L. A. Sakhnovich, On the principle of imperceptibility of the boundary in the theory of stable processes,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 6, 115–127

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 6

О ПРИНЦИПЕ НЕОЩУЩАЕМОСТИ ГРАНИЦЫ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ

Л. А. Сахнович

Введение

Однородный процесс $X(t)[X(O) = O]$ с независимыми приращениями называется устойчивым процессом [1], если

$$M[\exp(i\xi X(t))] = \exp\{-t|\xi|^{\alpha}[1 - i\beta(\operatorname{sign}\xi)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}]\},$$

где $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $|\beta| \leqslant 1$.

Если $\beta = 0$, то процесс $X(t)$ называется симметричным. Если $\beta = \pm 1$, то процесс $X(t)$ называется полностью асимметричным. В статьях [2, 3] исследована величина

$$p(t,a) = P\{\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|X(\tau)| < a\}, \tag{0.1}$$

т.е. вероятность того, что траектория $X(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$ останется внутри коридора $|X(\tau)| < a$. В частности, в [2, 3] найдена асимптотика

$$p(t,a) = le^{-t/\lambda_1(\alpha)}[1 + o(1)], \quad t \to \infty. \tag{0.2}$$

Данная статья посвящена полностью асимметричному случаю $\beta = \pm 1$. В этом случае результаты [2, 3] могут быть уточнены и развиты за счет использования теории функций типа Миттаг–Леффлера [4]

$$E_{\rho}(z,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu + n/\rho), \quad \rho > 0. \tag{0.3}$$

В частности, мы исследуем вероятностные характеристики процесса $X(t)$ при $t \to 0$. На этом пути получается частичное обоснование принципа неощущаемости границы для дифундирующего вещества. Этот принцип был сформулирован М. Кацем [6] в следующей драматической форме: „До нас еще не дошло известие о том, что мы будем съедены на границе области".

В работах [5–7] дана четкая математическая формулировка принципа неощущаемости границы и доказательство его справедливости для броуновского движения ($\alpha = 2$). Случай симметричных устойчивых процессов рассмотрен в [2, 8] ($0 < \alpha < 2$).

§1 Собственные числа оператора B_α

1. Определим функцию $\Psi_\alpha(x,s)$ при помощи соотношения [2, 3]

$$\int_0^\infty e^{-st}p(t,a)dt = \int_{-a}^{a} \Psi_\alpha(x,s)dx, \quad s>0. \tag{1.1}$$

В работе [3] введен оператор

$$B_\alpha f = \int_{-a}^{a} \Phi_\alpha(x,y)f(y)dy \tag{1.2}$$

и записано представление

$$(E+s\beta_\alpha)^{-1}f = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\alpha(x,y,s)f(y)dy. \tag{1.3}$$

Функция $\Psi_\alpha(x,s)$ находится по формуле [3]

$$\Psi_\alpha(x,s) = \Phi_\alpha(0,x) + \int_{-a}^{a} \Phi_\alpha(0,y)\cdot\gamma_\alpha(y,x,s)dy. \tag{1.4}$$

2. При условии

$$\beta=1, \qquad 1<\alpha<2 \tag{1.5}$$

функция $\Phi_\alpha(x,y)$ имеет вид

$$\Phi_\alpha(x,y) = \left[\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)(2a)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\right]$$
$$\cdot\left\{\left[a(|x-y|+y-x)\right]^{\alpha-1} - (a-x)^{\alpha-1}(a+y)^{\alpha-1}\right\}. \tag{1.6}$$

Оператор B_α запишем теперь в виде

$$B_\alpha f = J_\alpha f - c_\alpha(a-x)^{\alpha-1}\int_{-a}^{a}(a+y)^{\alpha-1}f(y)dy, \tag{1.7}$$

где

$$J_\alpha f = \left[\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)/\Gamma(\alpha)\right]\int_x^a (y-x)^{\alpha-1}f(y)dy, \tag{1.8}$$

$$c_\alpha = (2a)^{1-\alpha}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)/\Gamma(\alpha). \tag{1.9}$$

Чтобы найти резольвенту оператора B_α, воспользуемся равенством

$$(B_\alpha - \lambda E)g = (J_\alpha - \lambda E)g - c_\alpha(a-x)^{\alpha-1}\int_{-a}^{a}(a+y)^{\alpha-1}g(y)dy = f,$$

откуда следует соотношение

$$g = (B_\alpha - \lambda E)^{-1}f = (J_\alpha - \lambda E)^{-1}f + c_\alpha(J_\alpha - \lambda E)^{-1}(a-x)^{\alpha-1}r_f, \tag{1.10}$$

причем

$$r_f = \int_{-a}^{a}[(J_\alpha - \lambda E)^{-1}f](a+x)^{\alpha-1}dx/\Delta_\alpha(\lambda), \tag{1.11}$$

$$\Delta_\alpha(\lambda) = 1 - c_\alpha\int_{-a}^{a}[(J_\alpha - \lambda E)^{-1}(a-x)^{\alpha-1}](a+x)^{\alpha-1}dx. \tag{1.12}$$

Из формулы [9]

$$\int_{x}^{y}(s-x)^{\alpha-1}(y-s)^{\beta}ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \tag{1.13}$$

выводим, что

$$(J_\alpha - \lambda E)^{-1}f = -\frac{1}{\lambda}[f(x) + \int_{x}^{a}k(y-x,\lambda)f(y)dy], \tag{1.14}$$

где

$$k(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\lambda}\right)^n\frac{x^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} = x^{\alpha-1}\left(\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\lambda}\right)E_{1/\alpha}\left(\frac{x\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\lambda},\alpha\right). \tag{1.15}$$

Из формул (1.13)–(1.15) выводим утверждение:

Утверждение 1.1. *Верны следующие соотношения*

$$(J_\alpha - \lambda E)^{-1}(a-x)^{\alpha-1} = -\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda}(a-x)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left[\frac{(a-x)^\alpha}{\lambda}\cos\frac{\pi\alpha}{2},\alpha\right], \tag{1.16}$$

$$\Delta_\alpha(\lambda) = E_{1/\alpha}\left[\frac{(2a)^\alpha}{\lambda}\cos\frac{\pi\alpha}{2},\alpha\right]\Gamma(\alpha). \tag{1.17}$$

В книге М. М. Джрбашяна [4] доказаны следующие утверждения:

Утверждение 1.2 [4]. *Пусть $\rho > \frac{1}{2}$. Тогда при $|z| \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$E_\rho(z,\mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} - \sum_{k=1}^{p} \frac{\bar{z}^k}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|x|^{-1-p}), \tag{1.18}$$

где

$$|\arg z| \leqslant \theta, \qquad \frac{\pi}{2\rho} < \theta < \min\Big\{\pi, \frac{\pi}{\rho}\Big\}. \tag{1.19}$$

Утверждение 1.3 [4]. *Пусть нули γ_k^+, γ_k^- функции $E_\rho(z,\mu)$, лежащие соответственно в полуплоскостях*

$$G^+ = \{z : Jmz > 0\}, \qquad G^- = \{z : Jmz < 0\},$$

перенумерованы в порядке возрастания их модулей с учетом кратности. Если $\rho > \frac{1}{2}$, $|\rho| \neq 1$, то все достаточно большие по модулю нули функции $E_\rho(z,\mu)$ простые и справедливы асимптотические формулы

$$\gamma_k^\pm = e^{\pm i\pi/2\rho}(2\pi k)^{1/\rho}[1 + O(\ln k/k)], \quad k \to \infty. \tag{1.20}$$

Обозначим через $\gamma_k^\pm(\alpha)$ и $\lambda_k^\pm(\alpha)$ соответственно корни функции $E_{1/\alpha}(z,\alpha)$ и собственные числа оператора B_α, определенного формулами (1.7)–(1.9). При этом $\lambda_k^\pm(\alpha) \in G^\pm$. Из (1.10), (1.11) следует, что собственные числа B_α совпадают с корнями функции $\Delta_\alpha(\lambda)$. В силу (1.17) верно равенство

$$(2a)^\alpha\Big(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Big)/\lambda^\pm(\alpha) = \gamma_k^\pm(\alpha). \tag{1.21}$$

В силу формул (1.16), (1.20), (1.21) имеем

Утверждение 1.4. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\lambda_k^\pm(\alpha) = \Big(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Big)(3s)^\alpha(2\pi k)^{-\alpha} e^{\mp i\pi\alpha/2}[1 + O(\ln k/k)], \quad k \to \infty, \tag{1.22}$$

а соответствующие собственные функции $g_k^\pm(x,\alpha)$ имеют вид

$$g_k^\pm(x,\alpha) = (a-x)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\left[\frac{(a-x)^\alpha}{\lambda_k^\pm(\alpha)}\cos\frac{\pi\alpha}{2}, \alpha\right]. \tag{1.23}$$

Утверждение 1.5. *Наибольший по модулю корень $\lambda_1(\alpha)$ функции $\Delta_\alpha(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам*

$$O < \lambda_1(\alpha) < \left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right| \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}(2a)^\alpha, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{1.24}$$

Доказательство. Запишем разложение [9]

$$[\Gamma'(z)/\Gamma(z)] = -C - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}, \quad z > 0, \tag{1.25}$$

где C — постоянная Эйлера. Дифференцируя обе части (1.25), получаем

$$[\Gamma'(z)/\Gamma(z)]' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} > O, \quad z > O.$$

Значит, функция $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ монотонно возрастает. Рассмотрим теперь при $\alpha > O$ производную

$$\left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\alpha)}\right] = \left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+\alpha)}{\Gamma(z+\alpha)}\right] \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\alpha)} < O.$$

Из формул (0.2) и (1.17) выводим разложение функции $\Delta_\alpha(\lambda)$ в ряд. Если

$$\lambda \geqslant \left|(2a)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|,$$

то этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница и его сумма положительна. Значит, верны неравенства (1.24).

Замечание 1.1. Оценка $\lambda_1(\alpha)$ представляет интерес в связи с асимптотической формулой (0.2). Для симметричного случая ($\beta = O$) двусторонняя оценка $\lambda_1(\alpha)$ дана в статье [10].

Замечание 1.2. Чтобы оценить точность оценки (1.24), запишем $\lambda_1(\alpha)$ при $\alpha = 2$, $a = 1$:

$$\lambda_1 = (2/\pi)^2 \approx 0,4.$$

Согласно оценке (1.24), имеем

$$O < \lambda_1 < 0,66.$$

В [3] содержится следующий результат.

Утверждение 1.6. *Все собственные числа $\lambda_k^{\pm}(\alpha)$ оператора B_α принадлежат области*

$$-\frac{\pi}{2}(2-\alpha) \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}(2-\alpha), \qquad \left|z - \frac{\lambda_1(\alpha)}{2}\right| < \frac{\lambda_1(\alpha)}{2}.$$

Замечание 1.3. Заменой переменной интегрирования в формуле для B_α легко вывести, что

$$\lambda_k^{\pm}(\alpha, 1) = \lambda_k^{\pm}(\alpha, a)/a^{\alpha}, \quad \beta = \pm 1.$$

Чтобы подчеркнуть зависимость оператора B_α от параметра β, будем писать $\beta_{\alpha,\beta}$. Справедливо равенство [3]

$$B_{\alpha,1} = B^*_{\alpha,-1}. \tag{1.26}$$

В силу вещественности оператора $B_{\alpha,1}$ и равенства (1.26) верно

Утверждение 1.7. *Множество собственных чисел оператора $B_{\alpha,1}$ совпадает с множеством собственных чисел оператора $B_{\alpha,-1}$.*

§2. Собственные функции оператора B_α

1. Через $g_{kj}^{\pm}$ и $h_{kj}^{\pm}$ $(0 \leqslant j < m_k)$ обозначим линейно независимые максимальные цепочки собственных и присоединенных функций операторов B_α и B_α^*, соответствующих собственным числам $\lambda_k^{\pm}$ и $\overline{\lambda_k^{\pm}}$. Из результатов Губреева Г. М. [11] следует

Утверждение 2.1. *Собственные и присоединенные функции операторов B_α и B_α^* образуют полные системы в $L^2(-a,a)$.*

Заметим, что выполняются следующие условия ортогональности

$$(g_{k,j_1}^{\pm}, h_{l,j_2}^{\pm}) = 0, \quad k \neq l, 0 \leqslant j_1 < m_k, 0 \leqslant j_2 < m_l; \tag{2.1}$$

$$(g_{k,j_1}^{\pm}, h_{l,j_2}^{\mp}) = 0, \quad 0 \leqslant j_1 < m_k, 0 \leqslant j_l < m_l. \tag{2.2}$$

Повторяя рассуждения статьи [12], получаем

Утверждение 2.2. *Кратность корня $\lambda_k^{\pm}(\alpha)$ функции $\Delta_\alpha(\lambda)$ совпадает с размерностью $d(\lambda_k^{\pm}(\alpha))$ соответствующего корневого подпространства оператора B_α, при этом*

$$g_{kj}^{\pm} = (J_\alpha - \lambda_k^{\pm}E)^{-j-1}(a-x)^{\alpha-1}, \quad 0 \leqslant j < m_k, \tag{2.3}$$

$$h_{kj}^{\pm} = (J_\alpha^* - \overline{\lambda}_k^{\pm}E)^{-j-1}(a+x)^{\alpha-1}, \quad 0 \leqslant j < m_k. \tag{2.4}$$

При $j = 0$ из (2.3) следует формула (1.23), а из (2.4) получаем

$$h_k^{\pm}(x,\alpha) = (a+x)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left[\frac{(a+x)^{\alpha}}{\overline{\lambda}^{\pm}(\alpha)}\cos\frac{\pi\alpha}{2}, \alpha\right]. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Справедливо равенство*

$$M_k^{\pm} = (g_k^{\pm}, h_k^{\pm}) = (2a)^{\alpha-1} E'_{1/\alpha}\left[\frac{(2a)^{\alpha}}{\lambda_k^{\pm}} \cos\frac{\pi\alpha}{2}, \alpha\right]. \tag{2.6}$$

Доказательство. В силу формул (0.2), (1.23) и (2.5) имеем

$$(g_k^{\pm}, h_k^{\pm}) = (2a)^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(2a)^{\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\lambda_k^{\pm}}\right] \frac{s+1}{\Gamma(\alpha(s+2))},$$

откуда следует равенство (2.6).

Так как асимптотическое равенство (1.18) справедливо в секторе, то оно допускает дифференцирование [13]:

$$E'_{\rho}(z,\mu) = [\rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^{\rho}}]' + \sum_{k=1}^{p} \frac{kz^{-k-1}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|x|^{-2-p}). \tag{2.7}$$

Из (1.22) и (2.6), (2.7) вытекает

Утверждение 2.3. *Существуют такие* $M > 0$ *и* $k_0 \geqslant 1$, *что справедливо неравенство*

$$k^{-M} \leqslant |M_k^{\pm}| \leqslant k^M \quad k \geqslant k_0 \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. Если $k = 1$, то $\lambda_1^+ = \lambda_1^- = \lambda_1$, $M_1^+ = M_1^- = M_1$, $g_1^+(x) = g_1^-(x) = g_1(x)$, $h_1^+(x) = h_1^-(x) = h_1(x)$, а постоянная l в асимптотической формуле (0.2) имеет вид [3]:

$$l = g_1(0) \int_{-a}^{a} h_1(x)dx/M_1.$$

Таким образом, при $\beta = \pm 1$ величина коэффициента l может быть выражена при помощи функции типа Миттаг–Леффлера.

2. Центральную роль в дальнейшем играет функция

$$q_{\alpha}(x,y,t) = \sum_{k=k_0}^{\infty} [g_k^+(x)\overline{h_k^+(y)}e^{-t/\lambda_k^+}]/M_k^+ + \sum_{k=k_0}^{\infty} [g_k^-(x)\overline{h_k^-(y)}e^{-t/\lambda_k^-}]/M_k^-. \tag{2.9}$$

Формулу (2.9) можно переписать в виде

$$q_{\alpha}(x,y,t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=k_0}^{\infty} [g_k^+(x)\overline{h_k^+(y)}e^{-t/\lambda_k^+}]/M_k^+\right\}. \tag{2.10}$$

Из асимптотических равенств (1.18), (1.22) и утверждения 2.3 непосредственно следует

Утверждение 2.4. *Ряд* (2.10) *равномерно сходится в области*

$$-a \leqslant x, y \leqslant a.$$

3. Обозначим через $Q_\alpha(t)$ функцию

$$Q_\alpha(t) = \int_{-a}^{a} q_\alpha(x, x, t)dx. \tag{2.11}$$

В силу (2.6), (2.10) и (2.11) имеем

$$Q_\alpha(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=k_0}^{\infty} \exp(-t/\lambda_k^+)\right]. \tag{2.12}$$

Лемма 2.2. *При* $t \to 0$ *верно асимптотическое равенство*

$$Q_\alpha(t) = \frac{2a}{\pi} t^{-1/\alpha}\Gamma(1 + 1/\alpha)\left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|^{1/\alpha}\sin\frac{\pi}{\alpha}\left[1 + O\left(t^{\frac{1-\delta}{\alpha}}\right)\right], \quad 0 < \delta < 1. \tag{2.13}$$

Доказательство. Введем еще функцию

$$Q_\alpha(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=k_0}^{\infty} \exp(-t\nu_\alpha k^\alpha)\right], \tag{2.14}$$

где

$$\nu_\alpha = \left(1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)^\alpha. \tag{2.15}$$

Оценим теперь разность $Q_\alpha(t) - \tilde{Q}_\alpha(t)$, учитывая соотношение

$$Q_\alpha(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=k_0}^{\infty} \exp[-t\nu_\alpha k^\alpha(1 + O(\ln k/k))]\right\}. \tag{2.16}$$

Пусть

$$\beta_\varepsilon = \frac{1}{\alpha - 1 + \varepsilon}, \quad k \leqslant t^{-\beta_\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.17}$$

Выбирая $\varepsilon < 1$, но достаточно близко к 1, получаем

$$|1 - \exp[-tk^{\alpha-1}O(\ln k)]| = O(t^{\frac{1-\delta}{\alpha}}). \tag{2.18}$$

При достаточно малом t и $k \geqslant t^{-\beta_\varepsilon}$ будет выполняться неравенство

$$|O(\ln k/k)| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.19}$$

Воспользуемся далее оценками

$$\sum_{k_0 \leqslant k \leqslant t^{-\beta_\varepsilon}} \exp\left[-t\left(\frac{\pi k}{a}\right)^\alpha\right] \leqslant \int_0^\infty \exp\left[-t\left(\frac{\pi u}{a}\right)^\alpha\right] du = \left(\frac{a}{\pi t}\right)^{1/\alpha} \Gamma(1+1/\alpha), \tag{2.20}$$

$$\sum_{k \geqslant t^{-\beta_\varepsilon}} \exp\left[-t\left(\frac{\pi k}{a}\right)^\alpha \frac{1}{2}\right] \leqslant M \int_{t^{-\beta_\varepsilon}}^\infty \exp\left[-t\left(\frac{\pi u}{a}\right)^\alpha \frac{1}{2}\right] du \leqslant O(1). \tag{2.21}$$

Из соотношений (2.14)-(2.21) следует, что

$$|Q_\alpha(t) - \tilde{Q}_\alpha(t)| = t^{-1/\alpha} o\left(t^{\frac{1-\delta}{\alpha}}\right), \quad t \to 0. \tag{2.22}$$

Чтобы изучить поведение $\tilde{Q}_\alpha(t)$ при $t \to 0$, воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} |e^{-\nu_\alpha t u^\alpha} - e^{-\nu_\alpha t k^\alpha}| du &\leqslant ct \int_k^{k+1} e^{-\operatorname{Re}\nu_\alpha t u^\alpha}(u^\alpha - k^\alpha) du \\ &\leqslant \alpha ct \int_k^{k+1} e^{-\operatorname{Re}\nu_\alpha t u^\alpha} u^{\alpha-1} du, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где c — не зависит от k.

Из соотношений (2.14), (2.23) выводим, что

$$\left|\tilde{Q}_\alpha(t) - 2\operatorname{Re}\int_{k_0}^\infty e^{-\nu_\alpha t u^\alpha} du\right| \leqslant \alpha ct \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\nu_\alpha t u^\alpha} \cdot u^{\alpha-1} du = O(1). \tag{2.24}$$

Так как $\operatorname{Re}\nu_\alpha > 0$, то верно равенство

$$\int_0^\infty e^{-\nu_\alpha t u^\alpha} du = \nu_\alpha^{-1/\alpha} t^{-1/\alpha} \Gamma(1+1/\alpha). \tag{2.25}$$

Справедливость докáзываемого асимптотического равенства (2.13) вытекает из (2.15), (2.22), (2.24), (2.25).

§3. Ослабленный принцип неощущаемости границы

1. Через $p_\alpha(x,\Delta,t,a)$ обозначим вероятность того, что частица, находясь в начальный момент в точке x, в момент t окажется в интервале $\Delta\in[-a,a]$, причем за время $0\leqslant\tau\leqslant t$ она не выйдет из полосы $[-a,a]$.

Из рассуждений статьи [3] следует, что

$$p_\alpha(x,\Delta,t,a)=\int_\Delta p_\alpha(x,y,t,a)dy, \tag{3.1}$$

где функция $p_\alpha(x,y,t,a)$ имеет вид

$$p_\alpha(x,y,t,a)=2\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=0}^{m_k-1}\varphi_{kj}(x)\bar\psi_{kj}(y)e^{-t/\nu_k^+}t^j\right)+q_\alpha(x,y,t,a). \tag{3.2}$$

Функции $\varphi_{kj}(x)$ и $\psi_{kj}(x)$ являются линейными комбинациями соответственно функций $g^+_{k,l}(x)$ и $h^+_{kl}(x)$ $(0\leqslant l\leqslant j<m_k-1)$. Из леммы 2.2 и равенства (3.2) вытекает основное асимптотическое равенство

$$\int_{-a}^{a}p_\alpha(x,x,t,a)dx=\frac{2a}{\pi}t^{-1/\alpha}\Gamma(1+1/\alpha)\left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|\cdot\left(\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)\left[1+O\left(t^{\frac{1-\delta}{\alpha}}\right)\right],$$
$$0<\delta<1,\quad 1\to 0. \tag{3.3}$$

В случае $a=\infty$ известна формула [14]

$$p_\alpha(x,\Delta,t,\infty)=\int_\Delta p_\alpha(x,y,t,\infty)dy. \tag{3.4}$$

Функция $p_\alpha(x,y,t,\infty)$ при этом имеет вид [14]

$$p_\alpha(x,y,t,\infty)=P_\alpha(x-y,t,\infty),$$

причем функция $p_\alpha(x-y,t,\infty)$ допускает разложение в ряд по степеням $x-y$. Если $x=y$, то верно равенство [14]

$$P_\alpha(x,x,t,\infty)=\frac{1}{\pi}t^{-1/\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|^{1/\alpha}\sin\frac{\pi}{\alpha}. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует соотношение

$$\int_{-a}^{a}p_\alpha(x,x,t,\infty)dx=\frac{2a}{\pi}t^{-1/\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|^{1/\alpha}\sin\frac{\pi}{\alpha}. \tag{3.6}$$

Из формул (3.3) и (3.6), следует основное утверждение.

Теорема 3.1. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\int_{-a}^{a} p_\alpha(x,x,t,a)dx = \int_{-a}^{a} p_\alpha(x,x,t,\infty)dx[1+O(1)], \quad t \to 0. \tag{3.7}$$

Сопоставим (3.7) с эвристическим принципом неощущаемости границы М. Каца, согласно которому влияние границы на поведение частицы мало при малых промежутках времени, т.е.

$$p_\alpha(x,y,t,a) \approx p_\alpha(x,y,t,\infty), \tag{3.8}$$

когда $-a < x$, $y < a$ и $t \to 0$ ([5–7]).

В ослабленной форме при $x \approx y$ соотношение (3.8) принимает форму

$$p_\alpha(x,x,t,a) \approx p_\alpha(x,x,t,\infty), \quad t \to 0,$$

т.е.

$$t^{1/\alpha}[p_\alpha(x,x,t,\infty) - p_\alpha(x,x,t,a)] \to 0, \quad t \to 0. \tag{3.9}$$

Соотношение (3.9) с вероятностной точки зрения означает следующее.

Вероятность обнаружить частицу близко от начальной точки движения мало зависит от наличия границы при малых промежутках времени.

Нами доказана справедливость соотношения (3.9) в среднем, т.е. равенство (3.7). Как известно [5]. Значит, из (3.7) следует, что

$$t^{1/\alpha}[p_\alpha(x,x,t,\infty) - p_\alpha(x,x,t,a)] \implies 0, \quad t \to 0, \tag{3.10}$$

где символом $\implies$ обозначена сходимость по мере.

Замечание 3.1. Из утверждения 1.6 следует, что формулы (3.1)–(3.3) и (3.6) остаются верными и при $\beta = -1$.

2. Для произвольного устойчивого процесса ($0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$) справедливо равенство [14]:

$$p_\alpha(x,y,t,\beta,\infty) = p_\alpha(x-y,t,\beta,\infty),$$

причем

$$p_\alpha(x,x,t,\beta,\infty) = \frac{1}{\pi}\Gamma\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)t^{-1/\alpha}\Big(\cos\frac{\pi\gamma}{2}\Big)^{1/\alpha}\Big|\sin\frac{\pi}{2\alpha}(\gamma+\alpha)\Big|, \tag{3.11}$$

где

$$\mu^2 = \cos^2\frac{\pi\alpha}{2} + \beta^2\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}, \quad \operatorname{sign}\mu = \operatorname{sign}(1-\alpha), \tag{3.12}$$

$$\cos\frac{\pi\gamma}{2} = \mu^{-1}\cos\frac{\pi\alpha}{2}. \tag{3.13}$$

Ослабленный принцип неощущаемости границы в среднем принимает вид

$$\int_{-a}^{a} p_\alpha(x,x,t,\beta,a)dx = \int_{-a}^{a} p_\alpha(x,x,t,\beta,\infty)dx[1+o(1)]. \tag{3.14}$$

В симметричном случае ($\beta = 0$) формула (3.14) эквивалентна равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-t/\lambda_k(\alpha)) = \frac{2a}{\pi} t^{-1/\alpha}\Gamma(1+1/\alpha)[1+o(1)], \quad t \to 0. \tag{3.15}$$

Соотношение (3.15) доказано в статье [2] при $\alpha \neq 1$ и в статье [8] при $\alpha = 1$.

Таким образом, принцип неощущаемости границы в ослабленной форме (3.14) доказан для следующих двух случаев:

I. $0 < \alpha < 2$, $\beta = 0$ (симметричный случай);

II. $1 < \alpha < 2$, $\beta = \pm 1$ (полностью асимметричный случай).

§4. Распределение температуры в ядерном реакторе

1. В теле D под воздействием облучения в случайные моменты времени τ_1, $\tau_2, \ldots$ в случайных местах Y_1, $Y_2, \ldots$ возникают кратковременные вспышки. Обозначим через $T(t, A)$ температуру в точке A в момент времени t, через $\bar{T}$ — среднюю температуру. Рассмотрим случайную величину

$$X(t, A) = T(t, A) - \bar{T},$$

характеризующую отклонение от средней температуры. Перейдем к стационарному режиму, т.е. рассмотрим случайную величину $\bar{X}$, являющуюся слабым пределом $X(t, A)$ при $t \to \infty$. Как показал И. М. Лифшиц [14] (см. также [15]), при определенных условиях величина $\bar{X}$ не зависит от A и распределена по устойчивому закону с параметрами

$$\alpha = \frac{5}{3}, \quad \beta = 1, \quad \lambda = c\rho, \tag{4.1}$$

где

$$c = \frac{3}{20\pi}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{3/2}\Gamma(1/3), \tag{4.2}$$

а ρ — средняя плотность пар (τ_i, Y_i) в пространственно-временном множестве $D \times R^+$.

2. Будем далее рассматривать $\lambda = c\rho$ как свободный параметр. Таким образом, мы переходим к случайному процессу $\bar{X}(\lambda)$. Предположим дополнительно, что

$$\bar{X}(\lambda_1) + \bar{X}(\lambda_2) = \bar{X}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

При этом естественном условии процесс $X(\lambda)$ является устойчивым. Учитывая (0.2) и замечание 2.1, получаем

Утверждение 4.1. *Для процесса $X(\lambda)$ справедлив принцип неощущаемости границы в форме* (3.7) *и асимптотическое равенство*

$$P\{\sup_{0\leqslant r\leqslant\rho}|\bar{X}(cr)|<a\}=e^{-c\rho/\lambda_1(\frac{5}{3})}\cdot[g_1(0)\int_{-a}^{a}h_1(x)dx/m_1][1+o(1)]\quad \rho\to\infty.$$

Список литературы

[1] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1967.

[2] Сахнович Л. А., *Интегральные уравнения Абеля в теории устойчивых процессов*, Укр. мат. журн. **36** (1984), № 2, 213–218.

[3] Сахнович Л. А., *Интегральные уравнения в теории устойчивых процессов*, Алгебра и анализ **4** (1992), № 4, 225–238.

[4] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966.

[5] Кац М., *О некоторых связях между теорией вероятностей и дифференциальными и интегральными уравнениями*, Математика (сб. переводов) **1** (1957), № 2, 95–124.

[6] Кац М., *Несколько вероятностных задач физики и математики*, Наука, М., 1967.

[7] Kac M., Pollard H., *On the distribution of the maximum of partial sums of independent random variables*, Canad. J. Math. **2** (1950), 375–384.

[8] Коган Х. М., Сахнович Л. А., *Асимптотика спектра одного сингулярного интегро-дифференциального оператора*, Дифф. уравнения **20** (1984), № 8, 1444–1447.

[9] Бейтмен Г., Эрдейн А., *Высшие трансцедентные функции* I, Наука, М., 1973.

[10] Позин С. М., Сахнович Л. А., *Двусторонняя оценка наименьшего собственного числа оператора, характеризующего устойчивые процессы*, Теория вероятн. и ее прим. **36** (1991), 368–370.

[11] Губреев Г. М., *Спектральный анализ биортогональных разложений функций в ряды экспонент*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **53** (1989), № 6, 1236–1268.

[12] Сахнович Л. А., *Операторная безутианта в теории отделения корней целых функций*, Функцион. анализ и его прил. (1976), № 3, 54–61.

[13] Вазов В., *Асимптотические разложения решений обыкновенных диференцальных уравнений*, Мир, М., 1968.

[14] Лукач Е., *Характеристические функции*, Наука, М., 1979.

[15] Лифшиц И. М., *О температурных вспышках в сфере, подверженной действию ядерного излучения*, ДАН СССР **109** (1956), № 6, 1109–1111.

[16] Золотарев В. М., *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, М., 1983.

Поступило 14 апреля 1993 г.