ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 58, № 1
январь, 1984

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПО ЗОММЕРФЕЛЬДУ — ВАТСОНУ

Кубышин Ю. А.

Сформулированы условия, при которых ряд теории возмущений суммируем по Зоммерфельду – Ватсону. Разработана процедура приближенного восстановления суммы ряда. Приведены результаты для некоторых физических задач.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории поля в рамках метода теории возмущений (ТВ) функциям типа функций Грина, аномальных размерностей, β-функции (или функции Гелл-Мана — Лоу) и т. п. соответствуют формальные ряды по константе связи g:

$$\beta(g)\sim\sum_{n=k_0}^{\infty}a_n(-g)^n. \tag{1}$$

Для широкого класса моделей было показано, что коэффициенты a_n растут факториально с ростом n и ряд (1) является расходящимся (см. [1, 2], а также обзор результатов в [3]). Имеется широкий произвол в определении функции $\beta(g)$ по ее разложению (1). Например, к $\beta(g)$ может быть добавлена произвольная функция типа $f(g)\exp(-a/g)$ (f регулярна в окрестности $g=0$), коэффициенты разложения которой в ряд по g в точке $g=0$ равны нулю. Поэтому для однозначного решения задачи о восстановлении функции $\beta(g)$ по ряду (1) требуется дополнительная информация о свойствах функции или ряда.

Часто разложение такого типа суммируются по Борелю, т. е. сумма ряда определяется интегралом Лапласа:

$$\beta(g)=\int_0^{\infty}dx\,e^{-x}B(xg),\quad B(x)=\sum_{n=k_0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}(-x)^n. \tag{2}$$

Согласно теореме Ватсона [4] функция $\beta(g)$ может быть представлена в виде (2), если она удовлетворяет так называемому сильному асимптотическому условию [5]: а) функция $\beta(g)$ аналитична в области

$$G=\{g\,|\,0<|g|<R,\ |\arg g|<\pi/2+\delta,\ \delta>0\};$$

б) существуют такие C и σ, что при всех N и всех g в области G

$$\left| \beta(g) - \sum_{n=k_0}^{N} a_n(-g)^n \right| \leqslant C\sigma^{N+1}(N+1)!|g|^{N+1}.$$

В настоящее время лишь в некоторых модельных теориях удалось доказать, что функции Грина удовлетворяют сильному асимптотическому условию. Кроме того, эффективные методы решения задачи о приближенном восстановлении функции $\beta(g)$ по нескольким первым коэффициентам ТВ и асимптотике a_n при $n\to\infty$ на основе формулы (2) (например, метод конформ-Борель [6]) существенно используют информацию об асимптотике $\beta(g)$ при $g\to\infty$.

Здесь мы изучим другой способ суммирования рядов ТВ. В разделе 2 сформулированы условия, при которых разложение (1) суммируемо по Зоммерфельду — Ватсону, а также указана связь такого метода суммирования с суммированием по Борелю. В разделе 3 описан способ решения задачи о приближенном восстановлении суммы ряда. Для проверки эффективности этой процедуры она была применена для вычисления критических индексов фазовых переходов исходя из ε-разложений и для восстановления β-функции в скалярной безмассовой модели $\varphi^4_{(4)}$ (раздел 4).

2. СУММИРОВАНИЕ ПО ЗОММЕРФЕЛЬДУ — ВАТСОНУ

Пусть имеется ряд (1), вообще говоря расходящийся, и выполняются следующие условия.

А. Существует функция $a(z)$ (назовем ее коэффициентной функцией) такая, что $a(n)=a_n$ при $n=k_0$, k_0+1, $k_0+2, \ldots$.

Б. $a(z)$ аналитична при $\mathrm{Re}\, z>\sigma$, где σ — некоторое число и $\sigma<k_0$.

В. $a(z)=\Gamma(z+\nu)\mu(z)$ с некоторым параметром $\nu>0$, причем функция $\mu(z)$ такая, что при $|z|\to\infty$ в области аналитичности

$$\mu(z)=Cz^\alpha\frac{1}{A^z}\left(1+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\ldots\right) \quad (A>0). \tag{3}$$

Доказательство того, что условия «А» — «В» выполняются, для реалистичных моделей квантовой теории поля представляет собой сложную и пока не решенную проблему. Поэтому в этой статье мы будем считать «А» — «В» предположениями, которые, как мы увидим ниже, приводят к разумным результатам, хорошо согласующимся с другими подходами. Здесь мы приведем лишь некоторые соображения в пользу справедливости сделанных предположений. Обычно коэффициенты ряда ТВ (1) для модели с действием $S[\varphi]=S_0[\varphi]+gS_{\mathrm{int}}[\varphi]$ (S_0 — свободная часть действия, S_{int} определяет взаимодействие) определяются функциональными интегралами типа

$$a_n=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{1}{J_0}\int\prod_x D\varphi(x)\prod_i\varphi(y_i)e^{-S_0[\varphi]}(S_{\mathrm{int}}[\varphi])^n. \tag{4}$$

Исходя из интуитивного понимания функционального интеграла (4), основанного на аналогии с интегралом конечной кратности, мы можем считать, что сходимость в (4) не нарушится, если n комплексное и $\mathrm{Re}\, n>\sigma>$

>0. Вычисление a_n методом перевала дает при больших n [1—3]

$$a_n = C\Gamma(n+\nu)\, n^\alpha \frac{1}{A^n}\left(1+\frac{A_1}{n}+\frac{A_2}{n^2}+\ldots\right).$$

Однако при выводе этой формулы нигде не используется факт, что n — натуральное число. Его можно считать комплексным с $|\arg n|<\pi/2$, что также подтверждается анализом обычных интегралов. Условия «А»—«В» выполняются в теории с сильной нелинейностью $\varphi_{(d)}^m$ $(d=2m/(m-2))$, $m\to\infty$ [7] и для ряда моделей (см., например, [8]).

Теперь мы сформулируем важное утверждение (для простоты мы ограничимся случаем $k_0=1$, $\nu=1$; обобщение тривиально). *Пусть имеется формальный ряд*

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (-x)^n$$

такой, что для него существует коэффициентная функция $\alpha(z)$, *обладающая следующими свойствами*:

1) $\alpha(n)=\alpha_n$, $\quad n=1, 2, \ldots$;

2) $\alpha(z)$ *аналитична при* $\operatorname{Re} z>\sigma$, $0<\sigma<1$;

3) $\alpha(z)/\Gamma(z+1)=\mu(z)$ *есть функция конечной степени при* $\operatorname{Re} z>\sigma$;

$$(4) \qquad \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\left|\mu\left(\sigma+re^{\pm i\frac{\pi}{2}}\right)\right|}{r} = \pi-\delta, \quad \delta>0.$$

Тогда существует функция $f(x)$ *такая, что*

а) $f(x)$ *аналитична в области* $D=\{x\,|\,|x|>0\ |\arg x|\leqslant\frac{\pi}{2}+\delta_1,\ 0<\delta_1<\delta\}$;

б) *ряд* (5) *является асимптотическим для* $f(x)$ *при* $|x|\to0$ *равномерно в* D;

в) *такая функция* $f(x)$ *единственна*;

г) *справедливо равенство*

$$(6) \qquad f(x) = -\frac{1}{2i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} dz \frac{\alpha(z)\, x^z}{\sin \pi z}, \quad \sigma<\sigma_1<1.$$

Прежде всего заметим, что по теореме Карлсона [9] из условий 2—4 следует, что функция $\mu(z)$ (а следовательно, и $\alpha(z)=\Gamma(z+1)\mu(z)$) единственным образом определяется своими значениями в целых точках $\mu(n)=\alpha_n/\Gamma(n+1)$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

Введем функцию $\tilde\mu(z)=\mu(\sigma+z)$ и воспользуемся понятием индикатора функции $h(\theta)$, который для функции конечной степени $\tilde\mu(z)$ определяется соотношением [9]

$$h(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|\tilde\mu(re^{i\theta})|}{r}, \quad |\theta|<\pi/2.$$

Из этого определения следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ и для всех достаточно больших значений r справедливо неравенство

$$(7) \qquad |\tilde\mu(re^{i\theta})| < \exp\left((h(\theta)+\varepsilon)r\right).$$

Из условия 4 имеем $h(\pi/2)=h(-\pi/2)=\pi-\delta\equiv\varkappa_1$. Если обозначить $\varkappa_0=h(0)$, то из свойства тригонометрической выпуклости индикатора следует, что

(8) $$h(\theta)\leqslant\varkappa_1|\sin\theta|+\varkappa_0\cos\theta$$

при $|\theta|<\pi/2$. Пользуясь неравенствами (7) и (8), нетрудно показать, что интеграл (6) сходится и определяет аналитическую функцию по x в области D, определенной в п. «а». Смещая контур интегрирования в (6) вправо и пользуясь теоремой о вычетах, получим

(9) $$f(x)=\sum_{n=1}^{N}\alpha(n)(-x)^n+R_N(x),$$

(10) $$R_N(x)=(-1)^{N+1}\frac{x^{N+\gamma}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,x^{iy}\frac{\alpha(N+\gamma+iy)}{\sin\pi(\gamma+iy)}\qquad(0<\gamma<1).$$

Можно показать, что интеграл в (10) сходится для любых N и существуют числа C и σ такие, что

(11) $$|R_N(x)|<C|x|^{N+\gamma}(N+1)!N\sigma^{N+1}$$

для всех $N>N^*$ (N^* — фиксированное число) и всех $x\in D$ (см. приложение). Тогда

$$\lim_{\substack{|x|\to 0\\ x\in D}}\left(f(x)-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(-x)^n\right)\Big/x^N=0,$$

т. е. ряд (5) является асимптотическим для $f(x)$ при $|x|\to 0$ равномерно в D. По теореме Карлемана [5] из (11) следует, что функция $f(x)$ единственна. Сформулированное выше утверждение доказано.

Формула (6) является преобразованием типа Меллина. Такой способ суммирования широко используется в теории полюсов Редже [10] и получил название метода Зоммерфельда — Ватсона. Возможность такого суммирования рядов ТВ обсуждалась в [7].

Из аналитичности функции $f(x)$ в D и неравенства (11) следует, что $f(x)$ удовлетворяет сильному асимптотическому условию и имеет ряд (5) в качестве сильного асимптотического ряда в D. В силу теоремы Ватсона ряд (5) суммируем по Борелю и его борелевская сумма совпадает с суммой в смысле Зоммерфельда — Ватсона. Кроме того, используя (6), легко показать, что для любого $\varepsilon>0$ в области аналитичности справедливо неравенство

$$|f(|x|e^{i\theta})|\leqslant|x|^{\sigma+\varepsilon}B(\sigma+\varepsilon,\theta),$$

$$B(\sigma+\varepsilon,\theta)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,e^{-\theta y}\left|\frac{\alpha(\sigma+\varepsilon+iy)}{\sin\pi(\sigma+\varepsilon+iy)}\right|.$$

Таким образом, если справедливы предположения «А»—«В», то ряд (1) суммируем по Зоммерфельду — Ватсону и его сумма $\beta(g)$ аналитична по g в многолистной области $\{g\,|\,|g|>0,\ |\arg g|<3\pi/2\}$.

При $\operatorname{Re} z\leqslant\sigma$ коэффициентная функция, вообще говоря, имеет особенности. Их характер и положение связаны с асимптотикой $\beta(g)$ при $|g|\to\infty$

в области аналитичности. Пусть, например, самой правой особенностью функции $a(z)$ в комплексной z-плоскости является особенность $a(z)=$ $=\alpha_0(z-\zeta_0)^\gamma+\ldots$. Тогда из формулы типа (6) следует, что

$$(12)\qquad \beta(g)=\frac{\alpha_0 \sin\pi\gamma\,\Gamma(\gamma+1)}{\sin\pi\zeta_0}\frac{g^{\zeta_0}}{(\ln g)^{\gamma+1}}+o(|g|^{\zeta_0})$$

при $|g|\to\infty$ (если $\sin\pi\zeta_0\neq 0$).

3. АППРОКСИМАЦИЯ СУММЫ РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Обычно в моделях квантовой теории поля известно лишь несколько первых коэффициентов ТВ. В некоторых случаях известен главный член асимптотики a_n при $n\to\infty$; для модели $\varphi^4_{(4)}$ известна еще и первая поправка A_1/n (см. (3)). Всю эту информацию можно учесть при приближенном восстановлении функции $\beta(g)$ по ряду (1) на основе формулы суммирования Зоммерфельда — Ватсона. Допустим, что единственными особенностями функции $a(z)$ являются полюса и разрезы. При этом асимптотика $\beta(g)$ при $g\to\infty$ имеет вид (12). Введем функцию $\tau(z)=A^z\mu(z)=$ $=A^z a(z)/\Gamma(z+\nu)$. Из (3) следует, что при $|z|\to\infty$ и $\operatorname{Re} z>\sigma$

$$(13)\qquad \tau(z)=Cz^\alpha\left(1+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\ldots\right).$$

Выберем параметр $\nu>0$ таким, что α — целое число. Тогда разумно аппроксимировать функцию $\tau(z)$ рациональной функцией, так называемым многоточечным аппроксимантом Паде [11]:

$$\left[\frac{M_1}{M}\right](z)=Q_{M_1}(z)/P_{M_2}(z),$$

где Q_{M_1} и P_{M_2} — полиномы по z степеней M_1 и M_2, соответственно, и $P_{M_2}(0)=1$. Коэффициенты полиномов определяются по известным K членам ряда ТВ (1)

$$\left[\frac{M_1}{M}\right](n)=a_nA^n/\Gamma(n+\nu);\qquad n=k_0, k_0+1,\ldots,k_0+K-1,$$

т. е. мы имеем задачу о рациональной интерполяции $\tau(z)$.На коэффициенты полиномов можно также наложить условие совпадения асимптотик аппроксиманта и функции $\tau(z)$ (см. формулу (13)) при $|z|\to\infty$ с точностью до известных членов.

Сходимость последовательности аппроксимантов Паде для случая, когда узлы интерполяции уходят на бесконечность, в настоящее время доказана лишь для некоторого класса мероморфных функций, так называемых функций типа Стильтьеса [12]. Однако хорошее согласие результатов, полученных в разделе 4, с другими теоретическими подходами и с экспериментом (для критических индексов) является указанием на применимость описанной выше процедуры аппроксимации.

Аппроксиманты для суммы Зоммерфельда — Ватсона ряда (1) вычисляются по формуле

$$\beta_{M_1,M_2}(g) = -\frac{1}{2i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} dz \left(\frac{g}{A}\right)^z \frac{\Gamma(z+\nu)}{\sin\pi z}\left[\frac{M_1}{M_2}\right](z).$$

При расчетах выявилась замечательная черта этого подхода: если в данной физической задаче построить последовательность аппроксимантов, учитывающих различное число коэффициентов ТВ a_n и членов в асимптотической формуле (13) или соответствующих различным целым значениям α, то для подавляющей части аппроксимантов самые правые полюса в комплексной z-плоскости лежат относительно близко друг другу. Это приводит к устойчивой аппроксимации асимптотического поведения $\beta(g)$ при $g\to\infty$.

4. ФИЗИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Описанная выше процедура аппроксимации применялась для вычисления критических индексов фазовых переходов в рамках полевого подхода к критическим явлениям. Индексы η, ν, ω представлялись в виде разложения по параметру 2ε до членов $(2\varepsilon)^4$ включительно, учитывающих четырехпетлевое приближение в $O(N)$-симметричной модели $\varphi^4_{(4)}$ [13]. Мы вычисляли приближенные значения этих индексов в точке $2\varepsilon=1$, учитывая характер асимптотики коэффициентов ТВ a_n при $n\to\infty$. Результаты приведены в табл. 1 (1 столбец). Там же для сравнения приведены экспериментальные значения [14] (4 столбец), а также результаты расчетов в некоторых других теоретических подходах: методом конформ-Борель в рамках модели $\varphi^4_{(3)}$ [14] (3 столбец) и в рамках ε-разложения [13]

Таблица 1

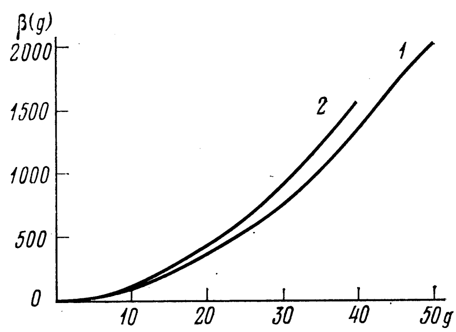
N		1	2	3	4
1	η	0,0313±0,0005	0,0333±0,0001	0,0315±0,0025	0,016±0,014
	ν	0,627±0,006	0,628±0,002	0,6300±0,0008	0,625±0,005
	ω	0,786±0,020	0,781±0,015	0,782±0,010	
2	η	0,034±0,001	0,0352±0,0001	0,0335±0,0025	
	ν	0,673±0,003	0,666±0,004	0,6693±0,0010	0,675±0,001
	ω	0,781±0,026	0,777±0,015	0,778±0,008	
3	η	0,036±0,002	0,0354±0,0001	0,0340±0,0025	
	ν	0,713±0,007	0,700±0,007	0,7054±0,0011	
	ω	0,776±0,041	0,779±0,007	0,779±0,006	

Таблица 2

	N	η	$1/\nu$	ω
f_0	1	0,326±0,008	1,32±0,03	2,18±0,11
	2	0,448±0,003	1,82±0,10	2,37±0,09
	3	0,570±0,010	2,33±0,18	2,59±0,13
ζ_0	1	2,40±0,16	1,18±0,05	0,88±0,04
	2	2,44±0,20	1,20±0,07	0,89±0,02
	3	2,46±0,23	1,20±0,12	0,89±0,03
ζ_0 [13]		2÷3	1,0÷1,3	0,7÷0,9

(2 столбец). Мы получили также значения параметров f_0 и ζ_0, определяющих асимптотику функций $\eta(2\varepsilon)$, $(1/\nu)(2\varepsilon)$, $\omega(2\varepsilon)$ при $2\varepsilon\to\infty$ $(f\sim f_0(2\varepsilon)^{\zeta_0})$ (табл. 2). Оценки величины ζ_0 были получены в [13] из условия минимизации относительной ошибки аппроксимации. Абсолютные ошибки, указанные в табл. 1 и 2, определялись по наибольшему отклонению значений, даваемых аппроксимантами, построенными с учетом наибольшего числа коэффициентов ТВ, от среднего значения.

Вторая задача, которая решалась суммированием по Зоммерфельду — Ватсону — восстановление β-функции (функции Гелл-Мана — Лоу) в $O(N)$-инвариантной безмассовой теории $(16\pi^2/4!)g\varphi^4_{(4)}$. Главный интерес представляет вопрос о существовании нетривиального нуля у β-функции и вид асимптотики $\beta(g)$ при $g\to\infty$. Мы восстановили поведение $\beta(g)$ в интервале $0<g\leqslant 50$ для $N=1$ (рисунок, кривая 1) и $N=10$. При построении аппроксимантов мы учитывали значения первых четырех коэффициентов ТВ [15], главный член асимптотики a_n при $n\to\infty$ [1, 2] и первую поправку A_1 в (13) ($A_1=-4{,}7$ для $N=1$ и $A_1=1{,}6$ для $N=10$) [16]. Относительная ошибка аппроксимации при $g=50$ составила примерно 20%



для $N=1$ и 6% для $N=10$. На рисунке приведены две кривые, аппроксимирующие поведение $\beta(g)$ для $N=1$: кривая 1 вычислена усреднением по кривым, полученным суммированием по Зоммерфельду — Ватсону; кривая 2 вычислена методом конформ-Борель в [6] (в этом случае относительная ошибка равна 10% при $g=40$). Результаты хорошо согласуются между собой. Мы получили следующие значения параметров β_0 и ζ_0 $(\beta(g)\sim\beta_0 g^{\zeta_0}$ при $g\to\infty)$:

$$\beta_0=\begin{cases}1{,}06\pm0{,}03,\\ 2{,}13\pm0{,}06,\end{cases}\qquad \zeta_0=\begin{cases}1{,}90\pm0{,}05 & \text{при } N=1,\\ 1{,}90\pm0{,}01 & \text{при } N=10,\end{cases}$$

что качественно согуласуется с асимптотикой $\beta(g)\sim 0{,}9g^2$, полученной в [6] для $N=1$ из условия минимума относительной ошибки аппроксимации. Проведенный анализ поведения функции $\beta(g)$ показывает, что, повидимому, имеет место нульзарядная ситуация. Теория $\varphi^4_{(4)}$ внутренне противоречива и может использоваться для описания взаимодействия частиц лишь вместе с другими полями и типами взаимодействий. Заметим, что все полученные результаты существенно используют предположения «А»—«В», сделанные в разделе 2.

В заключение я выражаю признательность Д. В. Ширкову, В. П. Волобуеву, Д. И. Казакову, О. В. Тарасову за полезные и стимулирующие обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выберем ε из условия $0<\varepsilon<\delta-\delta_1$; ему отвечает некоторое $R=R(\varepsilon)$ такое, что при $r>R$ выполняется неравенство (7), где индикатор $h(\theta)$ удовлетворяет (8). Тогда при $\tau_N=N+\gamma>R+\sigma$

$$|\mu(\tau_N-\sigma+iy)|<\exp[\varkappa_1|y|+\varkappa_0\tau_N+\varepsilon(\tau_N+|y|)-(\varkappa_0+\varepsilon)\sigma].$$

По формуле Стирлинга существует постоянная B такая, что при больших N

$$|\Gamma(\tau_N+iy)|\leqslant B(\tau_N^2+y^2)^{1/2(\tau_N-1/2)}\exp\left(-y\operatorname{arctg}\frac{y}{\tau_N}-\tau\right).$$

Остаточный член $R_N(x)$ (см. (10)) удовлетворяет неравенству

$$|R_N(x)|<\frac{4|x|^{\tau_N}\exp[(\varepsilon+\varkappa_0)\tau_N-\sigma]}{|\sin\pi\gamma|}B\times \tag{П.1}$$

$$\times\int_0^\infty dy\exp(Uy-\tau_N-1)[(\tau_N+1)^2+y^2]^{1/2(\tau_N+1/2)};$$

$$U=\frac{\pi}{2}-(\delta-\delta_1-\varepsilon)-\operatorname{arctg}\frac{y}{\tau_N+1}.$$

Выберем λ из условия $0<\lambda<\delta-(\delta_1+\varepsilon)$, а по нему найдем ω такое, чтобы при $y/(\tau_N+1)\geqslant\omega$ выполнялось неравенство

$$\frac{\pi}{2}>\operatorname{arctg}\frac{y}{\tau_N+1}\geqslant\frac{\pi}{2}-\lambda\equiv\operatorname{arctg}\omega.$$

Разобьем интервал интегрирования в (П.1) на $(0,\ \omega(\tau_N+1))$ и $(\omega(\tau_N+1),\ \infty)$ и оценим каждый из интегралов по отдельности:

а) $$I_1=\int_0^{\omega(\tau_N+1)}dy\exp(Uy-\tau_N-1)[(\tau_N+1)^2+y^2]^{1/2(\tau_N+1/2)}<$$

$$<(\tau_N+1)^{\tau_N+1/2}e^{-\tau_N-1}\int_0^{\omega(\tau_N+1)}dy\,e^{Uy}\left[1+\frac{y^2}{(\tau_N+1)^2}\right]^{1/2(\tau_N+1/2)}<$$

$$<C_1(N+1)!\,\sigma_1^{N+1}N^\gamma;$$

$$\sigma_1=e^{\omega U_0}\sqrt{1+\omega^2};\qquad U_0=\frac{\pi}{2}-(\delta-\delta_1-\varepsilon);$$

б) При $y>\omega(\tau_N+1)\,U<-\Delta(\varepsilon,\lambda)<0$, где $\Delta(\varepsilon,\lambda)\equiv\delta-\delta_1-\varepsilon-\lambda$,

$$I_2<e^{-\tau_N-1}(1+\omega^2)^{1/2(\tau_N+1/2)}\int_{\omega(\tau_N+1)}^\infty e^{-\Delta(\varepsilon,\lambda)y}y^{\tau_N+1/2}\,dy<$$

$$<C_2(N+1)!\,N^{\gamma-1/2}\sigma_2^{N+1};\qquad \sigma_2=\sqrt{1+\omega^2}/(\varepsilon\Delta(\varepsilon,\lambda)).$$

Окончательно получаем оценку (1) для остаточного члена $R_N(x)$, где $\sigma=\max(\sigma_1,\ \sigma_2)\times\times e^{\varepsilon+\varkappa_0}$, справедливую для всех $N\geqslant N^*>R-\sigma$ и для всех $x\in D$.

Литература

[1] *Липатов Л. Н.*– ЖЭТФ, 1977, *72*, вып. 2, 411–427.

[2] *Brezin, Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.*– Phys. Rev., 1977, *D15*, № 6, 1544–1557.

[3] *Bogomolny E. B., Fateev V. A., Lipatov L. N.* Calculation of high orders of perturbation theory in quantum field theory – in Soviet Scientific Reviews, sect. A. Physics Reviews, v. 2, 1980 (ed. by Khalatnikov I. M.), p. 247–393.

[4] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИИЛ, 1951, 504 с.

[5] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 4, Анализ операторов. М.: Мир, 1982, 428 с.

[6] *Казаков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В.*– ТМФ, 1979, *38*, № 1, 15–25.

[7] *Липатов Л. Н.*– ЖЭТФ, 1976, *71*, вып. 6, 2010–2024.

[8] *Попов В. С., Елецкий В. Л., Турбинер А. В.*– ЖЭТФ, 1978, *74*, вып. 2, 445–465.

[9] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956, 632 с.

[10] *Коллинз П.* Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980, 432 с.
[11] *Диттес Ф. М., Кубышин Ю. А., Тарасов О. В.*— ТМФ, 1978, *37*, № 1, 66–73.
[12] *Baker G. A.*, Jr. Essentials of Pade approximants. New York, Academic Press, 1975, 306 p.
[13] *Лопес Г.*— Матем. сборник, 1978, *107*, № 1, 69–83.
[14] *Владимиров А. А., Казаков Д. И., Тарасов О. В.*— ЖЭТФ, 1979, *77*, вып. 3, 1035–1045.
[15] *Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.*— Phys. Rev. Lett., 1977, *39*, № 2, 95–98.
[16] *Кубышин Ю. А.*— ТМФ, 1983, *57*, № 3, 363–372.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
3.I.1983 г.

SOMMERFELD — WATSON SUMMATION OF PERTURBATION THEORY SERIES

Kubyshin Yu. A.

Conditions for the Sommerfeld — Watson summation of perturbation theory series are formulated. The procedure for an approximate restoration of the series sum is developed. The results for some physical problems are presented.