

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

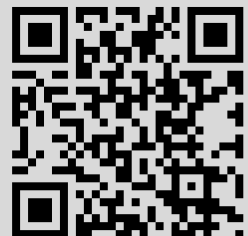
С. А. Назаров, Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением, *Тр. ММО*, 1990, том 53, 98–129

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

15 марта 2025 г., 11:47:55



## ОСРЕДНЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТОНКУЮ ПОЛОСТЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ СЕЧЕНИЕМ

С. А. Назаров

В настоящей статье рассмотрена асимптотика решений задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в трехмерной области  $\Omega_\varepsilon$ , содержащей тонкую полость  $\omega_\varepsilon$  с быстроизменяющейся границей. Сечения этой полости плоскостями, перпендикулярными ее «оси»  $M$ , имеют малые диаметры порядков  $O(\varepsilon)$ , т. е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  множество  $\omega_\varepsilon$  «стягивается» к кривой  $M$ , которая считается простым гладким замкнутым контуром длины  $2\pi$ . Изменения указанных сечений при движении вдоль  $M$  характеризуются двумя зависимостями: гладкой — от «медленной» переменной  $s$ , длины дуги на  $M$ , и гладкой,  $2\pi$ -периодической — от «быстрой» переменной  $\varepsilon^{-1}s$  ( $\varepsilon = N^{-1}$  — малый параметр задачи;  $N$  — большое натуральное число).

Как уже указывалось, в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  область  $\Omega_\varepsilon$  переходит в область  $\Omega_0 = \Omega \setminus M$ . Однако задача Соболева с данными на дуге  $M$  в трехмерном теле некорректна, и, значит, в качестве предельной для исходной сингулярно возмущенной задачи следует выбрать краевую задачу в области  $\Omega$  (без исключения контура). Таким образом, наличие тонкой полости  $\omega_\varepsilon$  вносит малые возмущения в решение исходной задачи в  $\Omega_\varepsilon$  по сравнению с решением задачи в  $\Omega$  (далее в п. 5° и 7° проверяется, что в случае, когда на  $\partial\omega_\varepsilon$  заданы условия Дирихле, возникает возмущение порядка  $O(|\log \varepsilon|^{-1})$ , а в случае условий Неймана — порядка  $O(\varepsilon)$ ). Эти возмущения удается описать при помощи введения в правую часть уравнения Пуассона в  $\Omega$  распределенных по контуру  $M$  с малыми плотностями (порядков  $O(|\log \varepsilon|^{-1})$  или  $O(\varepsilon)$ )  $\delta$ -функций и их производных. Последнее является отличительной особенностью изученной здесь задачи по сравнению с задачами о перфорации трехмерной области малыми отверстиями вдоль гладкой поверхности  $\Gamma$  (или перфорации плоской области вдоль гладкого контура  $\Gamma$ ). В таких задачах возмущения характеризуются появлением на  $\Gamma$  скачков решений и их конормальных производных, т. е. возникновением задач сопряжения (обзор результатов по этой тематике можно найти в [1—4]; по поводу более поздних публикаций см. [5—7] и имеющуюся там библиографию).

Краевые задачи в области с вырезанной тонкой трубкой  $\omega_\varepsilon$ , сечение которой гладко зависит от координаты  $s$ , рассматривались в статьях [8—15]. Результаты этих работ показывают, в частности, что возможны две ситуации, в которых алгоритмы построения асимптотики существенно различаются. В более простом случае коэффициенты асимптотического ряда вычисляются при помощи последовательного решения двух предельных задач: первой — в области  $\Omega$  и второй — внешней задачи для растянутого в  $\varepsilon^{-1}$  раз сечения множества  $\omega_\varepsilon$ , ко-

торая служит для описания пограничного слоя. В другом случае итерационные процессы осложняются тем, что решение второй предельной задачи не имеет необходимого поведения на бесконечности. Последнее обстоятельство нарушает упоминавшуюся процедуру построения асимптотики. Выполнение условия убывания пограничного слоя сводится к решению псевдодифференциального (интегрального) уравнения на  $M$  — третьей, дополнительной, предельной задачи. Однако это уравнение, зависящее от  $\log \varepsilon$ , оказывается разрешимым не при всех правых частях для сгущающейся к нулю последовательности значений  $\varepsilon$ . Предложенная в [8—11] процедура его регуляризации позволяет найти асимптотическое решение уравнения, оставляющее в правой части невязку со сверхстепенным убыванием при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и тем самым построить асимптотику решения исходной задачи.

В настоящей статье аналогичные перечисленным явления прослежены для решения уравнения Пуассона с данными Дирихле на  $\partial\Omega$  и данными Дирихле или Неймана на границе  $\partial\omega_\varepsilon$  тонкой трубки с периодически изменяющимся сечением. Вблизи  $\partial\omega_\varepsilon$  возникает пограничный слой. Он описывается решениями уравнения Лапласа в трехмерном слое  $T$  толщины  $2\pi$  с исключенным компактным множеством  $\bar{G}(s)$ ; на  $\partial T \setminus \bar{G}(s)$  заданы условия периодичности, а на  $\partial G(s) \cap T$  — условия Дирихле или Неймана. Такие краевые задачи изучены в теоремах 1, 6 и 7. В зависимости от того как ведут себя решения указанных задач на бесконечности, реализуется одна из двух ситуаций, упомянутых в предыдущем абзаце. В случае условий Дирихле появляется третья предельная задача — интегральное уравнение на  $M$ . Его выводу, исследованию и регуляризации посвящены пункты 3° и 4° статьи. Теорема 3 о старшем члене асимптотики решения задачи Дирихле содержится в п. 5°. Обсуждение алгоритма построения асимптотики в более простом случае смешанной задачи (на  $\partial\omega_\varepsilon$  — условия Неймана) проводится в седьмом разделе. Наконец, в п. 6° и 8°, 9° рассмотрен конкретный пример:  $M$  — единичная окружность, а  $\Omega = \mathbb{R}^3$ . Как следствие полученных результатов о представлениях решений внешней задачи Дирихле и Неймана вычисляются главные члены асимптотики таких классических интегральных характеристик тонкого тороидального множества  $\omega_\varepsilon$ , как емкость и тензоры поляризации и присоединенной (виртуальной) массы.

Автор благодарен О. А. Олейник за полезные обсуждения этой работы.

1°. *Область и краевая задача.* Пусть  $\Omega$  — трехмерная область с гладкой (класса  $C^\infty$ ) границей  $\partial\Omega$  и компактным замыканием  $\bar{\Omega}$ , а  $M$  — простой гладкий замкнутый контур, лежащий в  $\Omega$ . Не ограничивая общности, будем считать, что длина  $M$  равна  $2\pi$ . Введем в малой  $d$ -окрестности  $\mathcal{V}_d$  дуги  $M$  естественные координаты  $(y, s)$ , где  $s$  — параметризация  $M$  длиной дуги ( $s$  — точка на единичной окружности  $S^1$ ),  $y_1$  и  $y_2$  — нормальная и бинормальная составляющие (точка  $y = (y_1, y_2)$  содержится в круге  $B_{d^2}(0)$  радиуса  $d$  с центром в начале координат).

Обозначим через  $\omega(s, z)$  двупараметрическое семейство областей на плоскости, содержащих начало координат  $O$  и имеющих гладкие границы  $\partial\omega(s, z)$ . Зависимость от переменной  $s \in S^1$  предполагается гладкой, а от переменной  $z \in \mathbb{R}^1$  — гладкой и периодической с периодом  $2\pi$ . Пусть еще  $N$  — большое натуральное число и  $\varepsilon = N^{-1}$  — малый пара-

метр задачи. Введем в  $\mathcal{Y}_d$  «растянутые» координаты  $\eta = \varepsilon^{-1}y$  и определим «тонкое множество с периодически изменяющимся сечением» по формуле

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathcal{Y}_d : s \in S^1, \eta \in \omega(s, \varepsilon^{-1}s)\}. \quad (1.1)$$

В области  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$  рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta_x u(\varepsilon, x) = f(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad (1.2)$$

$$u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad (1.3)$$

$$u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon, \quad (1.4)$$

где  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

**З а м е ч а н и е 1.** *i) Требование ограниченности области  $\Omega$  несущественно. Например, если  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , то при выполнении соотношений*

$$\partial_x^\alpha f(x) = O(|x|^{-3-\alpha-\delta}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

(где  $\partial_x^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\delta > 0$ ) краевое условие (1.3) заменяется естественным условием убывания функции и на бесконечности:

$$\partial_x^\alpha u(\varepsilon, x) = O(|x|^{-1-|\alpha|}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

*ii) Предположение о том, что точка  $O$  принадлежит  $\omega(s, z)$ , т. е. множество (1.1) содержит свою «ось»  $M$ , также не принципиально. Оно введено лишь для упрощения некоторых из дальнейших выкладок. В частности, все полученные ниже результаты остаются в силе и для случая малых отверстий, расположенных периодически вдоль  $M$ .*

**2°. Задача о пограничном слое.** Как обычно (см., например, [2, 3, 8—15]), вблизи  $\omega_\varepsilon$  возникает явление пограничного слоя, и для решения  $u$  задачи (1.2) — (1.4) характерны резкие изменения в малой окрестности тонкого множества  $\omega_\varepsilon$ . Функция  $w$  типа пограничного слоя, описывающая такое поведение решения, зависит как от «медленной» переменной  $s$ , так и от «быстрых» переменных  $\zeta = (\eta, \varepsilon^{-1}s)$ . Найдем краевую задачу для определения погранслоя  $w$ .

В координатах  $(y, s)$  оператор Лапласа  $\Delta_x$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_x = \mathcal{L} \left( y, s, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial y_1} H(y, s) \frac{\partial}{\partial y_1} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_2} H(y, s) \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial s} H(y, s)^{-1} \frac{\partial}{\partial s}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $H(y, s) = [(1 - k(s)y_1)^2 + \lambda(s)|y|^2]^{1/2}$ ;  $k$  — кривизна, а  $\lambda$  — кручение контура  $M$ .

Согласно (2.1) для гладкой функции  $(\zeta, s) \rightarrow W(\zeta, s)$  справедливо соотношение

$$\mathcal{L}(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s) W(\zeta, s) = \varepsilon^{-2} \Delta_\zeta W(\zeta, s) + O(\varepsilon^{-1}). \quad (2.2)$$

Поэтому  $W$  следует подчинить уравнению Лапласа

$$\Delta_\zeta w(\zeta, s) = 0, \quad \zeta \in Q(s) \quad (2.3)$$

в области  $Q(s)$ , заданной при помощи формулы

$$Q(s) = \{\zeta \in \mathbb{R}^3 : |\zeta_3| < \pi, \quad \eta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega(s, \zeta_3)}\}.$$

Это множество есть слой толщины  $2\pi$  с отверстием  $G(s) = \{\zeta : |\zeta_3| < \pi, \eta \in \omega(s, \zeta_3)\}$ . (Всюду в этом разделе зависимость от переменной  $s$  — параметрическая.)

Границу  $\partial Q(s)$  представим в виде объединения  $\Gamma_+(s) \cup \Gamma_-(s) \cup g(s)$ , где  $\Gamma_{\pm}(s) = \{\zeta : \zeta_3 = \pm \pi, \eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega(s, \pm \pi)}\}$ ,  $g(s) = \partial G(s) \cap Q(s)$ . Поскольку зависимость от  $\zeta_3$  предполагается периодической, поставим на  $\Gamma_{\pm}(s)$  условия согласования

$$\begin{aligned} \omega(\eta, \pi, s) &= \omega(\eta, -\pi, s), \quad \frac{\partial \omega}{\partial \zeta_3}(\eta, \pi, s) = \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial \zeta_3}(\eta, -\pi, s), \quad \eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega(s, \pi)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая (1.4), на  $g(s)$  принимаем данные Дирихле

$$\omega(\zeta, s) = \varphi(\zeta, s), \quad \zeta \in g(s), \quad (2.5)$$

где  $(\zeta, s) \rightarrow \varphi(\zeta, s)$  — гладкая функция, периодическая по  $\zeta_3$  и  $s$  с периодом  $2\pi$ .

**Теорема 1.** *i) Существует единственное ограниченное решение  $\omega$  задачи (2.3)–(2.5). Это решение гладко зависит от переменных  $\zeta \in \overline{Q(s)}$ ,  $s \in S^1$ , и допускает асимптотическое разложение*

$$\omega(\zeta, s) = c(s; \varphi) + O(|\eta|^{-1}) \quad \text{при } |\eta| \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

которое можно почленно дифференцировать.

*ii) Однородная задача (2.3)–(2.5) имеет решение  $e$  с асимптотикой:*

$$e(\zeta, s) = -\log|\eta| + \kappa(s) + O(|\eta|^{-1}) \quad \text{при } |\eta| \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Величина  $c(s; \varphi)$  в разложении (2.6) вычисляется по формуле

$$c(s; \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{g(s)} \varphi(\zeta, s) \frac{\partial e}{\partial n_{\zeta}}(\zeta, s) d\sigma_{\zeta}, \quad (2.8)$$

где  $n_{\zeta}$  — внешняя (по отношению к  $Q(s)$ ) нормаль к  $g(s)$ ,  $d\sigma_{\zeta}$  — элемент поверхности  $g(s)$ .

**Доказательство.** Утверждение *i)* по существу является классическим результатом. Поэтому здесь будет лишь изложена схема его проверки.

В силу неравенства Фридрикса и варианта одномерного неравенства Харди

$$\int_1^{\infty} r \left| \frac{dY}{dr}(r) \right|^2 dr \geq \text{const} \int_1^{\infty} r^{-1} |\log r|^{-2} |Y(r)|^2 dr, \quad (2.9)$$

справедливого для функций  $Y$ , обращающихся в нуль в точке  $r=1$ , получаем, что интеграл Дирихле является скалярным произведением в

пространстве периодических по  $\zeta_3$  функций, которые обращаются в нуль на  $g(s)$  и обладают конечной «весовой» нормой:

$$\left( \int_{Q(s)} \{ |\nabla_{\zeta} w(\zeta, s)|^2 + |\eta|^{-2} (1 + |\log |\eta||)^{-2} |w(\zeta, s)|^2 \} d\zeta \right)^{1/2}.$$

Поэтому существование обобщенного решения задачи (2.3)—(2.5) устанавливается при помощи известной методики (см. [16, 17]). Далее, локальные коэрцитивные оценки решения задачи Дирихле (см., например, [17, 18]) позволяют заключить, что  $w \in C^\infty(Q(s))$ . Тем самым задача (2.3)—(2.5) сводится к такой же задаче в области  $\{ \zeta \in \mathbb{R}^3 : |\zeta_3| < \pi, |\eta| > R \}$ . (При достаточно большом  $R$  это множество содержится в  $Q(s)$ , и в качестве данных Дирихле на границе кругового отверстия необходимо взять след функции  $w$ .) Полное асимптотическое представление решения  $w$  указанной задачи (а как следствие, и формула (2.6)) выводится при помощи метода Фурье разложением в ряд по функциям:

$$\begin{aligned} & \cos(k\zeta_3) \cos(j\theta) K_j(kr), \quad \cos(k\zeta_3) \sin(j\theta) K_j(kr), \\ & \sin(k\zeta_3) \cos(j\theta) K_j(kr), \quad \sin(k\zeta_3) \sin(j\theta) K_j(kr). \end{aligned}$$

Здесь  $j, k=0, 1, \dots$ ;  $(r, \theta)$  — полярные координаты, отвечающие переменным  $\eta$ ;  $K_j$  — функция Макдональда.

Обратимся к утверждению *ii*). Решение  $e$  ищется в виде суммы  $\log|\eta|^{-1} + e_0(\zeta, s)$ , где  $e_0$  — ограниченное решение задачи (2.3)—(2.5) с правой частью  $\varphi(\zeta, s) = \log|\eta|$ . (Так как логарифм — бесконечно большая величина при  $|\eta| \rightarrow \infty$ , то согласно пункту *i*)  $e$  — нетривиальное решение.) Разложение (2.7) вытекает из соотношения (2.6) для  $e_0$ . С целью проверить (2.8) воспользуемся методом В. Г. Мазыи — Б. А. Пламеневского [19]. Подставив в формулу Грина

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi_R(s)} \{ e(\zeta, s) \Delta_{\zeta} w(\zeta, s) - w(\zeta, s) \Delta_{\zeta} e(\zeta, s) \} d\zeta = \\ & = \int_{g(s) \cup \Sigma_R} \left\{ e(\zeta, s) \frac{\partial w}{\partial n_{\zeta}}(\zeta, s) - w(\zeta, s) \frac{\partial e}{\partial n_{\zeta}}(\zeta, s) \right\} d\sigma_{\zeta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\Xi_R(s) = \{ \zeta \in Q(s) : |\eta| < R \}$ ,  $\Sigma_R = \{ \zeta \in Q(s) : |\eta| = R \}$ , а  $R$  столь велико, что  $g(s) \subset \Xi_R(s)$  асимптотики (2.6) и (2.7), преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{g(s)} w(\zeta, s) \frac{\partial e}{\partial n_{\zeta}}(\zeta, s) d\sigma_{\zeta} = \int_{\Sigma_R} \left\{ e(\zeta, s) \frac{\partial w}{\partial n_{\zeta}}(\zeta, s) - w(\zeta, s) \frac{\partial e}{\partial n_{\zeta}}(\zeta, s) \right\} d\sigma_{\zeta} = \\ & = \int_{\Sigma_R} \left\{ \frac{1}{R} c(s; \varphi) + o(1) \right\} d\sigma_{\zeta} = 4\pi^2 c(s; \varphi) + o(1). \end{aligned}$$

Остается перейти к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

Отметим, что некоторые оценки на бесконечности решений эллиптических систем, подчиненных условиям периодичности, получены в [20].

Следствие 1. Справедливы равенства

$$c(s; 1) = 1, \quad c(s; \log |\eta|) = \kappa(s).$$

Замечание 2. Асимптотическая формула (2.7) подобна разложению

$$E(y) = \log |y|^{-1} + \kappa_\omega + O(|y|^{-1}) \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty$$

решения  $E$  однородной внешней задачи Дирихле для ограниченной области  $\omega$  на плоскости. Величина  $\exp(\kappa_\omega)$  называется логарифмической емкостью или внешним конформным радиусом множества (см. [21, 22]). По аналогии далее будем называть величину  $c_{\log}(G(s)) = \exp(\kappa(s))$  приведенной логарифмической емкостью сечений множества  $G(s)$ .

3°. **Предельная** ( $\varepsilon=0$ ) **задача**. Если в (1.2)–(1.4) формально положить  $\varepsilon=0$ , то получим краевую задачу в области  $\Omega$ :

$$-\Delta_x v(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.1)$$

Ее гладкое решение задается равенством

$$v(x) = \int_{\Omega} G(x; \xi) f(\xi) d\xi, \quad (3.2)$$

где  $G(x; \xi)$  — функция Грина,

$$G(x; \xi) = (4\pi |x - \xi|)^{-1} + G_0(x; \xi), \quad (3.3)$$

$G_0$  — ее регулярная часть (отрицательная в  $\bar{\Omega}$  функция).

Решение (3.2), удовлетворяя уравнениям (1.2) и (1.3), оставляет невязку в краевом условии (1.4), которая представима в виде

$$-v(0, s) + O(\varepsilon). \quad (3.4)$$

(Здесь и далее для сокращения формул будем сохранять за функцией, записанной на множестве  $\mathcal{V}_d$  в координатах  $(y, s)$ , прежнее обозначение.)

Главную часть невязки (3.4) следует компенсировать при помощи решения типа пограничного слоя. Однако, как показывают теорема 1 и следствие 1, это решение не обладает существенным свойством погранслоя — оно не исчезает на бесконечности.

Как и в работах [8, 11], изменим вид основного приближения к решению  $u$  вдали от  $\omega_\varepsilon$ . Именно, будем искать его в виде суммы

$$v(x) + V(\gamma; x) \quad (3.5)$$

функции (3.2) и решения задачи

$$-\Delta_x V(\gamma; x) = \gamma(s) \delta(y), \quad x \in \Omega; \quad V(\gamma; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.6)$$

отвечающей распределенной с некоторой плотностью  $\gamma \in C^\infty(M)$  функцией Дирака  $\delta$  на контуре  $M$ . Решение задачи (3.6) вычисляется следующим образом:

$$V(\gamma; x) = \int_M \gamma(\tau) G(x; (0, \tau)) d\tau, \quad (3.7)$$

где  $(0, \tau)$  — криволинейные координаты точки  $\xi \in M$ . Найдем асимптотику функции (3.7) при  $|y| \rightarrow 0$ . Имеем

$$V(\gamma; x) = \frac{\gamma(s)}{4\pi} \int_M \frac{d\tau}{|x - \xi|} + \frac{1}{4\pi} \int_M (\gamma(\tau) - \gamma(s)) \frac{d\tau}{|x - \xi|} + \int_M \gamma(\tau) G_0(x; (\tau, 0)) d\tau. \quad (3.8)$$

Обозначим расстояние в  $\mathbf{R}^3$  между точками  $(0, s)$  и  $(0, \tau)$  на контуре  $M$  через  $\rho(s, \tau)$ . При малом  $\rho(s, \tau)$  для величины  $|x - \xi|$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} |x - \xi| &= k(s)^{-1} (k(s)^2 y_2^2 + (1 + k(s) y_1)^2 + 1 - \\ &- 2(1 + k(s) y_1) \cos [k(s) (\tau - s)]^{1/2} + O(\rho(s, \tau)^2 + |y|^2) = \\ &= (|y|^2 + 4 \sin^2 [(\tau - s)/2])^{1/2} + O(\rho(s, \tau)^2 + |y|^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Два последних интеграла в правой части (3.8) непрерывно зависят от  $y$ . Рассмотрим первый интеграл. Согласно (3.9) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(s)}{4\pi} \int_M \frac{d\tau}{|x - \xi|} &= \frac{\gamma(s)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( |y|^2 + 4 \sin^2 \left[ \frac{1}{2} (\tau - s) \right] \right)^{-1/2} d\tau + \\ &+ \frac{\gamma(s)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \rho(s, \tau)^{-1} - \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\tau - s}{2} \right|^{-1} \right) d\tau + O(|y|). \end{aligned} \quad (3.10)$$

*З а м е ч а н и е 3.* Подынтегральная функция во втором слагаемом справа в (3.10) не имеет особенности при  $\tau = s$ ; более того, при каждом  $s$  она принадлежит  $C^\infty(M)$ . Члены, обладающие сингулярностью при  $|y| \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow s$ , собраны в первом интеграле. Можно было бы использовать и другое представление для  $\int_M |x - \xi|^{-1} d\tau$ , но именно указанное разбиение удобно при рассмотрении конкретного примера в п. 6°.

Множитель при  $\gamma(s)$  во втором слагаемом из правой части (3.10) обозначим  $(2\pi)^{-1} t(s)$ . Первый интеграл по промежутку  $[0, 2\pi]$  в (3.10) равен

$$\int_0^{2\pi} (|y|^2 + 2 - 2 \cos \tau)^{-1/2} d\tau = 4d(y)^{1/2} K(d(y))$$

(см. [23, формула 3.674.I]), где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $d(y) = 1 - |y|(1 + |y|^2/4)^{1/2} + |y|^2/2$ . Поэтому, используя асимптотическое представление 8.113.3 для  $K$  из цитированного справочника, находим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left( |y|^2 + 4 \sin^2 \left[ \frac{\tau - s}{2} \right] \right)^{-1/2} d\tau &= 2\sqrt{d(y)} \log \frac{16}{1 - d(y)^2} + \\ &+ o(1 - d(y)^2) = 2 \log(8|y|^{-1}) + O(|y|). \end{aligned}$$

Окончательно соотношение (3.10) переписывается в виде

$$\frac{\gamma(s)}{4\pi} \int_M \frac{d\tau}{|x - \xi|} = \frac{\gamma(s)}{2\pi} \left( \log \frac{8}{|y|} + t(s) \right) + O(|y|). \quad (3.11)$$



Итак, согласно (3.8) и (3.11) асимптотика функции (3.7) при  $|y| \rightarrow 0$  имеет вид

$$2\pi V(\gamma; x) = (\log(8|y|^{-1}) + t(s))\gamma(s) + \mathfrak{S}\gamma(s) + \mathfrak{R}\gamma(s) + O(|y|), \quad (3.12)$$

где  $\mathfrak{S}$  и  $\mathfrak{R}$  — интегральные операторы;

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\gamma(s) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\gamma(\tau) - \gamma(s)) \rho(s, \tau)^{-1} d\tau, \\ \mathfrak{R}\gamma(s) &= 2\pi \int_0^{2\pi} \gamma(\tau) G_0((0, s); (0, \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

4°. **Интегральное уравнение на  $M$ .** В силу (3.4) и (3.12) невязку суммы (3.5) в краевом условии (1.4) можно записать следующим образом:

$$\{(2\pi)^{-1} [(\log(8\epsilon^{-1}|\eta|^{-1}) + t(s))\gamma(s) + \mathfrak{S}\gamma(s) + \mathfrak{R}\gamma(s)] + v(0, s)\} + O(\epsilon). \quad (4.1)$$

Обозначим выделенное в фигурные скобки выражение из (4.1) через  $-\varphi(\zeta, s)$ . Найдем неизвестную плотность  $\gamma$  в задаче (3.6) из условия

$$c(s; \varphi) = 0 \quad (4.2)$$

убывания пограничного слоя  $\omega$ , удовлетворяющего задаче (2.3) — (2.5). Учитывая следствие 1, преобразуем (4.2) к виду

$$(\log 8\epsilon^{-1} - \kappa(s) + t(s))\gamma(s) + \mathfrak{S}\gamma(s) + \mathfrak{R}\gamma(s) = -2\pi v(0, s). \quad (4.3)$$

Изучим интегральное уравнение (4.3).

**Л е м м а 1.** *Справедливы равенства*

$$\mathfrak{S}_0 h_{\pm k}(s) = -\mu_k h_{\pm k}(s), \quad k=0, 1, \dots, \quad (4.4)$$

где  $h_p(s) = \pi^{-1/2} \exp(ips)$  при  $p = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $h_0(s) = (2\pi)^{-1/2}$ ,

$$\mathfrak{S}_0 \gamma(s) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma(\tau) - \gamma(s)) d\tau}{|\sin[(\tau-s)/2]|}, \quad \mu_k = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+2j}. \quad (4.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Очевидно,

$$\mathfrak{S}_0 h_{\pm k}(s) = \frac{1}{4} h_{\pm k}(s) \int_0^{2\pi} \frac{\exp(\pm ik\theta) - 1}{\sin(\theta/2)} d\theta.$$

Остается заметить, что

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(\pm ik\theta)}{\sin(\theta/2)} d\theta = \pm \frac{i}{4} \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^{2\pi} \exp\left(\pm i\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta\right) d\theta = -2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+2j}.$$

**Л е м м а 2.** *Имеет место соотношение*

$$\mu_k = \log k + 2 \log 2 + c + o(1) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \quad (4.6)$$

где  $c$  — постоянная Эйлера.

Доказательство формулы (4.6) вытекает из равенства  $\mu_k = 2S(2k) - S(k)$ , в котором (см. 8.367.2 [23])

$$S(n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \log n + c + o(1).$$

Лемма 3. Собственные числа  $\lambda_k$  оператора

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R} + (t - \kappa) \mathbf{1} \quad (4.7)$$

вещественны и образуют последовательность, стремящуюся к  $-\infty$ .

Доказательство. Квадратичная форма

$$-\langle \mathfrak{S}_0 \gamma, \gamma \rangle = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma(s) - \gamma(\tau)|^2 \left| \sin \frac{\tau - s}{2} \right|^{-1} ds d\tau,$$

отвечающая оператору  $-\mathfrak{S}_0$ , неотрицательно определена. Можно проверить (см. [12, 9]), что пространство  $H$ , определенное как пополнение  $C^\infty(M)$  по норме  $\langle \gamma - \mathfrak{S}_0 \gamma, \gamma \rangle$ , компактно вкладывается в  $L_2(M)$ . Поэтому оператор  $\mathfrak{S}_0$  с областью определения  $H$  имеет дискретный спектр, сгущающийся к  $-\infty$  (в лемме 1 эти собственные числа  $\mu_k$  и собственные функции  $h_{\pm k}$  указаны явно). Разность  $\mathfrak{L} - \mathfrak{S}_0$  представляется как сумма оператора умножения на функцию из  $C^\infty(M)$  и интегрального оператора с гладким симметричным ядром. Значит, последовательность  $\{\lambda_k\}$  собственных чисел  $\mathfrak{L}$  обладает указанными свойствами. Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает, что уравнение (4.3) разрешимо не при всех правых частях, если  $\varepsilon$  таково, что  $\log 8\varepsilon^{-1} + \lambda_k = 0$ . Таким образом, для бесконечно малой последовательности  $\{8 \exp \lambda_k\}$  значений параметра  $\varepsilon$  искомую плотность  $\gamma$  непосредственно из (4.3) определить не удастся. Воспользуемся тем, что для построения асимптотики решения задачи (1.2)–(1.4) необходимо лишь построить приближенное решение  $\gamma$ , удовлетворяющее равенству (4.3) с погрешностью  $O(\varepsilon)$ .

Используя лемму 1, находим представление оператора  $\mathfrak{S}_0$ :

$$\mathfrak{S}_0 \gamma = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k \langle h_k, \gamma \rangle h_k$$

(см. (4.5)), где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $L_2(M)$ . Заменим в (4.3) оператор  $\mathfrak{S}_0$  его конечномерной аппроксимацией:

$$\mathfrak{S}_0^\varepsilon = - \sum_{|k| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}} \mu_k \langle h_k, \cdot \rangle h_k \quad (4.8)$$

и рассмотрим новое уравнение

$$(\log 8\varepsilon^{-1} - \kappa(s) + t(s)) \gamma(s) + \mathfrak{S}_0^\varepsilon \gamma(s) + (\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{R}) \gamma(s) = -2\pi v(0, s). \quad (4.9)$$

Покажем, что решение уравнения (4.9) существует и оставляет в соотношении (4.3) невязку  $O(\varepsilon)$ .

Обратный к оператору  $\mathfrak{A}_\varepsilon = \mathfrak{S}_0^\varepsilon + 1 \log 8\varepsilon^{-1}$  имеет вид

$$\mathfrak{A}_\varepsilon^{-1} g(s) = \sum_{|k| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\langle g, h_k \rangle}{\log 8\varepsilon^{-1} - \mu_k} h_k(s) + \sum_{|k| > 1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\langle g, h_k \rangle}{\log 8\varepsilon^{-1}} h_k(s). \quad (4.10)$$

Согласно лемме 2 при  $|k| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$  и достаточно малом  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство

$$\left| \log \frac{8}{\varepsilon} - \mu_k \right| \geq \left| \log \frac{\varepsilon}{k} + 5 \log 2 \right| > \frac{1}{3} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\|\mathfrak{A}_\varepsilon^{-1}; L_2(M) \rightarrow L_2(M)\| \leq \text{const} |\log \varepsilon|^{-1}.$$

Операторы (4.10) и  $d^2/ds^2$  коммутируют, и, значит, при любом  $m=0, 1, \dots$

$$\|\mathfrak{A}_\varepsilon^{-1}; W_2^m(M) \rightarrow W_2^m(M)\| \leq \text{const} |\log \varepsilon|^{-1}.$$

Так как разность  $\mathfrak{L} - \mathfrak{S}_0$  непрерывна в  $W_2^m(M)$ , то окончательно получаем, что уравнение (4.9) однозначно разрешимо, а для обратного  $\mathfrak{K}_\varepsilon$  к оператору  $\mathfrak{A}_\varepsilon + \mathfrak{L} - \mathfrak{S}_0$  справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{K}_\varepsilon; W_2^m(M) \rightarrow W_2^m(M)\| \leq \text{const} |\log \varepsilon|^{-1}. \quad (4.11)$$

Остается оценить невязку функции

$$\gamma = -2\pi \mathfrak{K}_\varepsilon v|_M \quad (4.12)$$

в уравнении (4.3). Она равна

$$(\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_0^\varepsilon) \gamma(s) = - \sum_{|k| > 1/\sqrt{\varepsilon}} \mu_k \langle h_k, \gamma \rangle h_k(s)$$

и допускает оценку

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_0^\varepsilon) \gamma; W_2^m(M)\|^2 &\leq c \sum_{|k| > 1/\sqrt{\varepsilon}} \mu_k^2 \left\{ \langle h_k, \frac{d^m \gamma}{ds^m} \rangle^2 + \langle h_k, \gamma \rangle^2 \right\} \leq \\ &\leq C \sum_{|k| > 1/\sqrt{\varepsilon}} k^{4n} \mu_k^2 \left\{ \langle h_k, \frac{d^{m+2n} \gamma}{ds^{m+2n}} \rangle^2 + \langle h_k, \frac{d^{2n} \gamma}{ds^{2n}} \rangle^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (4.6) выводим, что

$$\|(\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_0^\varepsilon) \gamma; W_2^m(M)\| \leq c \varepsilon^n |\log \varepsilon| \|\gamma; W_2^{m+2n}(M)\|. \quad (4.13)$$

Собирая соотношения (4.11)—(4.13), имеем

$$\|(\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_0^\varepsilon) \gamma; W_2^m(M)\| \leq c \varepsilon^n \|v; W_2^{m+2n}(M)\|. \quad (4.14)$$

Итак, доказана

**Теорема 2.** *Функция (4.12), решение уравнения (4.9), удовлетворяет равенству (4.9) с погрешностью  $(\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_0^\varepsilon) \gamma$ , допускающей оценку (4.14).*

**Замечание 4.** Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$  — неубывающая последовательность собственных чисел оператора (4.7), взятых с учетом кратностей, а  $H_k$  — последовательность отвечающих им ортонормированных в  $L_2(M)$  собственных функций (см. лемму 3). Обозначим через  $b_k$  коэффициенты разложения функции  $s \rightarrow v(0, s)$  в ряд по системе  $\{H_k\}_{k=0}^\infty$ . Так как эта функция принадлежит  $C^\infty(M)$ , то  $b_k = O(k^{-n})$  при  $k \rightarrow +\infty$ .

для любого натурального  $n$  (см. [24]). Поэтому другое приближенное решение уравнения (4.3) доставляет формула

$$\gamma^0(s) = -2\pi \sum_{|k| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}} (\log 8\varepsilon^{-1} + \lambda_k)^{-1} b_k H_k(s). \quad (4.15)$$

Невязка решения (4.15) (как решения (4.12)) в соотношении (4.3) убывает сверхстепенным образом при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**5°. Асимптотика решения и ее обоснование.** Учитывая сказанное в предыдущих разделах, главный член асимптотики решения  $u$  задачи (1.2)–(1.4) представим в виде суммы

$$U(\varepsilon, x) = v(x) + V(\gamma; x) + \chi(x) (2\pi)^{-1} \gamma(s) \{e_0(\varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}s, s) - \kappa(s)\}. \quad (5.1)$$

Здесь  $v$  — решение (3.2) задачи (3.1);  $V$  — решение (3.7) задачи (3.6), определенное по плотности  $\gamma$ , заданной формулой (4.12);  $e_0(\zeta, s) = e(\zeta, s) + \log|\eta|$ ,  $e$  — решение однородной задачи (2.3)–(2.5), указанное в пункте *ii*) теоремы 1, а  $\kappa(s)$  — постоянная в его асимптотике;  $C_0^\infty(\mathcal{V}_d) \ni \chi$  — срезающая функция, равная единице в окрестности контура  $M$ .

**Теорема 3.** *Справедливо неравенство*

$$\max_{x \in \bar{\Omega}_\varepsilon} |u(\varepsilon, x) - U(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon |\log \varepsilon|, \quad (5.2)$$

в котором  $u$  — решение задачи (1.2)–(1.4),  $U$  — функция (5.1),  $C$  — не зависящая от  $\varepsilon$  постоянная.

**Доказательство.** Разность  $Z = u - U$  удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} -\Delta_x Z(\varepsilon, x) &= \mathcal{F}(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad Z(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \\ Z(\varepsilon, x) &= \Phi(\varepsilon, x), \quad x \in \partial\omega_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Собирая соотношения (3.3), (3.12), (4.9) (4.14) и (2.7), получаем, что

$$\Phi(\varepsilon, x) = O(\varepsilon), \quad x \in \partial\omega_\varepsilon. \quad (5.4)$$

Так как  $V$  — гармоническая функция в  $\Omega_\varepsilon$ , а  $v$  удовлетворяет уравнению  $-\Delta_x v = f$  в  $\Omega_\varepsilon$ , то с учетом представления (2.1) оператора Лапласа в координатах  $(y, s)$  выводим из (2.2), (2.3) формулы

$$\text{supp } \mathcal{F} \subset \mathcal{V}_d,$$

$$|\mathcal{F}(\varepsilon, x)| \leq c_1(\varepsilon + \varepsilon^2 |y|^{-2} + \varepsilon |y|^{-1}) \leq c_2 \varepsilon |y|^{-1}, \quad x \in \mathcal{V}_d \setminus \omega_\varepsilon. \quad (5.5)$$

Представим  $Z$  в виде суммы  $Z_1 + Z_2$  решений задач

$$\begin{aligned} -\Delta_x Z_1(\varepsilon, x) &= 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad Z_1(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \\ Z_1(\varepsilon, x) &= \Phi(\varepsilon, x), \quad x \in \partial\omega_\varepsilon; \\ -\Delta_x Z_2(\varepsilon, x) &= \mathcal{F}(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad Z_2(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

Принцип максимума и соотношение (5.4) приводят к неравенству

$$\max_{x \in \bar{\Omega}_\varepsilon} |Z_1(\varepsilon, x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} |Z_1(\varepsilon, x)| \leq c_3 \varepsilon.$$

Кроме того, из оценки  $|G_\varepsilon(x; \xi)| \leq (4\pi|x-\xi|)^{-1}$  функции Грина (см. (3.3)) и из (5.5) вытекает, что

$$|Z_2(\varepsilon, \xi)| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(x; \xi) \mathcal{F}(\varepsilon, x) dx \right| \leq c_4 \varepsilon \int_M \int_{B_d^2(0)} |x-\xi|^{-1} |y|^{-1} ds dy, \quad (5.6)$$

Пусть, как и ранее,  $(y, s)$  и  $(z, \tau)$  — координаты точек  $x$  и  $\xi$  из окрестности  $\mathcal{V}_d$  контура  $M$  во введенной в п. 1° криволинейной системе координат. Если  $|z| \geq d/2$ , то из (5.6) получаем оценку  $|Z_2(\varepsilon, \xi)| \leq c_5 \varepsilon$ . Если же  $|z| < d/2$ , то последний интеграл в (5.6) не превосходит

$$c_6 \varepsilon \int_M \int_{B_d^2(0)} \frac{|y|^{-1} d\tau dy}{|y-z| + |\tau-s|} \leq c_7 \varepsilon \int_{B_d^2(0)} (1 + |\log |y-z||) |y|^{-1} dy. \quad (5.7)$$

Интеграл по кругу  $B_d^2(0)$  из (5.7) представим в виде суммы  $I_1 + I_2$  интегралов по множествам  $B_d^2(0) \cap \{y : |y-z| \leq |z|/2\}$  и  $B_d^2(0) \setminus \{y : |y-z| \leq |z|/2\}$ . Ясно, что

$$I_1 < \int_{B_{|z|/2}^2(z)} (1 + |\log |\xi||) \frac{d\xi}{|z+\xi|} \leq C_8 \int_0^{|z|/2} (1 + |\log r|) \frac{r dr}{|z|-r} \leq c_9,$$

$$I_2 \leq c_{10} |\log |z|| \int_{B_d^2(0)} |y|^{-1} dy \leq c_{11} |\log |z|| \leq c_{12} |\log \varepsilon|.$$

Приведенные оценки для  $Z_1$  и  $Z_3$  дают искомое неравенство (5.2). Теорема доказана.

*Замечание 5. При оправдании асимптотики вместо принципа максимума можно использовать энергетическую оценку*

$$\|R; W_2^1(\Omega_\varepsilon)\| + \| |y|^{-1} (1 + |\log |y||)^{-1} R, L_2(\mathcal{V}_d \setminus \omega_\varepsilon) \| \leq$$

$$\leq \text{const} \{ \|\Delta_x R; L_2(\Omega_\varepsilon \setminus \mathcal{V}_d)\| + \| |y| (1 + |\log |y||) \Delta_x R; L_2(\mathcal{V}_d \setminus \omega_\varepsilon) \|,$$

*справедливую для функций  $R$ , обращающихся в нуль на  $\partial\Omega_\varepsilon$ . (Указанное соотношение выводится, например, из неравенства Харди (2.9).) В результате, устраняя, как обычно, неоднородность в краевом условии для  $Z$  на  $\partial\omega_\varepsilon$ , получаем следующую оценку разности решения задачи (1.2) — (1.4) и построенного приближения (5.1):*

$$\|u - U; W_2^1(\Omega_\varepsilon)\| + \| |y|^{-1} (1 + |\log |y||)^{-1} (u - U); L_2(\mathcal{V}_d \setminus \omega_\varepsilon) \| \leq$$

$$\leq \text{const } \varepsilon |\log \varepsilon|^3;$$

**6°. Асимптотика емкости и тензора поляризации тонкого торообразного множества.** Приведем один из возможных примеров вычисления асимптотики. Пусть  $M$  — единичная окружность  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ . Криволинейные координаты  $(y, s)$  находятся по цилиндрическим координатам  $(r, \theta, z)$  с осью  $Ox_3$  при помощи формул

$$y_1 = r - 1, \quad y_2 = z, \quad s = \theta. \quad (6.1)$$

Предположим, что тонкое множество  $\omega_\varepsilon$  имеет периодически изменяющееся сечение, т. е. в (1.1) область  $\omega(s, \varepsilon^{-1}s)$  не зависит от медленной

переменной  $s \in S^1$ . Введем область  $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \omega_\varepsilon$  и рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta_x u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad u(\varepsilon, x) = \psi(\eta, \varepsilon^{-1}s, s), \quad x \in \partial\omega_\varepsilon, \quad (6.2)$$

подчинив ее решение естественным условиям (1.5) убывания на бесконечности.

Найдем асимптотические (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) представления классических характеристик множества  $\omega_\varepsilon$ : гармонической емкости  $\text{cap}(\omega_\varepsilon)$  и матрицы  $P(\omega_\varepsilon) = \|P_{jk}(\omega_\varepsilon)\|_{j,k=1}^3$ , ассоциированной с тензором поляризации (см., например, книгу [21]). Указанные величины определяются как коэффициенты в разложениях на бесконечности

$$u_0(\varepsilon, x) = \frac{1}{|x|} \text{cap}(\omega_\varepsilon) + \sum_{j=1}^3 p_j(\omega_\varepsilon) \frac{x_j}{|x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right),$$

$$u_k(\varepsilon, x) = \frac{1}{|x|} p_k(\omega_\varepsilon) + \sum_{j=1}^3 P_{jk}(\omega_\varepsilon) \frac{x_j}{|x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right), \quad k=1, 2, 3, \quad (6.3)$$

решений  $u_q$ ,  $q=0, 1, 2, 3$ , задачи (6.2) с правыми частями

$$\psi_0(\eta, \varepsilon^{-1}s, s) = 1, \quad \psi_k(\eta, \varepsilon^{-1}s, s) = x_k, \quad k=1, 2, 3. \quad (6.4)$$

*З а м е ч а н и е 6. Справедливы интегральные представления*

$$\text{cap}(\omega_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R^3(0)} u_0(\varepsilon, x) d\sigma_x, \quad p_j(\omega_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R^3(0)} u_j(\varepsilon, x) d\sigma_x,$$

$$P_{jk}(\omega_\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R^3(0)} u_j(\varepsilon, x) x_k d\sigma_x, \quad (6.5)$$

где  $j, k=1, 2, 3$ ;  $B_R^3(0)$  — шар достаточно большого радиуса  $R$ .

Согласно изложенному в предыдущих разделах асимптотику решений  $u_q$  ищем в виде

$$U_q(\varepsilon, x) = V(\gamma_k; x) + \chi(x) W_k(\varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}s, s), \quad (6.6)$$

где  $V(\gamma_k; x)$  — величины, которые находятся по плотностям  $\gamma_q$  при помощи формулы (3.7);  $W_k$  — функции типа пограничного слоя, являющиеся решениями задач (2.3) — (2.5) с некоторыми правыми частями  $\varphi_k$ . Для того чтобы определить интегральное уравнение для  $\gamma_k$ , вычислим главную часть сужения функции  $V$  на  $\partial\omega_\varepsilon$ . Поскольку при  $\Omega = \mathbb{R}^3$  в равенстве (3.3)  $G_0 = 0$ , а при  $M = S^1$  в (3.11), (3.13)  $t=0$ ,  $\mathfrak{K} = 0$  и  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$  (см. (4.5)), то в силу (4.1) величина (6.6) на  $\partial\omega_\varepsilon$  есть

$$(2\pi)^{-1} [\gamma_q(s) \log(8\varepsilon^{-1} |\eta|^{-1}) + \mathfrak{S}_0 \gamma_q(s)] + \varphi_q(s) + O(\varepsilon).$$

Так как  $\varphi_q(\zeta, s) = \Psi_q(s) + O(\varepsilon)$ , где

$$\Psi_0(s) = 1, \quad \Psi_1(s) = \cos s, \quad \Psi_2(s) = \sin s, \quad \Psi_3(s) = 0,$$

то с учетом равенства  $\kappa(s) = \kappa$  (см. (2.7) и (2.10)) получаем выражение для  $\varphi_q$ :

$$\varphi_q(s) = (2\pi)^{-1} (\log |\eta| - \kappa) \gamma_q(s),$$

и интегральное уравнение для  $\gamma_q$ :

$$(\log 8\varepsilon^{-1} - \kappa) \gamma_q(s) + \mathfrak{E}_0 \gamma_q(s) = 2\pi \Psi_q(s), \quad s \in S^1. \quad (6.7)$$

Используя лемму 1, решаем уравнение (6.7):

$$\gamma_0(s) = \frac{2\pi}{\log 8\varepsilon^{-1} - \kappa}, \quad \gamma_1(s) = \frac{2\pi \cos s}{\log 8\varepsilon^{-1} - \kappa - 2}, \quad \gamma_2(s) = \frac{2\pi \sin s}{\log 8\varepsilon^{-1} - \kappa - 2}, \quad \gamma_3(s) = 0. \quad (6.8)$$

Наконец, теорема 1 дает убывающий пограничный слой:

$$W_q(\zeta, s) = (2\pi)^{-1} (e_0(\zeta) - \kappa) \gamma_q(s). \quad (6.9)$$

Дословным повторением рассуждений, приведенных в п. 5°, получается

**Т е о р е м а 4.** *Имеют место неравенства*

$$\max_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega_\varepsilon} |u_q(\varepsilon, x) - U_q(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon |\log \varepsilon|, \quad q=0, 1, 2, 3, \quad (6.10)$$

в которых  $u_q$  — решения задач (6.2), (1.5) с правыми частями (6.4);  $U_q$  — функции (6.6); величины  $V(\gamma_q; x)$  вычисляются по плотностям (6.8) при помощи формулы (3.7);  $W_q$  — решения (6.9) типа пограничного слоя.

**Т е о р е м а 5.** *Для коэффициентов в разложениях (6.3) на бесконечности решений  $u_q$  (для гармонической емкости и компонент матрицы, ассоциированной с тензором поляризации) справедливы асимптотические формулы*

$$\text{cap}(\omega_\varepsilon) = \pi [\log(8/\varepsilon c_{\log}(G))]^{-1} + O(\varepsilon |\log \varepsilon|),$$

$$P_{jj}(\omega_\varepsilon) = \pi [2 \log(8/\varepsilon c_{\log}(G)) - 4]^{-1} + O(\varepsilon |\log \varepsilon|), \quad j=1, 2, \quad (6.11)$$

(неуказанные в (6.11) величины имеют порядок  $O(\varepsilon |\log \varepsilon|)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Здесь  $c_{\log}(G)$  — приведенная логарифмическая емкость сечений множества  $G$  (см. замечание 2).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Представления (6.5) и неравенства (6.10) показывают, что коэффициенты в разложениях (6.3) решений  $u_q$  и соответствующие коэффициенты в аналогичных разложениях построенных приближений  $U_q$  отличаются на величины  $O(\varepsilon |\log \varepsilon|)$ . Так как в (6.6) слагаемое типа пограничного слоя обладает компактным носителем, то согласно (3.7) при больших значениях  $|x|$  выполняется соотношение

$$U_q(\varepsilon, x) = \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\gamma_q(\tau) d\tau}{\sqrt{|x|^2 - 2(x_1 \cos \tau + x_3 \sin \tau) + 1}} = \frac{1}{4\pi |x|} \int_M \gamma_q(\tau) d\tau + \frac{1}{4\pi |x|^3} \left\{ x_1 \int_M \gamma_q(\tau) \cos \tau d\tau + x_3 \int_M \gamma_q(\tau) \sin \tau d\tau \right\} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right). \quad (6.12)$$

Остается подставить в (6.12) значения (6.8) плотностей  $\gamma_q$  и вспомнить сказанное в замечании 2. Теорема доказана.

**7°. Асимптотика решения смешанной краевой задачи.** Пусть  $\Omega$ ,  $\omega_\varepsilon$  и  $\Omega_\varepsilon$  — множества, введенные в п. 1°. Рассмотрим смешанную краевую

задачу для уравнения Пуассона (1.2): на  $\partial\Omega$  зададим условия Дирихле (1.3), а на  $\partial\omega_\varepsilon$  — условия Неймана

$$(\partial u / \partial n_x)(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon. \quad (7.1)$$

Здесь  $n_x$  — внешняя (по отношению к  $\Omega_\varepsilon$ ) нормаль к  $\partial\omega_\varepsilon$ .

Основные отличия в построении асимптотики решения задачи (1.2), (1.3), (7.1) связаны с другими (по сравнению со случаем данных Дирихле на  $\partial\omega_\varepsilon$ ) свойствами пограничного слоя. Именно, он описывается при помощи решений краевой задачи, составленной из уравнения Лапласа (2.3), условий периодичности (2.4) и граничного условия

$$(\partial\omega / \partial n_\zeta)(\zeta, s) = \varphi(\zeta, s), \quad \zeta \in g(s), \quad (7.2)$$

(Функция  $(\zeta, s) \rightarrow \varphi(\zeta, s)$  — гладкая и  $2\pi$ -периодическая по  $\zeta_3$  и  $s$ .)

**Теорема 6.** *i) Существует единственное решение  $\omega$  задачи (2.3), (2.4), (7.2), обладающее асимптотикой*

$$\omega(\zeta, s) = \frac{1}{2\pi} c_0(s; \varphi) \log |y| + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 c_j(s; \varphi) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} + O\left(\frac{1}{|\eta|^2}\right). \quad (7.3)$$

*ii) Однородная задача (2.3), (2.4), (7.2) имеет в классе функций, допускающих оценку  $O(|\eta|)$ , в точности три линейно независимых решения  $e^{(k)}$ :*

$$e^{(0)} = 1, \quad e^{(j)}(\zeta, s) = \eta_j + \sum_{q=1}^2 \mu_{jq}(G(s)) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} + O\left(\frac{1}{|\eta|^2}\right), \quad j=1, 2. \quad (7.4)$$

Коэффициенты  $c_k(s; \varphi)$  в асимптотике (7.3) вычисляются по формулам

$$c_k(s; \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{g(s)} e^{(k)}(\zeta, s) \varphi(\zeta, s) d\sigma_\zeta. \quad (7.5)$$

Доказательство в существенном повторяет схему, изложенную в п. 2° при проверке утверждений теоремы 1 (кроме того, см. теорему 7). Поэтому здесь будут установлены лишь равенства (7.5). Подставив в формулу Грина (2.10) вместо  $e$  одну из функций  $e^{(k)}$  и воспользовавшись асимптотиками (7.3) и (7.4), находим, что

$$\begin{aligned} \int_{g(s)} e^{(k)}(\zeta, s) \frac{\partial\omega}{\partial n_\zeta}(\zeta, s) d\sigma_\zeta &= \int_{\Sigma_R} \left\{ \omega(\zeta, s) \frac{\partial e^{(k)}}{\partial n_\zeta}(\zeta, s) - e^{(k)}(\zeta, s) \frac{\partial\omega}{\partial n_\zeta}(\zeta, s) \right\} d\sigma_\zeta = \\ &= \sum_{q=0}^2 I_q^{(k)} c_q(s; \varphi) + o(1) \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь для  $j, p=1, 2$

$$\begin{aligned} I_0^{(0)} &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{S^1} \frac{d \log r}{dr} \Big|_{r=R} d\theta d\zeta_3, \quad I_j^{(0)} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{S^1} \frac{\eta_j}{R^2} d\theta d\zeta_3, \\ I_0^{(p)} &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{S^1} \frac{\eta_p}{R} \left(1 + \log \frac{1}{R}\right) d\theta d\zeta_3, \quad I_j^{(p)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{S^1} \eta_j \eta_p d\theta d\zeta_3. \end{aligned}$$



Ясно, что  $I_k^{(k)} = 2\pi$  при  $k=0, 1, 2$ ,  $I_2^{(1)} = I_1^{(2)} = 0$  и  $I_0^{(j)} = 0$  при  $j=1, 2$ . Остается перейти к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Равенства (7.5), а вместе с ними и теорема 7 доказаны.

**З а м е ч а н и е 7.** Представления для функции  $e_0^{(j)} = e^{(j)} - \eta_j$

$$e_0^{(j)}(\zeta, s) = \sum_{q=1}^2 \mu_{jq}(G(s)) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} + O\left(\frac{1}{|\eta|^2}\right), \quad j=1, 2, \quad (7.6)$$

(см. (7.4)) подобны разложениям

$$E^{(j)}(\zeta, s) = \sum_{q=1}^2 m_{jq}(\omega) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} + O\left(\frac{1}{|\eta|^2}\right), \quad j=1, 2,$$

гармонических в  $R^2 \setminus \omega$  функций  $E^{(j)}$ , подчиненных на границе  $\partial\omega$  плоской области  $\omega$  условиям  $\partial E^{(j)}/\partial n_\zeta = -\partial \eta_j / \partial n_\zeta$ . Матрица  $m(\omega) = \|m_{jk}(\omega)\|_{j,k=1}^2$  содержит коэффициенты дипольной формы, ассоциированной с матрицей  $2\pi t(\omega) - \mathbf{1} \operatorname{mes}_2(\omega)$  виртуальной (присоединенной) массы (см. книгу [21]). По аналогии матрицу  $2\pi \mu(G(s)) - (\mathbf{1}) = (2\pi)^{-1} \operatorname{mes}_3(G(s)) \mathbf{1}$  назовем матрицей приведенной виртуальной массы сечений множества  $G(s)$  (отметим, что множитель при единичной матрице  $\mathbf{1}$  совпадает со средней площадью сечений области  $G(s)$ ).

**Л е м м а 4.** Матрица  $\mu(G(s))$  и матрица приведенной виртуальной массы сечений множества  $G(s)$  симметричны и положительно определены.

**Доказательство.** В силу формул (7.3), (7.5) имеем

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \mu_{jk}(G(s)) &= \int_{g(s)} e^{(k)}(\zeta, s) \frac{\partial e_0^{(j)}}{\partial n_\zeta}(\zeta, s) d\sigma_\zeta = - \int_{g(s)} \eta_k \frac{\partial \eta_j}{\partial n_\zeta}(\zeta, s) d\sigma_\zeta + \\ &+ \int_{g(s)} e_0^{(k)}(\zeta, s) \frac{\partial e_0^{(j)}}{\partial n_\zeta}(\zeta, s) d\sigma_\zeta = \int_{G(s)} \nabla_\zeta \eta_k \cdot \nabla_\zeta \eta_j d\zeta + \\ &+ \int_{Q(s)} \nabla_\zeta e_0^{(k)}(\zeta, s) \cdot \nabla_\zeta e_0^{(j)}(\zeta, s) d\zeta = \delta_{j,k} \operatorname{mes}_3(G(s)) + \{e_0^{(k)}, e_0^{(j)}\}. \end{aligned}$$

где  $\delta_{j,k}$  — символ Кронекера. Таким образом, матрица  $4\pi^2 \mu(G(s)) - \operatorname{mes}_3(G(s)) \mathbf{1}$  совпадает с матрицей Грама, построенной по скалярному произведению  $\{\cdot, \cdot\}$  линейно независимым функциям  $e_0^{(1)}$  и  $e_0^{(2)}$ . Лемма доказана.

Вернемся к обсуждению алгоритма построения асимптотики решения и смешанной краевой задачи (1.2), (1.3), (7.1). Как показывает теорема 6, задача о пограничном слое не имеет, вообще говоря, даже ограниченного решения и разрешима лишь в классе функций с логарифмическим ростом на бесконечности. Такие растущие функции не удовлетворяют основному требованию, накладываемому обычно на погранслой, — убыванию на бесконечности. Однако далее, может быть несколько вольно, будем все же называть их пограничным слоем.

Важным обстоятельством, позволяющим найти асимптотическое разложение  $u(\varepsilon, x)$ , является тот факт, что оператор краевой задачи (2.3), (2.4), (7.2) аннулирует константу. Поэтому невязка, оставлен-

ная в краевом условии (7.2) функцией  $v$ , определенной из первой предельной задачи (3.1), имеет порядок  $O(\varepsilon)$  и компенсируется величиной  $\varepsilon\omega_1(\zeta, s)$ . «Лишний» множитель  $\varepsilon$  в погранслое делает логарифмический рост функции  $\omega_1$  несущественным, поскольку соответствующая погрешность в уравнении (1.2) есть величина  $O(\varepsilon|\log \varepsilon|)$ . Такая невязка компенсируется при помощи решения  $\varepsilon v_1(x, \log \varepsilon)$  первой предельной задачи (отметим, что зависимость величины  $v_1$  от  $\log \varepsilon$  — линейная). Затем отыскивается пограничный слой  $\varepsilon^2\omega_2(\zeta, s, \log \varepsilon)$  и следующее решение  $\varepsilon^2 v_2(x, \log \varepsilon)$  задачи Дирихле в области  $\Omega$ . Далее процедура повторяется и в основном совпадает с итерационными процессами построения асимптотики решения краевой задачи в области с вырезанной гладкой трубкой (см. литературу, приведенную во введении к статье). Все отличия и осложнения, вызванные периодичностью изменения сечения, множества  $\omega_\varepsilon$ , уже выявлены в п. 2°—5°. Поэтому полный алгоритм вычисления асимптотики решения задачи (1.2), (1.3), (7.1) здесь опускается; мы ограничиваемся лишь рассмотрением в следующем разделе конкретного примера. (Читатель, интересующийся полным асимптотическим рядом для решения последней задачи, может обратиться к гл. 4 книги [14], где аналогичная задача исследована в случае гладкой трубки.)

8°. Асимптотика тензора виртуальной массы тонкого торообразного множества. Пусть  $\omega_\varepsilon$  и  $\Omega_\varepsilon$  — те же области, что и в п. 6°. Рассмотрим внешнюю задачу Неймана

$$-\Delta_x u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad (\partial u / \partial n_x)(\varepsilon, x) = \psi(\varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}s, s), \quad x \in \partial\omega_\varepsilon, \quad (8.1)$$

подчинив ее решение естественным условиям (1.5) убывания на бесконечности.

Найдем асимптотические (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) представления классической характеристики множества  $\omega_\varepsilon$ : матрицы  $\mathcal{M}(\omega_\varepsilon) = \|\mathcal{M}_{jk}(\omega_\varepsilon)\|_{j,k=1}^3$ , ассоциированной с тензором виртуальной массы (см., например, книгу [21]). Элементы этой матрицы определяются как коэффициенты в разложениях на бесконечности:

$$u_k(\varepsilon, x) = - \sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{jk}(\omega_\varepsilon) \frac{x_j}{|x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right), \quad k=1, 2, 3, \quad (8.2)$$

решений  $u_k$  задачи (8.1) с правыми частями

$$\psi_k(\eta, \varepsilon^{-1}s, s) = \partial x_k / \partial n_x, \quad k=1, 2, 3. \quad (8.3)$$

З а м е ч а н и е 8. Справедливы формулы

$$4\pi \mathcal{M}_{jk}(\omega_\varepsilon) = \delta_{j,k} \text{mes}_3(\omega_\varepsilon) + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x u_k(\varepsilon, x) \cdot \nabla_x u_j(\varepsilon, x) dx, \quad (8.4)$$

которые вытекают из цепочки равенств

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x u_k(\varepsilon, x) \cdot \nabla_x u_j(\varepsilon, x) dx + \int_{\omega_\varepsilon} \nabla_x x_k \cdot \nabla_x x_j dx = \\ & = \int_{\partial\omega_\varepsilon} (u_k(\varepsilon, x) - x_k) \frac{\partial u_j}{\partial n_x}(\varepsilon, x) d\sigma_x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R^3(0)} \left\{ u_j(\varepsilon, x) \frac{\partial}{\partial n_x} (u_k(\varepsilon, x) - x_k) - (u_k(\varepsilon, x) - x_k) \frac{\partial u_j}{\partial n_x}(\varepsilon, x) \right\} d\sigma_x = \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{q=1}^3 \mathcal{M}_{jq}(\omega_\varepsilon) \int_{\partial B_R^3(0)} 3|x|^{-4} x_k x_q d\sigma_x + o(1) \right\} = 4\pi \mathcal{M}_{jk}(\omega_\varepsilon)
 \end{aligned}$$

(ср. с замечанием 7). Из (8.4), в частности, следует, что матрица  $\mathcal{M}(\omega_\varepsilon)$  — симметричная и положительно определенная.

Согласно сказанному в предыдущем разделе асимптотику решений  $u_k$  задачи (8.1), (1.5) с правыми частями (8.3) ищем в виде ряда

$$u_k(\varepsilon, x) = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q \{v_q^{(k)}(x, \log \varepsilon) + \chi(x) \omega_q^{(k)}(\varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}s, s, \log \varepsilon)\} \quad (8.5)$$

с полиномиально зависящими от  $\log \varepsilon$  коэффициентами. Определим несколько первых членов ряда (8.5). В силу (6.1) справедливы равенства

$$x_1 = (1 + y_1) \cos s, \quad x_2 = (1 + y_1) \sin s, \quad x_3 = y_2. \quad (8.6)$$

Кроме того, производная по нормали  $\partial_{\omega_\varepsilon}$  от величины  $W(\zeta, s)$  вычисляется по формуле

$$\frac{\partial W}{\partial n_x} = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ v_1 \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \frac{\varepsilon W}{1 + \varepsilon \xi_1} \right) + v_2 \frac{\partial W}{\partial \xi_2} + \frac{v_3}{(1 + \varepsilon \xi_1)^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_3} + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial s} \right) \right\}, \quad (8.7)$$

где  $v_j$  — направляющие косинусы нормали  $n_\zeta$ .

Обратимся сначала к более простому случаю  $k=3$ . Совместя (8.6) и (8.7), заключаем, что функция  $w_1^{(3)}$  в (8.5) является решением задачи (2.3), (2.4), (7.2) с правой частью  $\varphi(\zeta) = v_2(\zeta)$ . В замечании 7 и лемме 4 это решение обозначалось  $-e_0^{(2)}(\zeta)$ ; его разложение на бесконечности совпадает с выражением из правой части (7.6), взятым со знаком минус. Так как  $w_1^{(3)}(\zeta) = -e_0^{(2)}(\zeta) = O(|\eta|^{-2})$ , то  $v_1^{(3)}(x) = 0$ . С целью определить  $w_2^{(3)}$  и  $v_2^{(3)}$  запишем оператор Лапласа  $\Delta_x$  в координатах  $(\zeta, s)$  и разложим его в ряд по степеням  $\varepsilon$ . В силу (6.1)

$$\Delta_x = \Delta_y + (1 + y_1)^{-1} \partial / \partial y_1 + (1 + y_1)^{-2} \partial^2 / \partial s^2$$

и, следовательно,

$$\Delta_x W(\zeta, s) = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_\zeta W(\zeta, s) + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 2\xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{\partial}{\partial s} \right\} W(\zeta, s) + O(1). \quad (8.8)$$

Таким образом, учитывая (8.7) и (8.8), получаем, что функцию необходимо подчинить уравнениям

$$\begin{aligned}
 \Delta_\zeta w_2^{(3)}(\zeta) &= (\partial / \partial \xi_1 - 2\xi_1 \partial^2 / \partial \xi_3^2) e_0^{(2)}(\zeta), \quad \zeta \in Q; \\
 (\partial w_2^{(3)} / \partial n_\zeta)(\zeta) &= v_1(\zeta) e_0^{(2)}(\zeta) - 2v_3(\zeta) \xi_1 (\partial e_0^{(2)} / \partial \xi_3)(\zeta), \quad \zeta \in g,
 \end{aligned} \quad (8.9)$$

и условиям периодичности (2.4). Обозначим правые части равенств (8.9) через  $F$  и  $\Phi$  соответственно. Справедливо представление

$$F(\zeta) = |\eta|^{-2} \mu_{21}(G) - 2\eta_1 |\eta|^{-4} \sum_{j=1}^2 \mu_{1j}(G) \eta_j + F_1(\zeta), \quad (8.10)$$

$$\partial_{\zeta}^{\alpha} F_1(\zeta) = O(|\eta|^{-3-|\alpha'|}).$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $|\alpha'| = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Теорема 7. Существует решение  $\omega_2^{(3)}$  задачи (8.9), имеющее при  $|\eta| \rightarrow \infty$  асимптотику

$$\omega_2^{(3)}(\zeta) = (2|\eta|)^{-2} \{ \mu_{21}(G) (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \mu_{22}(G) \eta_1 \eta_2 \} + W_1(\zeta), \quad (8.11)$$

$$\partial_{\zeta}^{\alpha} W_1(\zeta) = O(|\eta|^{\delta-1-|\alpha'|}), \quad (8.12)$$

где  $\delta$  — произвольное положительное число. Всякое другое ограниченное решение есть сумма указанного и постоянной функции.

Доказательство. Положим  $F = F - F_1$ ,  $W = \omega_2^{(3)} - W_1$  (см. (8.11)). Прямые вычисления показывают, что  $\Delta_{\zeta} W = F$ . Поэтому достаточно установить существование решения уравнений

$$\Delta_{\zeta} W_1(\zeta) = F_1(\zeta), \quad \zeta \in Q; \quad (\partial W_1 / \partial n_{\zeta})(\zeta) = \Phi_1(\zeta) \equiv \Phi(\zeta) - (\partial W / \partial n_{\zeta})(\zeta), \quad \zeta \in g, \quad (8.13)$$

подчиненного условиям периодичности (2.4) и соотношению (8.12).

Отметим сначала, что

$$\begin{aligned} \int_Q F_1(\zeta) d\zeta &= \int_Q \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left( e_0^{(2)}(\zeta) - \sum_{j=1}^2 m_{2j}(G) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} \right) - 2\zeta_1 \frac{\partial^2 e_0^{(2)}}{\partial \zeta_3^2}(\zeta) \right\} d\zeta = \\ &= \int_g \left\{ v_1(\zeta) \left( e_0^{(2)}(\zeta) - \sum_{j=1}^2 m_{2j}(G) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} \right) - 2\zeta_1 v_3(\zeta) \frac{\partial e_0^{(2)}}{\partial \zeta_3}(\zeta) \right\} d\sigma_{\zeta} = \\ &= \int_g \Phi_1(\zeta) d\sigma_{\zeta} + \int_g \left( \frac{\partial W}{\partial n_{\zeta}}(\zeta) - v_1(\zeta) \sum_{j=1}^2 m_{2j}(G) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} \right) d\sigma_{\zeta}. \end{aligned}$$

Согласно определению функции  $W$

$$\begin{aligned} \int_g \left( \frac{\partial W}{\partial n_{\zeta}}(\zeta) - v_1(\zeta) \sum_{j=1}^2 m_{2j}(G) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} \right) d\sigma_{\zeta} &= \\ = - \int_g \left\{ \Delta_{\zeta} W(\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \sum_{j=1}^2 m_{2j}(G) \frac{\eta_j}{|\eta|^2} \right\} d\zeta &= 0 \end{aligned}$$

(интеграл по  $G$  понимается как несобственный) и, следовательно, правые части уравнений (8.13) удовлетворяют равенству

$$\int_Q F_1(\zeta) d\zeta = \int_g \Phi_1(\zeta) d\sigma_{\zeta}. \quad (8.14)$$

Проверим теперь существование ограниченного решения задачи (8.13), (2.4). Обозначим через  $H$  пространство функций в  $Q$ , для которых выполнены условия периодичности (2.4) и конечно выражение

$$\|\omega; H\| = \left( \int_Q \{ |\nabla_{\xi} \omega(\xi)|^2 + |\eta|^{-2} (1 + |\log |\eta||)^{-2} |\omega(\xi)|^2 \} d\xi \right)^{1/2},$$

являющееся нормой  $\omega$  в  $H$ . Пусть еще  $H^0$  — подпространство  $H$ , составленное из функций, имеющих нулевое среднее на  $g$ . Ясно, что для любой функции  $\omega \in H$  найдется такая постоянная  $c_\omega$ , что  $\omega - c_\omega \in H^0$ . Кроме того, из неравенств Пуанкаре и Харди (см. (2.9), где следует положить  $r = |\eta|$ ) вытекает, что выражение

$$\{\omega, z\} = \int_Q \nabla_{\xi} \omega(\xi) \cdot \nabla_{\xi} z(\xi) d\xi$$

есть одно из возможных скалярных произведений в  $H^0$ .

Определим обобщенное решение  $W_1$  задачи (8.13), (2.4) как элемент пространства  $H^0$ , удовлетворяющий при любой пробной функции  $z \in H$  интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla_{\xi} W_1(\xi) \cdot \nabla_{\xi} z(\xi) d\xi = \int_g \Phi_1(\xi) z(\xi) d\sigma_{\xi} - \int_Q F_1(\xi) z(\xi) d\xi. \quad (8.15)$$

Ясно, что правая часть (8.15) является значением на  $z$  линейного непрерывного функционала  $X$  в  $H$ . Согласно (8.14) справедливо равенство  $X(z) = X(z + \text{const})$ , и, значит,  $X$  можно считать линейным функционалом на фактор-пространстве  $H/\{1\}$ , которое изоморфно  $H^0$ . Теперь из теоремы Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве вытекает тождество  $\{W_1, z\} = X(z) = \{\mathcal{X}, z\}$ , где  $X \in H^0$ , т. е. искомое обобщенное решение  $W_1 = \mathcal{X}$  построено. Отметим, что в силу гладкости и периодичности  $F_1$  и  $\Phi_1$  обобщенное решение  $W_1$  принадлежит  $C^\infty(\bar{Q})$  и  $2\pi$ -периодично по переменной  $\xi_3$  (см. [17, 18]).

Для того чтобы установить оценку (8.12) на бесконечности, введем при  $|\eta| > R$  функции

$$\mathfrak{W}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_1(\eta, \xi_3) d\xi_3, \quad \mathfrak{F}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\eta, \xi_3) d\xi_3, \quad (8.16)$$

для которых справедливы соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R^2(0)} \{ |\nabla_n \mathfrak{W}(\eta)|^2 + |\eta|^{-2} (1 + |\log |\eta||)^{-2} |\mathfrak{W}(\eta)|^2 \} d\eta < \infty,$$

$$\partial_n^{\alpha'} \mathfrak{F}(\eta) = O(|\eta|^{-3-|\alpha'|}). \quad (8.17)$$

Здесь  $R$  настолько велико, что  $|\eta| < R$  для всех точек  $(\eta, \xi_3)$  из множества  $G$ . Интегрируя уравнение Пуассона из задачи (8.12) по  $\xi_3$  в пределах от 0 до  $2\pi$  и используя условие периодичности, получаем равенство

$$\Delta_n \mathfrak{W}(\eta) = \mathfrak{F}(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R^2(0). \quad (8.18)$$

Используя результаты теории [25, 19] общих эллиптических краевых задач в областях с коническими (угловыми) точками и рассматри-

вая бесконечно удаленную точку как вершину полного угла, из (8.17) и (8.18), выводим, что

$$\partial^{\alpha'} (\mathfrak{W}(\eta) - C) = O(|\eta|^{\delta-1-|\alpha'|}) \text{ при } |\eta| > 2R. \quad (8.19)$$

Для завершения доказательства теоремы 7 осталось установить, что для разности  $\mathfrak{W}_1 = W_1 - \mathfrak{W}$  имеет место соотношение (8.12). При этом, так как существенно лишь поведение  $\mathfrak{W}_1$  на бесконечности, можно считать, что  $\mathfrak{W}_1(\zeta) = 0$  при  $|\eta| < 3R/2$ . Введем функцию  $\rho_\beta$ :  $\rho_\beta(t) = (1 + \tau t^2)^\beta$  при  $t \leq D$  и  $\rho_\beta(t) = (1 + \tau D^2)^\beta$  при  $t \geq D$ , где  $\tau$  и  $D$  — положительные числа. Умножим уравнение  $\Delta_\zeta \mathfrak{W}_1(\zeta) = \mathfrak{F}_1(\zeta)$  на  $\rho_\beta(|\eta|) \mathfrak{W}_1(\zeta)$  и проинтегрируем по частям в  $Q$ . (Напомним, что  $\mathfrak{F}_1 = F_1 - \mathfrak{F}$  и по принятому соглашению  $\mathfrak{F}_1(\zeta) = 0$  при  $|\eta| < 3R/2$ .) В результате получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\nabla_\zeta \mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta = & - \int_Q \rho_\beta(|\eta|) \mathfrak{F}_1(\zeta) \mathfrak{W}_1(\zeta) d\zeta - \\ & - \tau \beta \int_{\{\zeta \in Q: |\eta| \leq D\}} \rho_\beta(|\eta|) (1 + \tau |\eta|^2)^{-1} \mathfrak{W}_1(\zeta) \sum_{j=1}^2 \eta_j \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \eta_j}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Поскольку среднее функции  $\zeta_3 \rightarrow \mathfrak{W}_1(\eta, \zeta_3)$  по промежутку  $(0, 2\pi)$  есть нуль, то, интегрируя по  $\eta \in \mathbb{R}^2$  неравенство Пуанкаре

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \zeta_3}(\eta, \zeta_3) \right|^2 d\zeta_3 \geq \int_0^{2\pi} |\mathfrak{W}_1(\eta, \zeta_3)|^2 d\zeta_3,$$

умноженное на  $\rho_\beta(|\eta|)$ , находим, что

$$\int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\nabla_\zeta \mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta \geq \int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Обозначим интегралы справа в (8.20) через  $I_1$  и  $I_2$  соответственно. Так как  $\tau t(1 + \tau t^2)^{-1} \leq \sqrt{\tau}$ , то

$$I_2^2 \leq c\tau \int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\nabla_\eta \mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta \int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Кроме того,

$$I_1^2 \leq \int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta \int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\mathfrak{F}_1(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Совмещая перечисленные соотношения, заключаем, что при достаточно малом  $\tau$  выполняется оценка

$$\int_Q \rho_\beta(|\eta|) \{ |\nabla_\zeta \mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 + |\mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 \} d\zeta \leq C \int_Q \rho_\beta(|\eta|) |\mathfrak{F}_1(\zeta)|^2 d\zeta, \quad (8.21)$$

в которой постоянная  $C$  не зависит от  $D$  и  $\mathfrak{W}_1$ . Следовательно, если правая часть (8.21) равномерно по  $D$  ограничена, то таким же свойством обладает и левая часть (8.21). В силу (8.10), (8.16) и (8.17) первое имеет место при  $\beta < 2$ . Поэтому, переходя в (8.21) к пределу при  $D \rightarrow \infty$ , выводим, что

$$\int_Q (1 + |\eta|)^{4-\delta} \{ |\nabla_{\xi} \mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 + |\mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 \} d\zeta < +\infty \text{ при } \delta > 0.$$

Если аналогичные выкладки и рассуждения применить к уравнениям  $\Delta_{\xi} (\partial_{\xi}^{\alpha} \mathfrak{W}_1) = \partial_{\xi}^{\alpha} \mathfrak{F}_1$ , то, учитывая соотношения  $\partial_{\xi}^{\alpha} \mathfrak{F}_1(\zeta) = O(|\eta|^{-3-|\alpha'|})$ , приходим к неравенствам

$$\int_Q (1 + |\eta|)^{4-\delta+2|\alpha'|} |\partial_{\xi}^{\alpha} \mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta < +\infty, \tag{8.22}$$

в которых  $\delta$  — любое положительное число, а  $\alpha$  — произвольный мультииндекс.

Оценим теперь модули функции  $\mathfrak{W}_1$  и ее производных, воспользовавшись теоремами вложения пространств Соболева в  $C$ . С этой целью введем множества

$$\mathfrak{D}'_k = \{ \zeta \in Q : 2^{-k} |\eta| \in [1, 2] \}, \quad \mathfrak{D}_k = \{ \zeta \in \mathbb{R}^3 : 2^{-k} |\eta| \in [1, 2] \}, \\ \zeta_3 \in [0, 2^{k+1} \pi \}$$

и функцию  $\mathfrak{B}_k(\eta, \zeta_3) = \mathfrak{W}_1(2^k \eta, \zeta_3)$ , заданную на  $\mathfrak{D}'_k$ . (Так как  $\mathfrak{W}_1$  —  $2\pi$ -периодическая по  $\zeta_3$  функция, то  $\mathfrak{B}_k$  можно считать определенной на  $\mathfrak{D}_k$ .) Имеем

$$\begin{aligned} +\infty &> \sum_{|\alpha| \leq l+2} \int_{\mathfrak{D}'_k} |\eta|^{4-\delta+2|\alpha'|} |\partial_{\xi}^{\alpha} \mathfrak{W}_1(\zeta)|^2 d\zeta = \\ &= 2^{k(7-\delta)} \sum_{|\alpha| \leq l+2} \int_{\mathfrak{D}'_k} |\xi|^{4-\delta+2|\alpha'|} |\partial_{(\xi, \zeta_3)}^{\alpha} \mathfrak{B}_k(\xi, \zeta_3)|^2 d\xi d\zeta_3 = \\ &= 2^{k(6-\delta)} \sum_{|\alpha| \leq l+2} \int_{\mathfrak{D}_k} |\xi|^{4-\delta+2|\alpha'|} |\partial_{(\xi, \zeta_3)}^{\alpha} \mathfrak{B}_k(\xi, \zeta_3)|^2 d\xi d\zeta_3 \geq \\ &\geq c 2^{k(6-\delta)} \| \mathfrak{B}_k; W_2^{l+2}(\mathfrak{D}_k) \|^2 \geq C 2^{k(6-\delta)} \| \mathfrak{B}_k; C^l(\mathfrak{D}_k) \|. \end{aligned}$$

Поскольку в  $\mathfrak{D}_k$  справедливо соотношение  $|\eta| < 2^{k+1}$ , то из последнего неравенства вытекает, что  $\partial_{\xi}^{\alpha} \mathfrak{W}_1(\zeta) = O(|\eta|^{-3+\delta/2})$ . Отсюда с учетом (8.19) получаем искомую оценку (8.12) для  $W_1$ . Теорема доказана.

Вернемся к построению асимптотики решения  $u_3$  задачи (8.1), (1.5) с правой частью (8.3),  $k=3$ . В силу разложений (7.6) и (8.11) сумма  $\varepsilon \chi(x) \omega_1^{(3)}(\zeta) + \varepsilon^2 \chi(x) \omega_2^{(3)}(\zeta)$  функций типа пограничного слоя вносит в уравнение Лапласа в  $\Omega_{\varepsilon}$  невязку порядка  $O(\varepsilon^2)$ , и, значит, коэффициент  $v_2^{(3)}$  ряда (8.5) отличен от нуля. Для того чтобы вычислить правую часть уравнения, которому удовлетворяет  $v_2^{(3)}$ , воспользуемся процедурой перераспределения невязок, предложенной в [26, 27] (подробное ее изложение для общих сингулярно возмущенных эллиптических задач см. в [12, 11], а применительно к простым примерам — во введении к книге [12] и в § 3, 4 [28]). С целью пояснить необходимость ее применения рассмотрим невязку, оставленную пограничным слоем в уравнении Лапласа.

Оператор Лапласа, записанный в координатах  $\zeta$ , расщепляется в следующий ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\Delta_x = \Delta_y + \frac{1}{1+y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{(1+y_1)^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k L_k \left( \zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$$

(в (8.8) указаны два первых члена этого ряда). Операторы  $L_k \left( \zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$  имеют вторые порядки, а их коэффициенты являются полиномами от  $\zeta_1$ , причем степени этих полиномов растут с увеличением номера  $k$ . Тем самым выражения  $L_k \left( \zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \omega_j^{(3)}(\zeta)$ ,  $j=1, 2$ , непригодны в качестве правых частей для задач, из которых определяются старшие члены  $\omega_p^{(3)}$ ,  $p=3, 4, \dots$ , пограничного слоя, поскольку в противном случае величины  $\omega_p^{(3)}(\zeta)$  имели бы недопустимый степенной рост при  $|\eta| \rightarrow \infty$ .

Теорема 7 подсказывает, что функции  $\omega_p^{(3)}$  обладают разве что логарифмическим ростом на бесконечности (напомним, что он разрешается; см. п. 7°) в том случае, если правые части соответствующих уравнений Пуассона ведут себя при  $|\eta| \rightarrow \infty$  как  $O(|\eta|^{-2} |\log|\eta||^m)$ . С другой стороны, величины порядка  $O(|y|^{k-1} |\log|y||^m)$  при  $|y| \rightarrow 0$  при  $k=0, 1, \dots$  можно взять в качестве правых частей для уравнения Пуассона в  $\mathbf{R}^3$ , служащего для вычисления решения  $v_p^{(3)}$  гладкого типа. Действительно, указанные особенности не приводят к появлению на  $M$  сингулярностей функций  $v_p^{(3)}$ , которые попадают в пространство  $\mathbf{C}^{0,2}(\mathbf{R}^3)$  при любом  $\beta \in (0, 1)$ .

Роль упоминавшейся процедуры и заключается в отщеплении из возникающих невязок членов, имеющих недопустимый рост при  $|\eta| \rightarrow \infty$ , в переходе к другим координатам (от  $\zeta$  к  $(y, s)$ ) и в учете их при решении передельной задачи, отвечающей этим координатам (уравнения в  $\mathbf{R}^3$  для  $v_2^{(3)}$ ). Реализуя эту процедуру и повторяя с очевидными изменениями рассуждения, приведенные в [14] на с. 76—84, получаем в результате следующее уравнение для  $v_2^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_x v_2^{(3)}(x) = & \left\{ [\Delta_x, \chi(x)] + \chi(x) \left( \Delta_x - \Delta_y - \frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \right\} \times \\ & \times \sum_{q=1}^2 \mu_{2j}(G) \frac{y_j}{|y|^2} + \{ [\Delta_x, \chi(x)] + \chi(x) (\Delta_x - \Delta_y) \} \times \\ & \times \{ (2|y|)^{-2} (2\mu_{22}(G) y_1 y_2 - \mu_{21}(G) (y_1^2 - y_2^2)) \}, \quad x \in \mathbf{R}^3, \end{aligned} \quad (8.23)$$

(ср. с формулами (4.4.50) и (4.4.68),  $k=2$ , из [14]), где  $[A, B] = AB - BA$  — коммутатор операторов  $A$  и  $B$ .

**З а м е ч а н и е 9.** Правая часть уравнения (8.23) имеет компактный носитель и является величиной порядка  $O(|y|^{-1})$  при  $|y| \rightarrow 0$ .

**Л е м м а 5.** Существует единственное исчезающее на бесконечности непрерывное решение уравнения (8.23). Для него справедливо представление

$$v_2^{(3)}(x) = -\pi \mu_{22}(G) x_3 |x|^{-3} + O(|x|^{-3}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Первое утверждение непосредственно выводится из замечания 9 при помощи результатов работ [25, 19]. Отсюда же следует представление



$$v_2^{(j)}(x) = c_0^{(j)} |x|^{-1} \sum_{q=1}^3 c_q^{(j)} x_q |x|^{-3} + O(|x|^{-3}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (8.24)$$

где  $j=3$ . Вычислим постоянные  $c_q^{(3)}$ , воспользовавшись методом [19]. Обозначим правую часть уравнения (8.23) через  $\mathfrak{H}$ . Имеем

$$\begin{aligned} c_q^{(3)} &= \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R^3(0)} \left\{ v_2^{(3)}(x) \frac{\partial x_q}{\partial n_x} - x_q \frac{\partial v_2^{(3)}(x)}{\partial n_x} \right\} d\sigma_x = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{B_R^3(0)} x_q \Delta_x v_2^{(3)}(x) dx = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} x_q \mathfrak{H}(x) dx \end{aligned} \quad (8.25)$$

(ср. с замечанием 8). Аналогично устанавливается, что

$$c_0^{(3)} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \mathfrak{H}(x) dx. \quad (8.26)$$

Пусть, как и ранее,  $\mathcal{U}_\tau^\circ$  —  $\tau$ -окрестность контура  $M$ . Вне  $\mathcal{U}_\tau^\circ$  при любом  $\tau > 0$  функция  $\mathfrak{H}$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}(x) &= \Delta_x \left( \chi(x) \left\{ \sum_{j=1}^2 \mu_{2j}(G) \frac{y_j}{|y|^2} + \mu_{22}(G) \frac{y_1 y_2}{2|y|^2} - \mu_{21}(G) \frac{y_1^2 - y_2^2}{4|y|^2} \right\} \right) + \\ &+ \chi(x) \left( \Delta_y \left( \mu_{22}(G) \frac{y_1 y_2}{2|y|^2} - \mu_{21}(G) \frac{y_1^2 - y_2^2}{4|y|^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_1} \sum_{j=1}^2 \mu_{2j}(G) \frac{y_j}{|y|^2} \right), \end{aligned} \quad (8.27)$$

причем, как отмечалось в начале доказательства теоремы 7, последний множитель при  $\chi$  есть нуль. Выражение из (8.27), выделенное в фигурные скобки, обозначим  $Y(y)$ . Справедливо соотношение

$$\int_{\mathbf{R}^3} x_j \mathfrak{H}(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{S^1} \int_{B_\tau^2(0) \setminus B_\varepsilon^2(0)} (1 + y_1) x_j \left( \Delta_y + \frac{1}{1 + y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) (\chi(x) Y(y)) dy ds.$$

Поэтому  $c_j^{(3)} = 0$  при  $j=1, 2$ , а при  $j=3$  последний предел равен

$$\begin{aligned} &-2\pi \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left\{ (1 + y_1) y_2 \frac{\partial Y}{\partial r}(y) - (1 + y_1) Y(y) \sin \theta + y_2 Y(y) \cos \theta \right\} \Big|_{r=\tau} d\theta = \\ &= 4\pi \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \theta (\mu_{21}(G) \cos \theta + \mu_{22}(G) \sin \theta) d\theta + o(1) \right\} = 4\pi^2 \mu_{22}(G); \end{aligned}$$

здесь  $(r, \theta)$  — полярные координаты. Таким образом,  $c_3^{(3)} = -\pi \mu_{22}(G)$ .

При помощи аналогичных выкладок можно проверить, что интеграл от  $\mathfrak{H}(x)$  по  $\mathbf{R}^3$  обращается в нуль, т. е.  $c_0^{(3)} = 0$ . Теорема доказана.

9°. Асимптотика тензора виртуальной массы (продолжение). Построим несколько первых членов разложений (8.5) решений  $u_1$  и  $u_2$  за-

дачи (8.1), (1.5) с правыми частями (8.3),  $k=1, 2$ . Из (8.6) и (8.7) вытекает, что

$$\psi_1(\zeta, s) = v_1(\zeta) \cos s - v_3(\zeta) \sin s + \varepsilon (v_1(\zeta) \cos s + \zeta_1 v_3(\zeta) \sin s) + O(\varepsilon^2), \quad (9.1)$$

$$\psi_2(\zeta, s) = v_1(\zeta) \sin s + v_3(\zeta) \cos s + \varepsilon (v_1(\zeta) \sin s - \zeta_1 v_3(\zeta) \cos s) + O(\varepsilon^2).$$

Обозначим множители при  $\varepsilon^p$  в (9.1) через  $\psi_j^{(p)}(\zeta, s)$ . Разложения (9.1) функций (8.3) показывают, что  $\omega_1^{(j)}$  — решения задач (2.3), (2.4), (7.2) с правыми частями  $\psi_j^{(0)}$ , и, значит,

$$\omega_1^{(1)}(\zeta, s) = -e_0^{(1)}(\zeta) \cos s - \mathfrak{E}(\zeta) \sin s, \quad \omega_1^{(2)}(\zeta, s) = -e_0^{(1)}(\zeta) \sin s + \mathfrak{E}(\zeta) \cos s. \quad (9.2)$$

Здесь  $e_0^{(1)}$  — функция, введенная в теореме 6 и замечании 7,  $\mathfrak{E}$  — решение задачи

$$\Delta_\zeta \mathfrak{E}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in Q; \quad (\partial \mathfrak{E} / \partial n_\zeta)(\zeta) = v_3(\zeta), \quad \zeta \in g, \quad (9.3)$$

подчиненное условиям периодичности (2.4).

З а м е ч а н и е 10. П о с к о л ь к у

$$\int_g v_3(\zeta) d\sigma_\zeta = \int_{\partial G} v_3(\zeta) d\sigma_\zeta = 0,$$

то согласно теореме 6 существует исчезающее на бесконечности решение задачи (9.3), (2.4) с асимптотикой

$$\mathfrak{E}(\zeta) = (2\pi)^{-1} (\mathfrak{E}_1 \eta_1 + \mathfrak{E}_2 \eta_2) |\eta|^{-2} + O(|\eta|^{-2}), \quad (9.4)$$

где  $\mathfrak{E}_j$  — некоторые постоянные, зависящие лишь от области  $G$ .

В силу формул (7.6), (9.4) и (9.2) величины  $\varepsilon \chi(x) \omega_1^{(j)}(\zeta, s)$  оставляют в уравнении Лапласа невязку порядка  $O(\varepsilon^2)$  и, следовательно,  $v_1^{(j)}(x) = 0$ . Найдем следующий член типа пограничного слоя. Из (8.7), (8.8) и (9.1), (9.2) получаем, что  $\omega_2^{(1)}$  и  $\omega_2^{(2)}$  суть решения краевых задач

$$\Delta_\zeta \omega_2^{(j)}(\zeta, s) = \{2\zeta_1 \partial^2 / \partial \zeta_3^2 - \partial / \partial \zeta_1 - 2\partial^2 / \partial s \partial \zeta_3\} \omega_1^{(j)}(\zeta, s), \quad \zeta \in Q;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_2^{(j)}}{\partial n_\zeta}(\zeta, s) = v_3(\zeta) \left( 2\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_3} - \frac{\partial}{\partial s} \right) \omega_1^{(j)}(\zeta, s) - v_1(\zeta) \omega_1^{(j)}(\zeta, s) + \\ + \psi_j^{(1)}(\zeta, s), \quad \zeta \in g, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где  $j=1, 2$ . Обозначим правые части уравнений (9.5) через  $F^{(j)} - \partial^2 \omega_1^{(j)} / \partial \zeta^2$  и  $\Phi^{(j)} + \psi_j^{(1)}$  соответственно. Асимптотические разложения функций  $F_j$  на бесконечности имеют вид

$$\begin{aligned} F^{(j)}(\zeta, s) = \Lambda_{j1}(s) |\eta|^{-2} - 2\eta_1 |\eta|^{-4} \sum_{q=1}^2 \Lambda_{jq}(s) \eta_j + F_1^{(j)}(\zeta, s), \\ \partial_\zeta^\alpha F_1^{(j)}(\zeta, s) = O(|\eta|^{-3-|\alpha'|}) \end{aligned} \quad (9.6)$$

(см. (9.2) и (7.6), (9.4)), где

$$\Lambda_{1q}(s) = \mu_{1q}(G) \cos s + (2\pi)^{-1} \mathfrak{E}_q \sin s, \quad \Lambda_{2q}(s) = \mu_{1q}(G) \sin s - (2\pi)^{-1} \mathfrak{E}_q \cos s. \quad (9.7)$$

Формулы (8.10) и (9.7) совпадают с точностью до обозначений. Поэтому дословным повторением теоремы 7 получается следующее утверждение.

**Л е м м а 6.** *Существует ограниченное решение  $\mathfrak{B}_1^{(j)}$  задачи*

$$\Delta_{\xi} \mathfrak{B}_1^{(j)}(\zeta, s) = F^{(j)}(\zeta, s), \quad \zeta \in Q; \quad (\partial \mathfrak{B}_1^{(j)} / \partial n_{\xi})(\zeta, s) = \Phi^{(j)}(\zeta, t), \quad \zeta \in g,$$

*подчиненное условиям периодичности (2.4). Оно определено с точностью до аддитивной постоянной, а одно из возможных решений имеет асимптотику*

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1^{(j)}(\zeta, s) &= (2|\eta|)^{-2} (\Lambda_{j1}(s) (\eta_1^2 - \eta_2^2) - 2\Lambda_{j2}(s) \eta_1 \eta_2) + \mathfrak{B}_{1,1}^{(j)}(\zeta, s), \\ \partial_{\xi}^{\alpha} \mathfrak{B}_{1,1}^{(j)}(\zeta, s) &= O(|\eta|^{\delta-1-|\alpha'|}), \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Найдем теперь представление на бесконечности для решения  $\mathfrak{B}_2^{(j)}$  задачи

$$\Delta_{\xi} \mathfrak{B}_2^{(j)}(\zeta, s) = -\frac{\partial^2 \omega_1^{(j)}}{\partial \xi_s \partial s}(\zeta, s), \quad \zeta \in Q; \quad \frac{\partial \mathfrak{B}_2^{(j)}}{\partial n_{\xi}}(\zeta, s) = \psi_j^{(1)}(\zeta, s), \quad \zeta \in g. \quad (9.9)$$

**Л е м м а 7.** *Существует решение задачи (9.9), (2.4) с асимптотикой*

$$\mathfrak{B}_2^{(j)}(\zeta, s) = (2\pi)^{-2} (2\pi \mathfrak{E}_1 a_j(s) + \mathfrak{E}(G) b_j(s)) \log |\eta| + O(|\eta|^{-1}) \text{ при } |\eta| \rightarrow \infty, \quad (9.10)$$

$$-a_1(s) = b_2(s) = \sin s, \quad a_2(s) = b_1(s) = \cos s, \quad \mathfrak{E}(G) = \int_Q |\nabla_{\xi} \mathfrak{E}(\zeta)|^2 d\zeta. \quad (9.11)$$

**Доказательство.** Согласно (9.2) и (7.6), (9.4) для правой части  $F_j$  уравнения в  $Q$  из задачи (9.9) справедливы соотношения

$$\partial_{\xi}^{\alpha} F_j(\zeta, s) = O(|\eta|^{-|\alpha'|-3}), \quad |\eta| \rightarrow \infty.$$

Если бы выполнялось равенство

$$\int_Q F_j(\zeta, s) d\zeta - \int_g \psi_j^{(1)}(\zeta, s) d\sigma_{\xi} = 0, \quad (9.12)$$

то, повторяя часть доказательства теоремы 7, касающуюся разрешимости задачи (8.13), (2.4), можно было бы получить ограниченное решение задачи (9.9), (2.4). Однако условие (9.12), вообще говоря, не имеет места. Для проверки этого факта преобразуем левую часть (9.12) к виду

$$\int_Q F_j(\zeta, s) ds - \int_g \psi_j^{(1)}(\zeta, s) d\sigma_{\xi} = - \int_g \left\{ \psi_j^{(1)}(\zeta, s) + v_3(\zeta) \frac{\partial \omega_1^{(j)}}{\partial s}(\zeta, s) \right\} d\sigma_{\xi}. \quad (9.13)$$

Так как  $\psi_j^{(1)}(\zeta, s) = v_1(\zeta) a_j^0(s) + \xi_1 v_3(\zeta) b_j^0(s)$  (см. (9.1)), то интеграл по  $g$  от  $\psi_j^{(1)}$  есть нуль. Далее, согласно (9.2) заключаем, что

$$-\int_g v_3(\zeta) \frac{\partial \omega_1^{(j)}}{\partial s}(\zeta, s) d\sigma_\zeta = a_j(s) \int_g v_3(\zeta) e_0^{(1)}(\zeta) d\sigma_\zeta + b_j(s) \int_g v_3(\zeta) \mathfrak{E}(\zeta) d\sigma_\zeta. \quad (9.14)$$

В силу теоремы 6 (см. (7.5)) и разложения (9.4) решения  $\mathfrak{E}$  задачи (9.3) получаем равенство

$$\int_g v_3(\zeta) e_0^{(1)}(\zeta) d\sigma_\zeta = \int_g v_3(\zeta) e^{(1)}(\zeta) d\sigma_\zeta - \int_g v_3(\zeta) \zeta_1 d\sigma_\zeta = 2\pi \mathfrak{E}_1 - 0.$$

Кроме того, используя граничное условие из (9.3), находим, что

$$\int_g v_3(\zeta) \mathfrak{E}(\zeta) d\sigma_\zeta = \int_g \mathfrak{E}(\zeta) \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n_\zeta}(\zeta) d\sigma_\zeta = \int_Q |\nabla_\zeta \mathfrak{E}(\zeta)|^2 d\zeta = \mathfrak{G}(G). \quad (9.15)$$

Таким образом, правая часть (9.14) совпадает с величиной  $2\pi \mathfrak{R}_j(s)$ , где

$$\mathfrak{R}_j(s) = \mathfrak{E}_1 a_j(s) + (2\pi)^{-1} \mathfrak{G}(G) b_j(s). \quad (9.16)$$

Она может отличаться от нуля, и тогда соотношение (9.12) нарушается. Однако если заменить правую часть  $\psi_j^{(1)}$  краевого условия в (9.9) на

$$\Psi_j(\zeta, s) = \psi_j^{(1)}(\zeta, s) + \frac{1}{2\pi} \mathfrak{R}_j(s) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \frac{1}{|\eta|}, \quad (9.17)$$

то равенство (9.12) для  $\mathcal{F}_j$  и  $\Psi_j$  будет выполнено, поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int_g \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \frac{1}{|\eta|} d\sigma_\zeta = \int_G \delta(\eta) d\zeta = 2\pi$$

(здесь  $\delta$  — функция Дирака). Поэтому решение задачи (9.9), (2.4) с измененной правой частью в краевом условии убывает на бесконечности как  $O(|\eta|^{-2})$ . Привнесенное слагаемое из (9.17) устраняется решением  $(2\pi)^{-1} \mathfrak{R}_j(s) \log |\eta|$ . Лемма доказана.

Из лемм 6 и 7 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 8.** *Существует решение задачи (9.5), (2.4), для которого при  $|\eta| \rightarrow \infty$  имеет место разложение*

$$\begin{aligned} \omega_2^{(j)}(\zeta, s) = & \frac{1}{2\pi} \mathfrak{R}_j(s) \log |\eta| + \Lambda_{j1}(s) \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{2|\eta|^2} - \Lambda_{j2}(s) \frac{\eta_1 \eta_2}{2|\eta|^2} + \\ & + W_j(\zeta, s), \quad \partial_\zeta^\alpha W_j(\zeta, s) = O(|\eta|^{\delta-1}), \quad \delta > 0, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где  $\mathfrak{R}_j$  и  $\Lambda_{jp}$  определены формулами (9.16) и (9.7). Всякое другое решение, обладающее не более чем логарифмическим ростом при  $|\eta| \rightarrow \infty$ , отличается от указанного на аддитивную постоянную.

Итак, коэффициенты  $\omega_p^{(j)}$  ряда (8.5) при  $j, p=1, 2$  найдены. Определим  $v_2^{(j)}$ . Как и в случае  $j=3$  (см. (8.23)), используя асимптотические представления функций  $\omega_p^{(j)}$  на бесконечности, приходим к следующим уравнениям:

$$\Delta_x v_2^{(j)}(x, \log \varepsilon) = \{[\Delta_x, \chi(x)] + \chi(x)(\Delta_x - \Delta_y)\} \{(2\pi)^{-1} \mathfrak{R}_j(s) \log(\varepsilon |y|^{-1}) +$$

$$\begin{aligned}
& + (2|y|)^{-2} (2y_1 y_2 \Lambda_{j_2}(s) - (y_1^2 - y_2^2) \Lambda_{j_1}(s)) + \\
& + \left\{ [\Delta_x \chi(x)] + \chi(x) \left( \Delta_x - \Delta_y - \frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_1 \frac{\partial}{\partial s} \right) \right\} \sum_{q=1}^2 \Lambda_{j_q}(s) \frac{y_q}{|y|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (9.19)
\end{aligned}$$

правые части которых обозначим,  $\mathfrak{H}_j(x, \log \varepsilon)$ . Ясно, что носители функций  $\mathfrak{H}_j$  компактны, а при  $|y| \rightarrow 0$  справедливы оценки

$$\partial_x^\alpha \mathfrak{H}_j(x) = O((1 + |\log \varepsilon|) |y|^{-1-|\alpha|} (1 + |\log |y||)). \quad (9.20)$$

**Замечание 11.** Новым по сравнению с (8.23) обстоятельством является присутствие в уравнениях (9.19) логарифмов. Оно вызвано наличием логарифмического члена в (9.18). При этом переход от координат  $\eta$  к координатам  $y$  сопровождается появлением зависимости от  $\log \varepsilon$ .

**Лемма 8.** Существуют непрерывные, исчезающие на бесконечности решения  $v_2^{(j)}$  уравнений (9.19). Для них при  $|x| > R$  выполнены асимптотические разложения

$$v_2^{(j)}(x, \log \varepsilon) = - \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{G}(G) + \frac{\pi}{2} \mu_{11}(G) \right) \frac{x_j}{|x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right), \quad j=1, 2. \quad (9.21)$$

**Доказательство.** Применяя результаты работ [25, 19], получаем существование указанных решений и представления (8.24),  $j=1, 2$ . Вычислим константы  $c_p^{(j)}$ ,  $p=0, 1, 2, 3$ .

Как и в лемме 5, для точек  $x$ , расположенных вне окрестности  $\mathcal{Y}^\circ$ , контура  $M$ , имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_j(x) = & \Delta_x \left( \chi(x) \left\{ \sum_{j=1}^2 \Lambda_{j_q}(s) \frac{y_q}{|y|^2} + \Lambda_{j_2}(s) \frac{y_1 y_2}{2|y|^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \Lambda_{j_1}(s) \frac{y_1^2 - y_2^2}{4|y|^2} - (2\pi)^{-1} \mathfrak{R}_j(s) \log(\varepsilon |y|^{-1}) \right\} \right). \quad (9.22)
\end{aligned}$$

Выражение из (9.22), выделенное в фигурные скобки, обозначим  $Y_j(y, s)$ . Учитывая соотношения (8.25) и (8.26), находим, что

$$\begin{aligned}
c_0^{(j)} &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Y}^\circ_\tau} \Delta_x(\chi(x) Y_j(y, s)) dx, \\
c_q^{(j)} &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Y}^\circ_\tau} x_q \Delta_x(\chi(x) Y_j(y, s)) dx, \quad q=1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись методом [19], преобразуем при помощи формулы Грина интегралы по  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Y}^\circ_\tau$  в поверхностные интегралы по  $\partial \mathcal{Y}^\circ_\tau$  и перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . Опуская выкладки, проведенные в аналогичной ситуации в конце раздела 8°, укажем, что в результате получаются следующие равенства:

$$c_0^{(j)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_j(s) ds, \quad c_3^{(j)} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Lambda_{j_2}(s) ds,$$

$$c_1^{(j)} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_j(s) + 2\pi\Lambda_{j1}(s)) \cos s ds,$$

$$c_2^{(j)} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_j(s) + 2\pi\Lambda_{j1}(s)) \sin s ds. \quad (9.23)$$

Подставляя в (9.23) выражения для  $\mathfrak{K}_j$  и  $\Lambda_p$  (см. (9.16), (9.11) и (9.7)), приходим к соотношениям

$$c_0^{(j)} = c_3^{(j)} = 0, \quad c_j^{(j)} = -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{G}(G) - \frac{\pi}{2} \mu_{11}(G), \quad j=1, 2; \quad c_2^{(1)} = c_1^{(2)} = 0,$$

которые вместе с (8.24) дают (9.21). Лемма доказана.

Итак, первые члены асимптотического ряда (8.5) для  $u_j$  построены. Следующая теорема содержит обоснование этой (главной) части асимптотики.

**Теорема 9. Справедливы неравенства**

$$\|\nabla_x \mathcal{R}_j; L_2(\Omega_\varepsilon)\| + \|(1 + |x|)^{-1} \mathcal{R}_j; L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{V}_d)\| + \\ + \||y|^{-1} (1 + |\log |y||)^{-1} \mathcal{R}_j; L_2(\mathcal{V}_d \cap \Omega_\varepsilon)\| \leq \text{const } \varepsilon^{3-\delta}, \quad (9.24)$$

в которых  $\delta > 0$ ;  $j=1, 2, 3$ ; константа не зависит от  $\varepsilon$ ;

$$\mathcal{R}_j(\varepsilon, x) = u_j(\varepsilon, x) - \varepsilon^2 v_2^{(j)}(x, \log \varepsilon) - \varepsilon \chi(x) \{ \omega_2^{(j)}(\varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}s, s) + \\ + \varepsilon \omega_2^{(j)}(\varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}s, s) \};$$

$u_j$  — решения краевой задачи (8.1) с правыми частями (8.3); пограничные слои  $\omega_2^{(j)}$  определяются из задач (8.9), (9.5), а функции  $v_2^{(j)}$  «гладкого типа» — из уравнений (8.23), (9.19).

**Доказательство.** Несложные, но громоздкие выкладки, которые здесь опускаются, показывают, что правые части задач

$$\Delta_x \mathcal{R}_j(\varepsilon, x) = \mathcal{H}_j(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad (\partial \mathcal{R}_j / \partial n_x)(\varepsilon, x) = \Psi_j(\varepsilon, x), \quad x \in \partial\omega_\varepsilon,$$

удовлетворяют соотношениям

$$\text{supp } \mathcal{H}_j \subset B_2^3(0), \quad \mathcal{H}_j(\varepsilon, x) = O(\varepsilon^{3-\delta} (1 + |y|^{\delta-2})), \quad \Psi_j(\varepsilon, x) = O(\varepsilon^2), \quad (9.25)$$

в которых  $\delta$  — произвольное положительное число. (Эти формулы вытекают из представлений (8.7) и (8.8) оператора краевой задачи, из указанных разложений на бесконечности пограничных слоев и из соотношений  $\partial_x^\alpha v_2^{(j)}(x, \log \varepsilon) = O(|y|^{1-|\alpha|-\delta} (1 + |\log \varepsilon|))$  при  $x \in \Omega_\varepsilon$  и  $|\alpha| > 0$ .) Кроме того, сама конструкция асимптотики показывает, что носители функций  $\mathcal{H}_j$  компактны.

Неравенства (9.24) следуют непосредственно из (9.25) и «энергетической» оценки

$$\|\nabla_x \mathcal{R}_j; L_2(\Omega_\varepsilon)\| + \|(1 + |x|)^{-1} \mathcal{R}_j; L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{V}_d)\| + \\ + \||y|^{-1} (1 + |\log |y||)^{-1} \mathcal{R}_j; L_2(\mathcal{V}_d \cap \Omega_\varepsilon)\| \leq \\ \leq \text{const} \{ \|\mathcal{H}_j; L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{V}_d)\| + \||y| (1 + |\log |y||) \mathcal{H}_j; \\ L_2(\mathcal{V}_d \cap \Omega_\varepsilon)\| + |\log \varepsilon| \sqrt{\varepsilon} \|\Psi_j; L_2(\partial\omega_\varepsilon)\| \};$$

Указанная оценка выводится при помощи варианта (2.9) одномерного неравенства Харди и известного соотношения

$$\|W; L_2(g)\|^2 \leq \text{const} \|W; L_2(\Xi_R)\| \{\|\nabla_{\xi} W; L_2(\Xi_R)\| + \|W; L_2(\Xi_R)\|\},$$

где  $\Xi_R = \{\xi \in Q: |\eta| < R\}$  (см., например, [16]). Лемма доказана.

Утверждение теоремы 9 и равенства (8.4) из замечания 8 для элементов  $\mathcal{M}_{jk}(\omega_\varepsilon)$  матрицы, ассоциированной с тензором виртуальной массы, позволяют заключить, что величины  $\mathcal{M}_{jk}(\omega_\varepsilon)$  приближенно (с точностью  $O(\varepsilon^{3-\delta})$ ) представляются коэффициентами разложений функций  $v_2^{(j)}$  (см. леммы 5 и 8). Сформулируем результат.

**Теорема 10.** Множители  $\mathcal{M}_{jk}(\omega_\varepsilon)$  в (8.2) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pp}(\omega_\varepsilon) &= \varepsilon^2 (8\pi)^{-1} (\mathcal{S}(G) + 4\pi^2 \mu_{11}(G)) + O(\varepsilon^{3-\delta}), \quad p=1, 2, \\ \mathcal{M}_{33}(\omega_\varepsilon) &= \varepsilon^2 \pi \mu_{22}(G) + O(\varepsilon^{3-\delta}) \end{aligned} \quad (9.26)$$

(остальные величины суть  $O(\varepsilon^{3-\delta})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). В (9.26)  $\delta$  — произвольное положительное число:  $\|\mu_{pq}(G)\|_{p,q=1}^2$  — матрица, ассоциированная с матрицей приведенной виртуальной массы сечений множества  $G$ ;  $\mathcal{S}(G)$  — интеграл Дирихле в области  $Q$  решения задачи (9.3), (2.4) (см. замечание 7 и формулу (9.11)).

**Следствие 2.** Поскольку для матрицы  $M(\omega_\varepsilon)$  виртуальной массы тела  $\omega_\varepsilon$  имеет место равенство  $M(\omega_\varepsilon) = 4\pi \mathcal{M}(\omega_\varepsilon) - \text{mes}_3(\omega_\varepsilon)$  (см., например, [21]), то из представлений (9.26) и из соотношения  $\text{mes}_3(\omega_\varepsilon) = \varepsilon^2 \text{mes}_3(G) + O(\varepsilon^3)$  вытекают асимптотические формулы для величин  $M_{jk}(\omega_\varepsilon)$ .

**Замечание 12.** Если сечение  $\omega(s, \varepsilon^{-1}s)$  множества (11) постоянно при  $s, \varepsilon^{-1}s \in [0, 2\pi)$ , то, во-первых, матрица  $\mu(\omega)$  является матрицей  $\|t_{jk}(\omega)\|$ , ассоциированной с матрицей виртуальной массы двумерной области  $\omega$  (см. замечание 7) и, во-вторых, решение  $\mathcal{E}$  задачи (9.3), (2.4) тождественно равно нулю. Поэтому  $\mathcal{E}(G) = 0$  и в силу (9.26) элементы матрицы  $M_{jk}(\omega_\varepsilon)$  допускают разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pp}(\omega_\varepsilon) &= \pi t_{11}(\omega)/2 + O(\varepsilon^{3-\delta}), \quad \mathcal{M}_{33}(\omega_\varepsilon) = \varepsilon^2 \pi t_{22}(\omega) + O(\varepsilon^{3-\delta}), \\ \mathcal{M}_{3p}(\omega_\varepsilon) &= \mathcal{M}_{12}(\omega_\varepsilon) = O(\varepsilon^{3-\delta}), \quad p=1, 2. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Отметим, что формулы (9.27) также вытекают из результатов гл. 4 [14].

**Замечание 13.** Обратим внимание на следующее обстоятельство. Нетрудно проверить, что решение  $v_2^{(j)}$  уравнений (8.23) и (9.19) вне носителей правых частей совпадает с решениями уравнений

$$\begin{aligned} -\Delta_x V_j(x) &= -\mathfrak{F}_j(s) \delta(y) + 2\pi \sum_{q=1}^2 \Lambda_{jq}(s) \frac{\partial \delta}{\partial y_q}(y), \quad y=1, 2; \\ -\Delta_x V_3(x) &= 2\chi \sum_{q=1}^2 \mu_{2q}(G) \frac{\partial \delta}{\partial y_q}(y), \quad x \in \mathbf{R}^3. \end{aligned} \quad (9.28)$$

В рамках метода сращиваемых асимптотических разложений (см. [8, 10, 13]) соотношения (9.28) непосредственно являются предельной задачей для определения внешнего разложения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В. А., Хруслов Е. Н. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усредненные и  $G$ -сходимость дифференциальных операторов//УМН. 1979. Т. 34, № 5. С. 65—133.
3. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
4. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
5. Sanchez-Palencia E. Boundary value problems in domains containing perforated walls//Nonlinear partial differential equations and their applications. V. 3. Research Notes in Math. n 70. London: Pitman, 1981. P. 309—325.
6. Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E. Acoustic fluid flow through holes and permeability of perforated walls//J. of Math. Anal. and Appl. 1982. V. 87. P. 427—453.
7. Сонса С. Etude d'un fluide traversant une paroi perforée. I. Rapport de recherche N 85008, Lab. Anal. Num. Université de Paris VI, 1985; 2. Rapport de recherche N 85018, Lab. Anal. Num. Université de Paris VI, 1985.
8. Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения//Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики//Труды семинара С. Л. Соболева. Вып. I. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1980. С. 113—131.
9. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом//ДАН СССР. 1981. Т. 356, № 1. С. 37—39.
10. Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 46, № 1. С. 167—186.
11. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой//Мат. сб. 1981. Т. 116, № 2. С. 187—217.
12. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1981.
13. Жданова Г. В. Рассеяние плоских продольных упругих волн тонкой полостью вращения. Случай осевого падения//Мат. сб. 1983. Т. 121, № 3. С. 310—326.
14. Назаров С. А., Паукшто М. В. Дискретные модели и осреднения в теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984.
15. Зорин И. С., Назаров С. А. О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением//Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 79—86.
16. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
17. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
18. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
19. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками// (в печати).
20. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Теорема единственности решений внешних краевых задач и аналог принципа Сен-Венана//УМН. 1984. Т. 39, № 4. С. 165—166.
21. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
22. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
23. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
24. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
25. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками//Труды Моск. матем. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.



26. Назаров С. А. Метод М. И. Вишика — Л. А. Люстерника в областях с коническими точками//ДАН СССР. 1979. Т. 245, № 6. С. 1307—1311.
27. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Л. А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при вариации области вблизи конических точек//ДАН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 94—96.
28. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.