплошные линии) и хромосодержащей (пунктирные линии) цепочкам при нагреве АХФС: 1 – полимерные фазы, 2 – метафосфатные фазы, 3 – ортофосфатные фазы, 4 – керамические фазы, 5 – газовые фазы.

На рис.6 показаны графики температурной зависимости модуля упругости АХФС по хромосодержащей и алюмосодержащей цепочкам, а также графики модуля упругости АХФ-матрицы и кварцевых волокон.

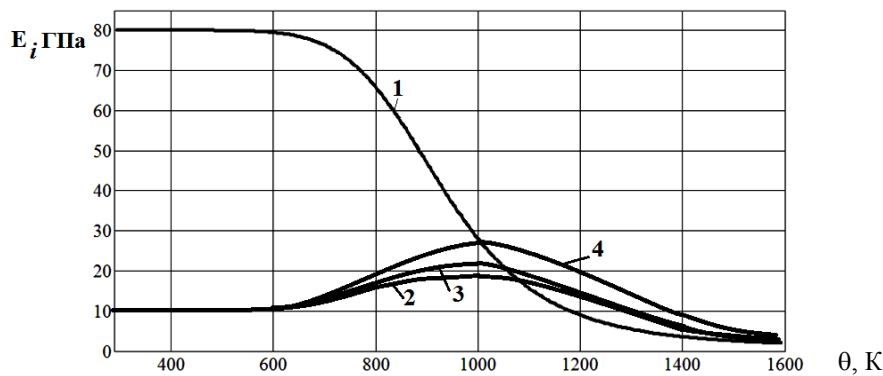


Рис.6. Температурные зависимости модулей упругости: E_f кварцевого волокна (1), матрицы E_m АХФС (3), части матрицы $E_{m_{Cr}}$ по хромосодержащей цепочке (4), части матрицы $E_{m_{Al}}$ по алюминосодержащей цепочке (2).

Характерной особенностью модуля упругости АХФ-матрицы является существенное повышение его значений в температурном диапазоне от 600 до 1100К, что связано с более высокими значениями модулей упругости мета- и ортофосфатной фаз. При температурах свыше 1100К модуль упругости АХФС снижается из-за падения термоупругих свойств керамической фазы.

На рис.7 показаны итоговые расчетные температурные зависимости модулей упругости тканевого композита на основе стеклянных волокон и АХФ наполненной матрицы. Было проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными, полученными при испытаниях, которое показало приемлемую точность разработанной модели: модель позволяет описывать основные особенности температурной зависимости модуля упругости стеклокомпозита на АХФС: возрастание модуля упругости при температурах 600-800К и постепенное его снижение при более высоких значениях температуры, которое обусловлено резким снижением прочности стекловолокон из-за образования кристаллической фазы.

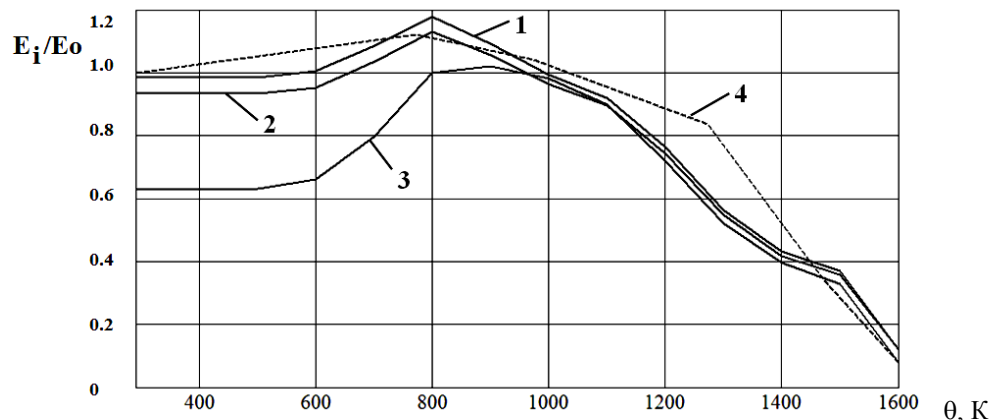


Рис.7. Изменение относительного модуля упругости E_i/E_0 тканевого КМ на АХФС в зависимости от температуры нагрева: 1,2,3 – результаты расчетов, 4 – данные испытаний для E_1 .

10. Модель изменения прочностных свойств матрицы при высоких температурах

Пределы прочности матрицы $\sigma_{m\gamma}$ на растяжение ($\gamma = T$), сжатие ($\gamma = C$) и сдвиг ($\gamma = S$) будем считать совпадающими со средними значениями пределов прочности $\sigma_{i\gamma}$ фаз $i = C, O, M, P$.

$$\sigma_{m\gamma} = \frac{1}{|\Sigma'_C| + |\Sigma'_O| + |\Sigma'_M| + |\Sigma'_P|} (|\Sigma'_C| \sigma_{C\gamma} + |\Sigma'_O| \sigma_{O\gamma} + |\Sigma'_M| \sigma_{M\gamma} + |\Sigma'_P| \sigma_{P\gamma}), \quad \gamma = T, C, S, \quad (21)$$

где $|\Sigma'_C| = (1 - S_C^2)$, $|\Sigma'_O| = (S_C^2 - S_O^2)$, $|\Sigma'_M| = (S_O^2 - S_M^2)$, $|\Sigma'_P| = (S_M^2 - S_P^2)$. Точные значения пределов прочности $\sigma_{i\gamma}$ фаз при разных температурах экспериментально установить чрезвычайно сложно, поэтому принимаются следующие допущения: $\sigma_{C\gamma} = \sigma_{\gamma}^0 n_C$; $\sigma_{O\gamma} = \sigma_{\gamma}^0 n_O$; $\sigma_{M\gamma} = \sigma_{\gamma}^0 n_M$; $\sigma_{P\gamma} = \sigma_{\gamma}^0 a^{(0)}$; $\sigma_{C\gamma} = \sigma_{P\gamma} n_C (1 - \alpha(\theta/\theta_0)^m)$, где $n_C = \sigma_{C\gamma} / \sigma_{P\gamma}$, $n_O = \sigma_{O\gamma} / \sigma_{P\gamma}$, $n_M = \sigma_{M\gamma} / \sigma_{P\gamma}$. Учитывая введенные обозначения, пределы прочности матрицы можно записать в виде

$$\sigma_{m\gamma} = \sigma_{m\gamma}^0 a_1, \quad a_1 = \frac{1}{1 - S_P^2} \left[(S_M^2 - S_P^2) a^{(0)} + (S_O^2 - S_M^2) n_M + (S_C^2 - S_O^2) n_O + (1 - S_C^2) n_C \right], \quad (22)$$

$$\sigma_{m\gamma}^0 = \sigma_{P\gamma} / a_1(\theta_0), \quad \theta_0 = 20^\circ C = 293K.$$

11. Модель изменения прочностных свойств волокон при высоких температурах

Прочностные свойства волокон вычисляются с использованием модели волокон с кубической формой фаз, описанной выше. Прочность волокна при растяжении определяется аналогично упругим свойствам волокна

$$\sigma_f = \sigma_a \left(\frac{1 - S_l}{n_l} + \frac{S_l}{(1 - S_l)n_l + S_l} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Для кварцевых волокон было принято $n_l = \sigma_l / \sigma_a = 0.01$.

12. Критерии прочности матрицы и нити

Критерий прочности изотропной матрицы в составе ЯП композита (вне нитей) выберем в виде модифицированного критерия прочности типа Писаренко-Лебедева [16], который образован совокупностью трёх отдельных критериев разрушения при растяжении, сжатии и совместном нагружении. Этот критерий прочности можно записать в единой форме с помощью функции Хевисайда $h(X)$:

$$z^{(3)}(\sigma_{ij}^{(3)}) = \frac{\sigma_u^{(3)}}{\sigma_{Tm}} h\left(\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{Tm}}\right) + \frac{\sigma_u^{(3)}}{\sigma_{Cm}} h\left(-\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{Cm}}\right) + (B_1 \sigma^{(3)} + B_0 \sigma^{(3)2} + B_2 \sigma_u^{(3)2}) \left(1 - h\left(\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{Tm}}\right)\right) \left(1 - h\left(-\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{Cm}}\right)\right) = 1, \quad (24)$$

где $z^{(3)}(\sigma_{ij}^{(3)})$ – параметр повреждаемости матрицы, $B_1 = \frac{\sigma_{mC} - \sigma_{mT}}{\sigma_{mC}\sigma_{mT}}$, $B_0 = \frac{1}{\sigma_{mC}\sigma_{mT}} - \frac{1}{3\sigma_{mS}^2}$, $B_2 = \frac{1}{3\sigma_{mS}^2}$, $\sigma_{ij}^{(3)}$ – напряжения в матрице, 1-й и 2-й инвариант тензора напряжений в матрице: $\sigma^{(3)} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, $\xi_i \in \tilde{V}_{\xi_3}$, здесь \tilde{V}_{ξ_3} – область ЯП1, занятая матрицей, $\sigma_u^{(3)}$ – интенсивность тензора напряжений [13].

Критерий полного разрушения и критерий частичного разрушения α -й нити формулируются в собственной системе координат нитей, они имеют следующий вид [13]:

$$z_1^{(\alpha)}(\sigma_{ij}^{(\alpha)'}) = 1 \text{ или } z_2^{(\alpha)}(\sigma_{ij}^{(\alpha)'}) = 1. \quad (25)$$

Параметр $z_1^{(\alpha)}$ описывает накопление повреждений в нити вследствие разрыва отдельных моноволокон, а параметр $z_2^{(\alpha)}$ – накопление повреждений из-за растрескивания матрицы в составе нити без разрушения моноволокон, их выражения имеют вид

$$z_1^{(\alpha)} = \frac{|\sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}| + \sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}}{2\sigma_{Tl}} + \frac{|\sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}| - \sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}}{2\sigma_{Cl}}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$z_2^{(\alpha)} = \frac{1}{12\sigma_{St}^2} (Y_2^2 + 12k_Y Y_4^2 + 3Y_3^2) + \left(\frac{1}{\sigma_{Cl}^2} - \frac{1}{3\sigma_{St}^2} \right) Y_-^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{Tl}^2} - \frac{1}{3\sigma_{St}^2} \right) Y_+^2, \quad (26)$$

где обозначены инварианты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(\alpha)'}$ относительно группы трансверсальной изотропии [13]: $Y_2 = \sigma_{33}^{(\alpha)'} + \sigma_{\beta\beta}^{(\alpha)'}$, $Y_3^2 = (\sigma_{33}^{(\alpha)'} - \sigma_{\beta\beta}^{(\alpha)'})^2 + 4\sigma_{3\beta}^{(\alpha)2'}$, $Y_4^2 = \sigma_{3\alpha}^{(\alpha)2'}$ + $\sigma_{12}^{(\alpha)2'}$, а также $k_Y = (B_{m3} / B_{m1})^2$. В формулах (26) обозначены также: $\sigma_{Tl} = \sigma_{mT} / B_{m1}$ – прочность нити при поперечном растяжении; $\sigma_{Cl} = \sigma_{mC} / B_{m1}$ – прочность нити при поперечном сжатии; $\sigma_{St} = \sigma_{mS} / B_{m1}$ – прочность нити при поперечном сдвиге; $\sigma_{Sl} = \sigma_{Sm} / B_{m3}$ – прочность нити при продольном сдвиге (рис.8); $\sigma_{Cl} = \sigma_{Sm} (E_f(2 - \phi_f) / 2G_m \phi_f)$ – прочность нити при продольном сжатии; а также

$$\sigma_{Tl} = \overline{\sigma}_f H_0 \phi_f^{1+s_f-\omega_f} (1-\phi_f)^{s_f+\omega_f} \left(\frac{E_f}{2G_m} \right)^{s_f} \left(\frac{\sigma_{Sm}}{\overline{\sigma}_f} \right)^{\omega_f} \quad (27)$$

– прочность нити при продольном растяжении. Здесь обозначены: $\overline{\sigma}_f$ – средняя прочность моноволокон в нити, H_0 , r_f , s_f , ω_f – статистические характеристики моноволокон в нити, характеризующие вероятностные свойства: масштабный эффект прочности и разброс прочностных характеристик моноволокон в нити [11]. Эти параметры определяются экспериментально по распределениям Вейбулла, методика их определения и значения для различных типов волокон приведены в [11]. Константы прочности фаз выбраны следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_{P_t} &= 50 \text{ МПа}, & \sigma_{P_c} &= 80 \text{ МПа}, & \sigma_{P_s} &= 30 \text{ МПа}, \\ \sigma_{M_t} &= 80 \text{ МПа}, & \sigma_{M_c} &= 128 \text{ МПа}, & \sigma_{M_s} &= 48 \text{ МПа}, \\ \sigma_{O_t} &= 150 \text{ МПа}, & \sigma_{O_c} &= 240 \text{ МПа}, & \sigma_{O_s} &= 90 \text{ МПа}, \\ \sigma_{C_t} &= 250 \text{ МПа}, & \sigma_{C_c} &= 400 \text{ МПа}, & \sigma_{C_s} &= 150 \text{ МПа}, & \sigma_l &= 21.0 \text{ МПа}; & \sigma_a &= 2100 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

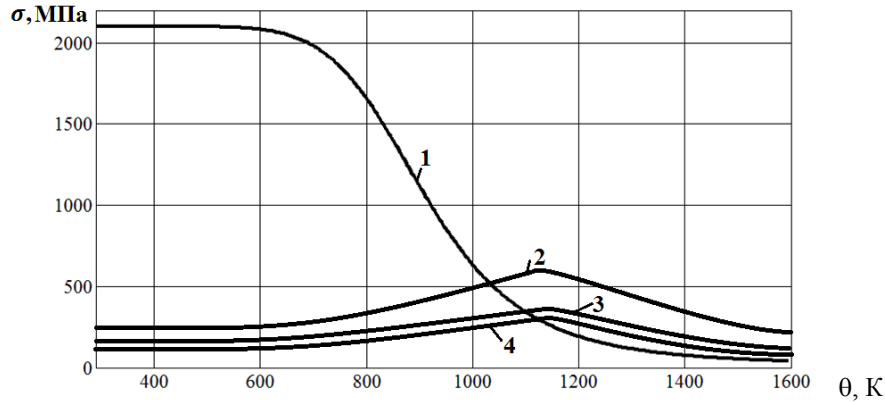


Рис.8. Пределы прочности кварцевого волокна (1), АХФ-матрицы при сжатии σ_{mC} (2), растяжении σ_{mT} (3) и сдвиге σ_{mS} (3) в зависимости от температуры.

Для расчета прочности тканевого композита в целом необходимо вычислить предельные значения средних напряжений $\bar{\sigma}_{kl}$, при которых происходит вначале первое микроразрушение в каком-либо одном из компонентов (матрице или в нитях) в какой-либо одной точке $\xi_k^* \in \tilde{V}_{\xi\alpha}$ в момент времени t^* , когда выполняются условия (24) или (25), а затем полное разрушение, при котором произойдет нарушение целостности всей ЯП1 (выполняется второе условие в (25)). Напряжения в матрице и нитях в этих критериях вычисляются с помощью тензоров концентрации напряжений $B_{ijpq}^{(\alpha)}$

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = B_{ijkl}^{(\alpha)} \bar{\sigma}_{kl}, \quad B_{ijpq}^{(\alpha)} = \sigma_{ij(kl)} \bar{\Pi}_{klpq}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Для вычисления предельных значений напряжений $\bar{\sigma}_{kl}(t^*)$ и $\bar{\sigma}_{kl}(t^{**})$ реализуем процесс, при котором средние напряжения изменяются во времени пропорционально (такой процесс обычно реализуется в экспериментах): $\bar{\sigma}_{kl}(t) = \tilde{\sigma}_{kl} t$, где $\tilde{\sigma}_{kl}$ – компоненты тензора скоростей изменения напряжений.

На рис.9 показаны распределения компоненты тензора концентрации B_{1111} в ЯП1 тканевого композита при различных температурах. При относительно низких температурах максимальные значения B_{1111} достигаются в нитях в зоне их максимального искривления, в этом же месте начинается и разрушения композита. При высокой температуре $\theta=1400\text{К}$ максимальное значение B_{1111} достигается в матрице в зоне пересечения двух систем нитей.

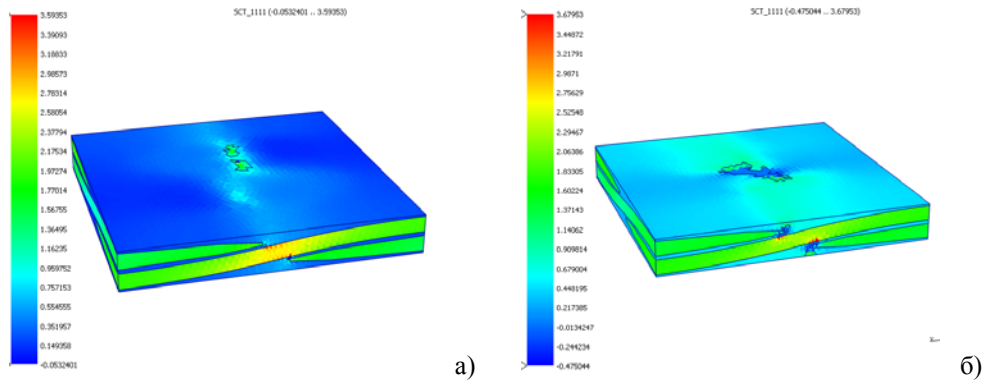


Рис.9а,б. Распределение компоненты тензора концентрации микронапряжений $B_{1111}^{(\alpha)}$ в ЯП1 а) при $\theta=293\text{K}$, б) при $\theta=800\text{K}$.

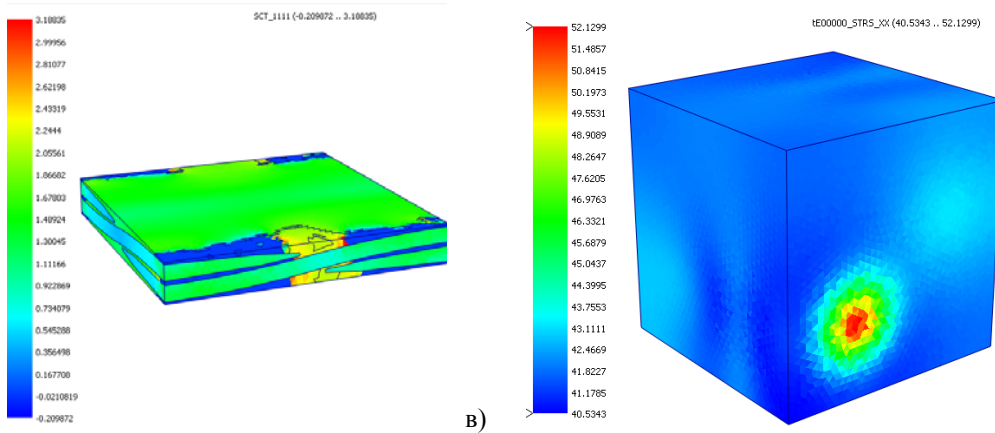


Рис.9в. Распределение компоненты $B_{1111}^{(\alpha)}$ в ЯП1 при $\theta=1400\text{K}$.

Рис.10. Распределение параметра ЯП2а при $\theta=1000\text{K}$.

На рис.11 показаны зоны возникновения микроразрушения в ЯП1 тканевого композита при тех же трёх значения температуры. Видно, что фазовые превращения в матрице и волокнах влекут за собой смену характера разрушения композита: при 293K разрушение начинается на краях нитей, при 800K разрушение начинается в матрице между нитями, а при 1400K – также в матрице, но в зоне максимальной плотности нитей. На рис.10 показано распределение параметра повреждаемости в матрице в ЯП2а, максимальное значение этого параметра достигает в зоне максимального сближения керамических частей в матрице.

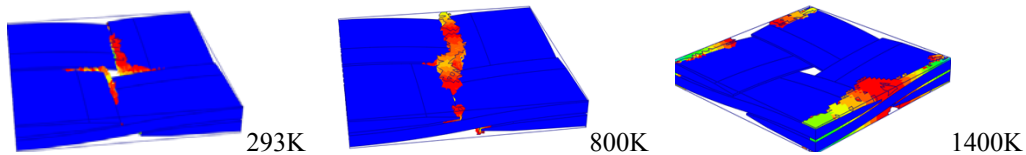


Рис.11. Зоны микроразрушения в ЯП1 композита на АХФС при продольном растяжении при различных температурах.

На рис.12 показаны графики температурного изменения прочности тканевого композита на основе АХФС при растяжении, полученные с помощью численного моделирования по разработанной модели и экспериментально. Относительная ошибка моделирования не превышает 15%, что является вполне удовлетворительным результатом для высокотемпературных характеристик.

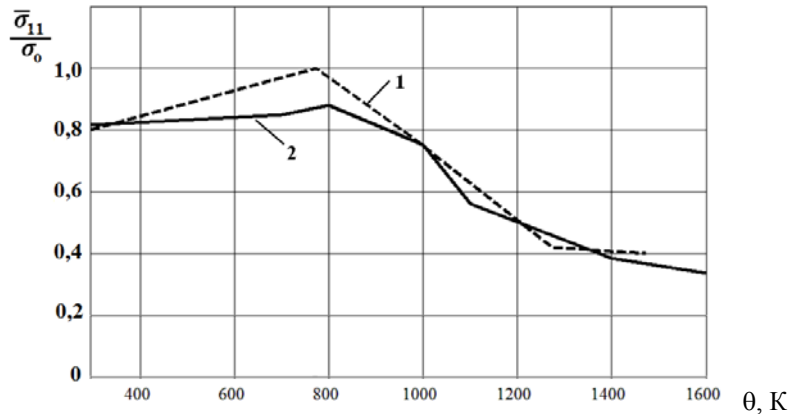


Рис.12. Прочность тканевого композита на основе АХФС при растяжении, 1 – эксперимент, 2 – численный расчёт.

13. Выводы

Разработана многомасштабная четырёхуровневая математическая модель тканевых композиционных материалов на основе АХФС при высоких температурах, которая позволяет прогнозировать изменения упруго-прочностных характеристик композитов и микроструктуры в матрице и волокнах композита при высокотемпературном нагреве с учетом протекающих в них физико-химических превращений. Для расчета микронапряжений и разрушений в ячейках периодичности композита на АХФС использованы методы многомасштабной гомогенизации и конечно-элементного анализа. Разработан программный модуль в составе программного комплекса GCDb, реализующий разработанные математические модели. Результаты сопоставления данных численного моделирования с экспериментальными данными показали, что разработанная модель позволяет вполне удовлетворительно прогнозировать основные особенности высокотемпературного изменения характеристик композитов на основе АХФС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф.Ю. Абзгильдин, С.Г. Тресвятский. Асбо-фосфатные материалы. – Киев: Наукова думка, 1980, 99 с.
F.Iu. Abzgildin, S.G. Tresviatskii. Asbo-fosfatnye materialy. – Kiev: Naukova dumka, 1980, 99 s.
2. Технология и свойства фосфатных материалов. Ред. В.А.Копейкин. -М.: Стройиздат, 1974, 224 с.
Tekhnologija i svoistva fosfatnykh materialov. Red. V.A.Kopeikin. -M.: Stroiizdat, 1974, 224 s.
3. М.М. Сычев. Неорганические клеи. - Л.: Химия, 1974.
M.M. Sychev. Neorganicheskie klei. - L.: Khimiia, 1974.
4. В.Б. Толстогузов. Неорганические полимеры. - М.: Наука, 1967.
V.B. Tolstoguzov. Neorganicheskie polimery. - M.: Nauka, 1967.
5. В.А. Копейкин, А.П. Петрова, И.П. Рашкован. В кн. Материалы на основе металлофосфа-

- тов. - М.: Химия, 1976.
V.A. Koreikin, A.P. Petrova, I.P. Rashkovan. V kn. Materialy na osnove metallofosfatov. - М.: Khimiia, 1976.
6. *И.С. Епифановский, Ю.И. Димитриенко, А.В. Ширяев.* Композиция для керамического электроизоляционного материала. Патент №2028993 Кл. C04B35/48, C04B35/80, номер заявки 5020360/33, дата подачи 27.11.1991, дата публикации 20.02.1995.
I.S. Epifanovskii, Iu.I. Dimitrienko, A.V. Shiriaev. Kompozitsiia dlia keramicheskogo elektrozoliatcionnogo materiala. Patent №2028993 Kl. C04B35/48, C04B35/80, nomer zaiavki 5020360/33, data podachi 27.11.1991, data publikatsii 20.02.1995.
 7. *Yu.I. Dimitrienko, I.S. Epifanovskiy.* Investigation of High Temperature Deformations of Composites on an Inorganic Matrix. Moscow Intern. Composites Conf., 1990 (MICC 90). Eds: I.N. Fridlyander, V.I.Kostikov. - Springer. 1990, p.1206-1210 (DOI: 10.1007/978-94-011-3676-1_232).
 8. *Yu.I. Dimitrienko.* Inorganic Matrix Composite Materials: Peculiarities, modelling, testing // ECC8. European Conf. on Composite Materials. Science. Technology and Applications. 3-6 June, Napoly, Italy. - WoodHead Publishing Limited, 1998, v.4, p.201-208.
 9. *Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов.* Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование, 2012, т.24, № 5, с.3-20.
Iu.I. Dimitrienko, A.P. Sokolov. Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugikh kompozitsionnykh materialov // Matematicheskoe modelirovanie, 2012, t.24, № 5, s.3-20.
 10. *Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов.* Современный численный анализ механических свойств композиционных материалов // Известия РАН. Физич. серия, 2011, т.75, №11, с.1551-1556.
Yu.I. Dimitrienko, A.P. Sokolov. Numerical modeling of composites with multiscale microstructure // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics, 2011, v.75, №11, p.1457-1461.
 11. *Ю.И. Димитриенко.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997.
Iu.I. Dimitrienko. Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh. – М.: Mashinostroenie, 1997.
 12. *Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов.* Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.
Iu.I. Dimitrienko, A.P. Sokolov. Metod konechnykh elementov dlia resheniia lokalnykh zadach mekhaniki kompozitsionnykh materialov. – М.: MGTU im. N.E. Baumana, 2010.
 13. *Ю.И. Димитриенко.* Основы механики твердых сред / Механика сплошной среды. т.4. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 620 с.
Iu.I. Dimitrienko. Osnovy mekhaniki tverdykh sred / Mekhanika sploshnoi sredy. t.4. – М.: MGTU im. N.E. Baumana, 2013, 620 s.
 14. *Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов.* Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки, 2008, №2, с.57-67.
Iu.I. Dimitrienko, A.P. Sokolov. Razrabotka sistemy avtomatizirovannogo vychisleniia effektivnykh uprugikh kharakteristik kompozitov // Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. Estestvennyye nauki, 2008, №2, s.57-67.
 15. *Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов.* Автоматизация прогнозирования свойств композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Информационные технологии, 2008, №8, с.31-38.
Iu.I. Dimitrienko, A.P. Sokolov. Avtomatizatsiia prognozirovaniia svoistv kompozitsionnykh materialov na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniia // Informatsionnye tekhnologii, 2008, №8, s.31-38.
 16. *Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, А.П. Соколов, Ю.В. Шпакова.* Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов // Вычислительная механика сплошной среды, 2013, т.6, №4, с.389-402. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.43
Iu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, A.P. Sokolov, Iu.V. Shpakova. Chislennoe modelirovanie protsessov razrusheniia tkanevykh kompozitov // Vychislitelnaia mekhanika sploshnoi sredy, 2013, t.6, №4, s.389-402. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.43

Поступила в редакцию 28.11.13