С. В. Иванов, Объемы и площади липшицевых метрик, *Алгебра и анализ*, 2008, том 20, выпуск 3, 74–111

Алгебра и анализ
Том 20 (2008), №3

ОБЪЁМЫ И ПЛОЩАДИ ЛИПШИЦЕВЫХ МЕТРИК

© С. В. ИВАНОВ

В работе обобщаются и развиваются методы оценки заполняющих объёмов (римановых и финслеровых) с помощью нерастягивающих вложений в банаховы пространства типа L^∞. Для любого функционала финслерова объёма (например, объёма по Буземану или объёма по Холмсу–Томпсону) построено естественное продолжение с класса финслеровых метрик на класс всех липшицевых метрик и определено понятие площади для липшицевых поверхностей в банаховом пространстве. Построено соответствие между минимальными заполнениями и минимальными поверхностями в пространствах типа L^∞. Введён функционал финслерова объёма, обеспечивающий равенство римановых и финслеровых заполняющих объёмов, и доказана его полуэллиптичность.

Введение

0.1. Мотивирующие задачи. Настоящая работа мотивирована задачами о минимальном заполнении и граничной жесткости для римановых многообразий. Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие с краем $S = \partial M$. Обозначим через d_g соответствующую функцию расстояния, $d_g : M \times M \to \mathbf{R}$.

Пусть $d : S \times S \to \mathbf{R}$ — произвольная метрика на S. Будем говорить, что компактное риманово многообразие (M, g) является *заполнением* метрического пространства (S, d), если $d_g(x, y) \geq d(x, y)$ для любых $x, y \in S$. *Заполняющий объём* [17] $\operatorname{FillVol}(S, d)$ пространства (S, d) определяется формулой

$$\operatorname{FillVol}(S, d) = \inf\{\operatorname{vol}(M, g) : (M, g) \text{— заполнение } (S, d)\}.$$

(Это определение имеет смысл только для многообразий S, кобордантных нулю, в общем случае следует брать в качестве M всевозможные псевдомногообразия или полные некомпактные многообразия.) Риманово многообразие (M, g) называется *минимальным заполнением*, если оно реализует указанный инфимум, т.е. $\operatorname{vol}(M, g) = \operatorname{FillVol}(\partial M, d_g|_{S\times S})$.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00939.

Многие классические неравенства могут быть сформулированы в терминах минимальных заполнений. Например, неравенство Безиковича [5] означает, что ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с евклидовой метрикой является минимальным заполнением своей границы (с евклидовой или ℓ_∞-метрикой), неравенство Пу [22] эквивалентно тому, что стандартная полусфера является минимальным заполнением внутренней метрики окружности (в классе заполнений, гомеоморфных диску).

Определение 0.1. Пусть (M, g) — риманово многообразие (возможно, с краем). Будем говорить, что (M, g) обладает *свойством минимальности геодезических*, если любой отрезок геодезической является кратчайшей среди всех кривых с теми же концами.

Будем говорить, что (M, g) обладает *свойством строгой минимальности геодезических*, если свойство минимальности геодезических выполняется для некоторого многообразия, содержащего M в своей внутренности (и снабженного некоторым продолжением метрики g).

Ряд недавних результатов (см. [19, 10]) указывает на правдоподобность следующей гипотезы.

Гипотеза 0.2. *Если многообразие (M, g) обладает свойством минимальности геодезических, то оно является минимальным заполнением. Более того, если (M, g) обладает свойством строгой минимальности геодезических, то оно является единственным (с точностью до изометрии) минимальным заполнением своего края.*

При подстановке определения минимального заполнения гипотеза принимает следующий вид: пусть (M, g) обладает свойством строгой минимальности геодезических и пусть риманово многообразие (M', g') таково, что $\partial M' = \partial M = S$ и $d_{g'}|_{S\times S} \geq d_g|_{S\times S}$, тогда $\mathrm{vol}(M', g') \geq \mathrm{vol}(M, g)$, причем в случае равенства многообразия (M, g) и (M', g') изометричны.

Нетрудно проверить, что если гипотеза 0.2 выполняется для многообразия (M, g), то метрика g однозначно (с точностью до изометрии) определяется по функции граничного расстояния $d_g|_{S\times S}$. Таким образом, гипотеза 0.2 является усилением известной следующей гипотезы Мишела [21] о краевой жёсткости.

Гипотеза 0.3. *Если (M, g) обладает свойством строгой минимальности геодезических и многообразие (M', g') таково, что $\partial M' = \partial M = S$ и $d_{g'}|_{S\times S} = d_g|_{S\times S}$, то (M, g) и (M', g') изометричны.*

0.2. Вспомогательные вложения. М. Громов [17] предложил использовать для оценки заполняющих объёмов конструкцию Куратовского, позволяющую изометрически вложить любое метрическое пространство X

в банахово пространство $C^0(X) \subset \ell_\infty(X)$. (Эта конструкция, применительно к рассматриваемым задачам, описана ниже в §1.2.) Варианты этой конструкции использованы в [19] и [10] для доказательства частных случаев гипотез 0.2 и 0.3. В [17] показано, что заполняющий объём риманова многообразия S равен, с точностью до мультипликативной константы (зависящей от размерности), точной нижней грани площадей поверхностей, затягивающих изометрический образ S в подходящем банаховом пространстве. Одной из целей настоящей работы является уточнение этого результата (в частности, избавление от константы) а именно доказательство следующей теоремы.

Теорема 0.4. 1. *Пусть d — липшицева метрика на многообразии S (см. определение 2.1), f — изометрическое вложение пространства (S,d) в банахово пространство $\mathcal{L} = L^\infty(\mu)$, где μ — произвольная конечная мера. Тогда при подходящем определении понятия площади в пространстве $\mathcal{L}$ заполняющий объём $\operatorname{FillVol}(S,d)$ равен точной нижней грани площадей липшицевых поверхностей, затягивающих $f(S)$ в $\mathcal{L}$.*

2. *Пусть (M,g) — риманово многообразие с краем, $f : (M,g) \to \mathcal{L}$ — изометрическое отображение (где $\mathcal{L}$ — то же, что в первой части теоремы). Тогда (M,g) является минимальным заполнением тогда и только тогда, когда поверхность $f(M)$ минимизирует площадь среди всех липшицевых поверхностей в $\mathcal{L}$ с тем же краем.*

Замечание 0.5. Для многообразия M, обладающего свойством минимальности геодезических, имеется естественное гладкое изометрическое отображение в $L^\infty(\partial M)$ — *представление краевыми расстояниями*, см. пример 1.9. Можно показать (аналогично вычислениям из [10]), что поверхность, задаваемая этим вложением, является минимальной в смысле вариационного исчисления.

Замечание 0.6. Случай равенства в гипотезе 0.2 легко формулируется в терминах вспомогательных вложений: многообразия (M,g) и (M',g') с общим краем изометричны тогда и только тогда, когда их образы при представлении краевыми расстояниями совпадают.

Формулировка теоремы 0.4 является предварительной, полная формулировка приводится в §5 (теорема 5.6 и следствие 5.7). Определение площади липшицевой поверхности $f : M \to L^\infty(\mu)$ является нетривиальным вопросом, которому посвящена основная часть работы. Для того чтобы такое определение было полезным, оно должно быть согласованным как с внешней геометрией поверхности (т.е. вычисляться через производные отображения f), так и с внутренней геометрией (т.е. метрикой на M, индуцированной отображением f).

Одна из возникающих трудностей — отсутствие теоремы Радемахера о дифференцируемости почти всюду для липшицевых отображений со значениями в L^∞. Другая — недостаточная регулярность метрик, индуцируемых на M (это по существу произвольные липшицевы метрики). В §2 и 3 развивается технический аппарат для преодоления этих трудностей. В §2 рассматривается *касательная финслерова структура* произвольной липшицевой метрики на M. Построение с небольшими изменениями следует данному в работе [15]; целью §2 является доказательство необходимых для дальнейшего технических результатов. В §3 рассматривается понятие слабой дифференцируемости липшицева отображения $f : M \to L^\infty$ (получаемое из обычной дифференцируемости переходом к слабой топологии) и доказывается теорема о слабой дифференцируемости почти всюду (см. теорему 3.3). Основным результатом §3 является согласованность почти всюду слабого дифференциала отображения и касательной финслеровой структуры индуцированной метрики на M (см. теорему 3.7).

0.3. Финслеровы объёмы. Даже для гладкого отображения многообразия в банахово пространство индуцируемая на многообразии метрика не является римановой, так как возникающие нормы на касательных пространствах не являются евклидовыми. Поэтому вопросы о заполняющих объёмах естественно рассматривать для финслеровых метрик.

Напомним, что (симметричной) *финслеровой структурой* на гладком многообразии M называется непрерывная функция $\Phi : TM \to \mathbf{R}_+$ такая, что для любой точки $p \in M$ сужение $\Phi|_{T_pM}$ является нормой. Финслеровы структуры также называются *финслеровыми метриками*. Многообразие, снабжённое финслеровой структурой, называется *финслеровым многообразием*.

Римановы метрики — частный случай финслеровых. А именно если M — риманово многообразие, то $\Phi(v)$ полагается равным римановой длине касательного вектора v. Финслерова метрика Φ является римановой тогда и только тогда, когда её сужение на каждый слой касательного пространства является евклидовой нормой.

В отличие от риманова случая существуют различные (не эквивалентные) определения объёма для финслеровых многообразий, например объём по Буземану [12], объём по Холмсу–Томпсону [18], масса и комасса по Громову [17] и т.д. Для различных приложений оказываются удобными различные объёмы. В то же время многие свойства не зависят от выбора конкретного определения и верны для всех „естественных“ понятий объёма. Понятие „естественности“ включает ряд требований, перечисленных в определении 4.1, важнейшим из которых является монотонная зависимость объёма от метрики.

В §4 приводятся соответствующие определения и строится продолжение функционала объёма с класса финслеровых метрик на класс всех липшицевых метрик, что позволяет определить площадь липшицевой поверхности в банаховом пространстве. В §5 доказывается, что заполняющие объёмы в классе всех липшицевых метрик и в классе гладких строго выпуклых финслеровых метрик совпадают (см. теорему 5.2). Там же доказывается аналог теоремы 0.4 для финслеровых многообразий (см. теорему 5.6). Риманов вариант (см. следствие 5.7) получается из финслерова выбором специального определения объёма — вписанного риманова объёма (см. пример 4.4).

В §6 содержится краткий обзор вопросов о полуэллиптичности финслеровых объёмов и доказывается, что вписанный риманов объём обладает свойством сжатия (см. теорему 6.2): для любого банахова пространства X и любого n-мерного линейного подпространства $V \subset X$ существует линейный проектор $P : X \to V$, не увеличивающий n-мерную площадь.

0.4. Обозначения и соглашения. На протяжении всей работы мы используем следующие обозначения:

ω_n — мера Лебега единичного шара в $\mathbf{R}^n$;

$\mathbf{R}^n_\infty$ — нормированное пространство $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где норма $\|\cdot\|_\infty$ определена равенством $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$. Расстояние, определяемое этой нормой, обозначается через d_∞;

$\mathcal{N}(V)$ и $\mathcal{N}_0(V)$, где V — конечномерное векторное пространство, — соответственно множества всех норм и всех полунорм на V. Эти множества снабжаются топологией поточечной сходимости (или, что то же самое, равномерной сходимости на компактах).

Все рассматриваемые меры на многообразиях являются борелевскими, термин „измеримый“ всюду означает измеримость относительно борелевской σ-алгебры.

§1. Метрические пространства

В этом параграфе содержатся предварительные сведения из метрической геометрии. Подробное изложение большинства рассматриваемых вопросов можно найти в книге [11]. Всё излагаемое здесь достаточно общеизвестно, но наиболее общие формулировки некоторых фактов трудно найти в литературе, поэтому они приводятся с доказательствами.

Мы понимаем термины „метрическое пространство“ и „метрика“ в расширенном смысле, а именно мы допускаем нулевые расстояния между различными точками.

Определение 1.1. *Метрикой* на множестве X будем называть функцию вида $d : X \times X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $d(x,x) = 0$ для всех $x \in X$.
2. Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$ для любых $x, y \in X$.
3. Неравенство треугольника: $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ для любых $x, y, z \in X$.

Метрическое пространство — это множество с заданной на нём метрикой.

Если из контекста ясно, о какой метрике d идёт речь, мы будем писать $|xy|$ или $|x,y|$ вместо $d(x,y)$.

Стандартные определения и теоремы, относящиеся к метрическим пространствам, без труда обобщаются на случай метрик с нулевыми расстояниями. Метрики, удовлетворяющие условию $d(x,y) > 0$ при $x \neq y$ (т.е. метрики в обычном смысле), будем называть *положительными*.

Мы часто будем рассматривать метрики или последовательности метрик, заданные на множестве X с некоторой заранее заданной топологией (например, на гладком многообразии). При этом всегда предполагается, что метрика согласована с этой топологией в следующем смысле.

Определение 1.2. Будем говорить, что метрика d на топологическом пространстве X *согласована с топологией*, если топология, определяемая метрикой d, (нестрого) слабее топологии пространства X.

Как легко видеть, согласованность метрики d с топологией пространства X эквивалентна тому, что функция $d : X \times X \to \mathbf{R}$ непрерывна (относительно топологии произведения).

1.1. Изометрические отображения.

Определение 1.3. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *нерастягивающим*, если оно не увеличивает расстояния, т.е. $|f(x)f(y)| \leq |xy|$ для любых $x, y \in X$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *изометрическим*, если оно сохраняет расстояния, т.е. $|f(x)f(y)| = |xy|$ для любых $x, y \in X$.

Если (Y, d) — метрическое пространство, X — произвольное множество, то любое отображение $f : X \to Y$ определяет метрику d' на X, относительно которой f является изометрическим, а именно $d'(x,y) = d(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in X$. Мы будем называть d' метрикой, *индуцированной из d отображением f*, и обозначать ее через f^*d.

Отметим, что введённое понятие изометрического отображения отличается от терминов ,,изометрическое вложение“ и ,,изометрическое погружение“, принятых в дифференциальной геометрии, где, как правило, имеется в виду сохранение длин путей, а не расстояний.

Хорошо известна конструкция Куратовского, позволяющая изометрически отобразить любое метрическое пространство (X,d) в некоторое банахово пространство. А именно рассмотрим пространство $C(X)$ ограниченных непрерывных функций на X со стандартной нормой $\|f\| = \sup_X |f|$ и зафиксируем точку $x_0 \in X$. Изометрическое отображение $F : X \to C(X)$ определяется формулой $F(x)(y) = d(x,y) - d(x_0,y)$, а в случае ограниченного X можно обойтись более простой формулой $F(x)(y) = d(x,y)$. Нам понадобятся конечномерные приближения этой конструкции.

Предложение 1.4. *Пусть (X,d) — сепарабельное метрическое пространство. Тогда существует неубывающая последовательность $\{d_n\}$ метрик на X, сходящаяся к d равномерно на компактах и такая, что для каждого n пространство (X,d_n) допускает изометрическое отображение в $\mathbf{R}^n_\infty$.*

Доказательство. Пусть $P = \{p_n\}_{n=1}^\infty$ — счётное всюду плотное подмножество в X. Для каждого n рассмотрим функцию $f_n : X \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = d(x,p_n)$ и определим отображение $F_n : X \to \mathbf{R}^n_\infty$ формулой

$$F_n(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

Положим $d_n = F_n^* d_\infty$. Тогда F_n — изометрическое отображение пространства (X,d_n) в $\mathbf{R}^n_\infty$. Из построения следует, что $d_{n+1}(x,y) \ge d_n(x,y)$, т.е. $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность.

Осталось доказать, что d_n сходятся к d равномерно на компактах. Из неравенства треугольника следует, что функция f_n — нерастягивающая. Следовательно,

$$d_n(x,y) = \sup_{i\le n} |f_i(x) - f_i(y)| \le d(x,y).$$

Пусть K — произвольное компактное множество в X, и пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку K компактно, а P всюду плотно, найдётся такое целое $n_0 > 0$, что множество $\{p_1, p_2, \dots, p_{n_0}\}$ образует ε-сеть для K. Пусть $x, y \in K$, тогда найдётся такой номер $i \le n_0$, что $d(x,p_i) \le \varepsilon$. По неравенству треугольника, $d(y,p_i) \ge d(x,y) - d(x,p_i) \ge d(x,y) - \varepsilon$. Значит,

$$f_i(y) - f_i(x) = d(y,p_i) - d(x,p_i) > d(x,y) - 2\varepsilon,$$

откуда $d_n(x,y) = \|F_n(x) - F_n(y)\| \ge d(x,y) - 2\varepsilon$ для всех $n \ge n_0$. Таким образом, $d - 2\varepsilon \le d_n \le d$ на K при всех $n \ge n_0$. В силу произвольности ε это означает, что d_n равномерно сходится к d на множестве $K \times K$. □

Замечание 1.5. Если пространство (X, d) ограничено, то построенные выше отображения $F_n : X \to \mathbf{R}^n_\infty$ в естественном смысле сходятся к изометрическому отображению $F : X \to \ell_\infty$. В общем случае для того, чтобы обеспечить сходимость, достаточно вычесть из каждой функции f_n константу, равную $d(x_0, p_n)$, где $x_0 \in X$ — некоторая фиксированная точка. Отождествив ℓ_∞ с $\ell_\infty(P)$ и заметив, что пространство $C(X)$ изометрически вкладывается в $\ell_\infty(P)$ оператором сужения, нетрудно убедиться, что предельное отображение F совпадает с отображением Куратовского.

1.2. Продолжение липшицевых отображений.

Предложение 1.6. *Пусть μ — мера на произвольном множестве S, X — сепарабельное метрическое пространство, $Y \subset X$, $f : Y \to L^\infty(\mu)$ — нерастягивающее отображение. Тогда существует нерастягивающее отображение $F : X \to L^\infty(\mu)$ такое, что $F|_Y = f$.*

Доказательство. Выберем счётное плотное подмножество $Y' \subset Y$. Для $x \in X$ и $s \in S$ положим

$$F(x)(s) = \inf\{f(y)(s) + |xy| : y \in Y'\}.$$

Для каждого $x \in X$ эта формула определяет функцию $F(x) : S \to [-\infty, +\infty]$, причём эта функция μ-измерима как инфимум счётного набора μ-измеримых функций. Заметим, что

$$F(x)(s) = f(x)(s) \quad \text{для всех } x \in Y' \text{ и } \mu\text{-почти всех } s \in S. \tag{1.7}$$

Действительно, для любых $x, y \in Y'$ и μ-почти всех $s \in S$ имеем

$$|f(x)(s) - f(y)(s)| \le |xy|,$$

так как f — нерастягивающее, откуда $f(y)(s) + |xy| \ge f(x)(s)$. Переходя к инфимуму по y, получаем неравенство $F(x)(s) \ge f(x)(s)$. С другой стороны,

$$F(x)(s) = \inf\{f(y)(s) + |xy| : y \in Y'\} \le f(x)(s) + |xx| = f(x)(s)$$

для любого $x \in Y'$, откуда следует (1.7).

Теперь докажем, что

$$|F(x)(s) - F(x')(s)| \le |xx'| \tag{1.8}$$

для любых $x, x' \in X$ и $s \in S$ (в случае $F(x)(s) = F(x')(s) = \pm\infty$ мы считаем разность равной нулю). Действительно, для любого $y \in Y'$ имеем

$$\big|(f(y)(s) + |xy|) - (f(y)(s) + |x'y|)\big| = \big||xy| - |x'y|\big| \le |xx'|$$

по неравенству треугольника. Следовательно, расстояние по Хаусдорфу в $\mathbf{R}$ между множествами $T = \{f(y)(s) + |xy| : y \in Y'\}$ и $T' = \{f(y)(s) + |x'y| :$

$y \in Y'\}$ не превосходит $|xy|$. Поскольку $F(x)(s) = \inf T$ и $F(x')(s) = \inf T'$, отсюда следует (1.8).

Подставляя в (1.8) в качестве x' произвольную точку из Y', получаем, что значение $F(x)(s)$ конечно для почти всех $s \in S$. Таким образом, F является отображением из X в $L^\infty(\mu)$, и (1.8) означает, что это отображение — нерастягивающее. Осталось заметить, что f и F совпадают на Y, так как они совпадают на Y' в силу (1.7) и непрерывны. □

Пример 1.9. Пусть S — замкнутое гладкое многообразие, d — метрика на S, (M, g) — риманово многообразие, заполняющее (S, d), т.е. $\partial M = S$ и $d_g|_{S\times S} \geq d$ (см. введение). Рассмотрим вложение Куратовского $f : (S, d) \to L^\infty(S)$, заданное равенством $f(x)(y) = d(x, y)$. В силу неравенства $d_g|_{S\times S} \geq d$ это отображение является нерастягивающим относительно метрики d_g. Следовательно, существует нерастягивающее отображение $F : (M, g) \to L^\infty(S)$, продолжающее f.

Теперь предположим, что (M, g) обладает свойством минимальности геодезических. Тогда такое отображение $F : (M, g) \to L^\infty(S)$ можно задать формулой $F(x)(s) = d_g(x, s)$, $x \in M$, $s \in S$. Нетрудно убедиться, что это отображение является изометрическим. Действительно, для любых $x, y \in M$ и $s \in S$ имеем

$$|F(x)(s) - F(y)(s)| = |d_g(x, s) - d_g(y, s)| \leq d_g(x, y)$$

по неравенству треугольника, откуда $\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq d_g(x, y)$. С другой стороны, пусть s_0 — точка, где геодезическая, проведенная через x и y, достигает края многообразия. Тогда по свойству минимальности геодезических $d_g(x, y) = |d_g(x, s_0) - d_g(y, s_0)|$, т.е. $|F(x)(s_0) - F(y)(s_0)| = d_g(x, y)$, следовательно, $\|F(x) - F(y)\|_\infty = d_g(x, y)$. Построенное изометрическое отображение $F : (M, g) \to L^\infty(S)$ называется *представлением краевыми расстояниями* многообразия (M, g).

Теперь пусть (M, g) и (M', g') — такие, как в гипотезе 0.2, т.е. (M, g) обладает свойством минимальности геодезических, $\partial M = \partial M' = S$ и $d_{g'}|_{S\times S} \geq d_g|_{S\times S}$. Тогда по доказанному выше существует изометрическое отображение $F : (M, g) \to L^\infty(S)$ и нерастягивающее отображение $F' : (M', g') \to L^\infty(S)$, сужения которых на S совпадают с вложением Куратовского пространства $(S, d_g|_{S\times S})$. При любом естественном определении площади $\mathrm{area}(F)$ поверхности $F : M \to L^\infty(S)$ изометрические отображения должны сохранять площадь, а нерастягивающие — не увеличивать ее, поэтому выполняются соотношения $\mathrm{area}(F) = \mathrm{vol}(M, g)$ и $\mathrm{area}(F') \leq \mathrm{vol}(M', g')$. Поэтому для доказательства гипотезы 0.2 достаточно проверить неравенство $\mathrm{area}(F) \leq \mathrm{area}(F')$. Это рассуждение доказывает одну из импликаций теоремы 0.4, а именно из минимальности площади поверхности F следует, что (M,g) — минимальное заполнение. Ключевым требованием к определению площади здесь является то, что нерастягивающие отображения не увеличивают площадь.

1.3. Длины кривых.

Определение 1.10. *Кривая* (или *путь*) в топологическом пространстве X — это непрерывное отображение вида $\gamma : [a,b] \to X$, где $a \le b$.

Отметим, что если метрика d на X согласована с топологией (в смысле определения 1.2), то любая кривая в X непрерывна и относительно метрики d.

Определение 1.11. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $\gamma : [a,b]\to X$ — кривая в (X,d). *Пунктиром* кривой γ называется конечная последовательность вида $\gamma(t_0),\dots,\gamma(t_n)$, где $\{t_i\}_{i=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, т.е. $a = t_0 \le t_1 \dots \le t_n = b$. *Длиной пунктира* $\gamma(t_1),\dots,\gamma(t_n)$ называется сумма $\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))$. *Длина* $L_d(\gamma)$ кривой γ — это супремум длин всех её пунктиров. Мы будем опускать индекс d в обозначении L_d, если из контекста ясно, какая метрика d имеется в виду. Кривая γ называется *спрямляемой*, если $L(\gamma) < \infty$.

Стандартные свойства длины (см., например, [11, §2.3]) тривиально обобщаются на случай метрик с нулевыми расстояниями. Нам понадобятся следующие элементарные факты.

Предложение 1.12. *Для любой кривой $\gamma : [a,b] \to X$ выполняются следующие свойства.*

1. *Аддитивность*: $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma_{[c,b]})$ *для любого* $c \in [a,b]$.
2. *Неравенство треугольника*: $L(\gamma) \ge |\gamma(a)\gamma(b)|$.
3. *При мелкости разбиения, стремящейся к нулю, длина соответствующего пунктира кривой γ стремится к $L(\gamma)$. Под мелкостью разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[a,b]$ мы понимаем число* $\max_i |t_i - t_{i+1}|$.

Предложение 1.13. *Пусть γ — кривая в метрическом пространстве (X,d), и пусть $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность метрик на X, поточечно сходящаяся к d (т.е. $d_n(x,y) \to d(x,y)$ при $n\to\infty$ для любых $x,y \in X$). Тогда $L_{d_n}(\gamma) \to L_d(\gamma)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Из неравенства $d_n \le d$ следует, что γ непрерывна относительно d_n и $L_{d_n}(\gamma) \le L_d(\gamma)$. Достаточно доказать, что $\underline{\lim}\, L_{d_n}(\gamma) \ge L_d(\gamma)$. Пусть $[a,b]$ — область определения кривой γ, $\{t_i\}_{i=0}^N$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Складывая неравенства $L_{d_n}(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) \ge$

$d_n(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$, получаем неравенство

$$L_{d_n}(\gamma) \ge \sum_{i=0}^{N-1} d_n(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\underline{\lim}\, L_{d_n}(\gamma) \ge \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Переходя к супремуму по всем разбиениям $\{t_i\}$ в правой части, получаем $\underline{\lim}\, L_{d_n}(\gamma) \ge L_d(\gamma)$, что и требовалось. $\square$

Определение 1.14. Кривая $\gamma : [a, b] \to X$ в метрическом пространстве называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого конечного набора $\{(a_i, b_i)\}_i$ непересекающихся интервалов, содержащихся в $[a, b]$ и удовлетворяющих неравенству $\sum_i |a_i - b_i| \le \delta$, верно, что $\sum_i |\gamma(a_i)\gamma(b_i)| < \varepsilon$.

Легко убедиться, что любая абсолютно непрерывная кривая спрямляема. Липшицевы кривые, очевидно, являются абсолютно непрерывными.

Определение 1.15. Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ — кривая в метрическом пространстве, $t \in [a, b]$. Определим *верхнюю метрическую скорость* $\overline{s}_\gamma(t)$ кривой γ в точке t равенством

$$\overline{s}_\gamma(t) = \overline{\lim_{t' \to t}} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t - t'|}.$$

Аналогичный нижний предел называется *нижней метрической скоростью* и обозначается $\underline{s}_\gamma(t)$.

Если верхняя и нижняя скорости совпадают, т.е. существует предел $\lim_{t' \to t} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t-t'|}$, то он называется *метрической скоростью* кривой γ в точке t и обозначается через $s_\gamma(t)$.

Предложение 1.16. *Если кривая $\gamma : [a, b] \to X$ в метрическом пространстве X абсолютно непрерывна, то метрическая скорость $s_\gamma(t)$ определена и конечна для почти всех $t \in [a, b]$, и при этом*

$$L(\gamma) = \int_a^b s_\gamma(t)\, dt.$$

Доказательство. Определим (неубывающую) функцию $\lambda : [a, b] \to \mathbf{R}$ равенством $\lambda(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$. Пусть ε, δ, $\{(a_i, b_i)\}$ — такие, как в определении 1.14. Разбивая произвольным образом интервалы (a_i, b_i) и подставляя полученные системы отрезков в то же определение, получаем неравенство

$\sum_i L(\gamma|_{[a_i,b_i]}) \le \varepsilon$. Поскольку $L(\gamma|_{[a_i,b_i]}) = \lambda(b_i) - \lambda(a_i)$, отсюда следует, что функция λ абсолютно непрерывна. Следовательно, она дифференцируема почти всюду на $[a,b]$, и

$$L(\gamma) = \lambda(b) - \lambda(a) = \int_a^b \lambda'(t)\,dt.$$

Поэтому достаточно доказать, что $\underline{s}_\gamma = \overline{s}_\gamma = \lambda'$ почти всюду на $[a,b]$. Из неравенства $L(\gamma|_{[t,t']}) \ge |\gamma(t)\gamma(t')|$ следует, что $\lambda' \ge \overline{s}_\gamma$ всюду, где определена λ'. Поэтому достаточно доказать, что $\underline{s}_\gamma \ge \lambda'$ почти всюду на $[a,b]$.

Предположим, что это не так. Тогда найдётся такое $\varepsilon > 0$ и такое борелевское множество $T \subset [a,b]$ положительной меры, что $\underline{s}_\gamma(t) < \lambda'(t) - \varepsilon$ для всех $t \in T$. В силу регулярности меры Лебега T содержит замкнутое подмножество положительной меры, поэтому можно считать, что само T замкнуто. Выберем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ мелкости не больше δ длина соответствующего пунктира кривой γ отличается от $L(\gamma)$ менее, чем на $\frac{1}{3}\varepsilon \cdot m(T)$, где m — мера Лебега на $[a,b]$. Для каждого $t \in T$ выберем такое $t_1 = t_1(t) \in [a,b]$, что $|t_1 - t| < \delta$ и

$$\frac{|\gamma(t)\gamma(t_1)|}{|t-t_1|} < \frac{|\lambda(t) - \lambda(t_1)|}{|t-t_1|} - \varepsilon$$

(такое t_1 найдётся в силу условия $\underline{s}_\gamma(t) \le \lambda'(t) - \varepsilon$). Затем увеличим отрезок $[t,t_1]$ (или $[t_1,t]$) до открытого интервала $(a(t), b(t))$, где $a(t)$ и $b(t)$ настолько близки к t и t_1, что предыдущие неравенства сохраняют силу для $a(t)$ и $b(t)$, т.е. $|a(t) - b(t)| < \delta$ и

$$\frac{|\gamma(a(t)),\gamma(b(t))|}{|a(t)-b(t)|} < \frac{|\lambda(a(t)) - \lambda(b(t))|}{|a(t)-b(t)|} - \varepsilon. \tag{1.17}$$

Интервалы вида $(a(t), b(t))$ образуют открытое покрытие множества T; выберем из него минимальное конечное подпокрытие $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^N$. Перенумеруем интервалы (a_i,b_i) так, что $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_N$. Тогда из минимальности покрытия следует, что $(a_i,b_i) \cap (a_j,b_j) = \emptyset$ при $|i-j| > 1$, в частности, интервалы с чётными номерами не пересекаются. Можно считать, что они покрывают не менее половины меры множества T (в противном случае возьмем вместо них нечётные номера). Из (1.17) имеем

$$\frac{|\gamma(a_{2i}),\gamma(b_{2i})|}{|a_{2i}-b_{2i}|} < \frac{|\lambda(a_{2i}) - \lambda(b_{2i})|}{|a_{2i}-b_{2i}|} - \varepsilon = \frac{L(\gamma|_{[a_{2i},b_{2i}]})}{|a_{2i}-b_{2i}|} - \varepsilon,$$

откуда

$$\sum_i \left(L(\gamma|_{[a_{2i},b_{2i}]}) - |\gamma(a_{2i}),\gamma(b_{2i})|\right) > \varepsilon \cdot \sum_i |a_{2i}-b_{2i}| \ge \frac{1}{2}\varepsilon \cdot m(T).$$

Включим систему отрезков $\{[a_{2i}, b_{2i}]\}$ в разбиение $\{t_j\}$ отрезка $[a, b]$ мелкости меньше δ. Тогда

$$L(\gamma) - \sum_j |\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})| = \sum_j \Big(L(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) - |\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})| \Big)$$

$$\geq \sum_i \big(L(\gamma|_{[a_{2i}, b_{2i}]}) - |\gamma(a_{2i}), \gamma(b_{2i})| \big) > \frac{1}{2}\varepsilon \cdot m(T).$$

(Здесь первое неравенство получено выкидыванием из суммы тех слагаемых, для которых отрезок $[t_j, t_{j+1}]$ не совпадает ни с одним из отрезков $[a_{2i}, b_{2i}]$.) Но по выбору δ левая часть не превосходит $\frac{1}{3}\varepsilon \cdot m(T)$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

§2. Липшицевы метрики

2.1. Слабые финслеровы структуры. В этом параграфе мы строим аналог касательного конуса для произвольной липшицевой метрики на многообразии. Построение аналогично изложенному в [15], но отличается некоторыми деталями.

Далее M обозначает гладкое многообразие (возможно, с краем), d_{riem} — произвольно выбранная вспомогательная риманова метрика на M.

Определение 2.1. Будем называть кривую $\gamma : [a, b] \to M$ *липшицевой*, если она липшицева относительно d_{riem}, т.е. существует такое $C > 0$, что

$$d_{\mathrm{riem}}(\gamma(t), \gamma(t')) \leq C \cdot |t - t'|$$

для любых $t, t' \in [a, b]$.

Будем называть метрику d на M *липшицевой*, если она локально липшицева относительно d_{riem}, т.е. для любой точки $x \in M$ существуют такая окрестность $U \ni x$ и такое $C > 0$, что

$$d(y, z) \leq C \cdot d_{\mathrm{riem}}(y, z)$$

для любых $y, z \in U$.

Ясно, что это определение не зависит от выбора вспомогательной римановой метрики d_{riem}. Если d — липшицева метрика, γ — липшицева кривая, то γ липшицева (и, как следствие, абсолютно непрерывна) относительно метрики d. По теореме Радемахера, любая липшицева кривая дифференцируема почти всюду на своей области определения.

Определение 2.2. *Слабой финслеровой структурой* на гладком многообразии M будем называть любую борелевскую функцию $\varphi : TM \to \mathbf{R}$, обладающую следующими свойствами.

1. Неотрицательность: $\varphi(v) \geq 0$ для всех $v \in TM$.

2. Симметричность и положительная однородность: $\varphi(\lambda v) = |\lambda|\varphi(v)$ для всех $v \in TM$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

3. Локальная ограниченность: $\sup(\varphi|_K) < \infty$ для любого компакта $K \subset TM$.

Определение 2.3. Пусть φ — слабая финслерова структура на M, $\gamma : [a, b] \to M$ — липшицева кривая. *Длина* $L_\varphi(\gamma)$ кривой γ относительно φ определяется равенством

$$L_\varphi(\gamma) = \int_a^b \varphi(\gamma'(t))\,dt.$$

Определение 2.4. Пусть d — липшицева метрика на M. Для каждого $v \in TM$ определим число $\varphi_d(v)$ равенством

$$\varphi_d(v) = \overline{s}_\gamma(0),$$

где γ — произвольная дифференцируемая в нуле кривая вида $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ такая, что $\gamma'(0) = v$. Здесь $\overline{s}$ обозначает верхнюю метрическую скорость относительно d (см. определение 1.15).

Определенную таким образом функцию $\varphi_d : TM \to \mathbf{R}$ будем называть *касательной финслеровой структурой* метрики d.

Корректность определения обеспечивается следующей леммой.

Лемма 2.5. *Пусть d — липшицева метрика на M, γ_1 и γ_2 — две дифференцируемые в нуле кривые такие, что $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. Тогда $\overline{s}_{\gamma_1}(0) = \overline{s}_{\gamma_2}(0)$ и $\underline{s}_{\gamma_1}(0) = \underline{s}_{\gamma_2}(0)$, где $\overline{s}$ и $\underline{s}$ — верхняя и нижняя метрическая скорость относительно d.*

Доказательство. Из определения метрической скорости и неравенства треугольника следует, что

$$|\overline{s}_{\gamma_1}(0) - \overline{s}_{\gamma_2}(0)| \le \varlimsup_{t\to 0} \frac{d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{|t|}.$$

Поскольку метрика d липшицева и $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$, для некоторой константы C имеем

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \le C \cdot d_{\mathrm{riem}}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = o(|t|), \quad t \to 0.$$

Значит, правая часть предыдущего неравенства равна нулю. Доказательство для нижней скорости аналогично. $\square$

Замечание 2.6. Функция φ_d из определения 2.4, в отличие от аналогичного определения из [15], симметрична всюду на TM, так как используемое понятие метрической скорости (см. определение 1.15) симметрично относительно замен параметра вида $t \mapsto -t$.

Предложение 2.7. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — её касательная финслерова структура. Тогда*

1. *φ является слабой финслеровой структурой в смысле определения* 2.2.

2. *Для всех $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_x M}$ липшицево.*

3. *Для любой липшицевой кривой γ имеет место равенство $L_d(\gamma) = L_\varphi(\gamma)$, где L_d — длина относительно метрики d (см. определение* 1.11*), L_φ — длина относительно φ (см. определение* 2.3*).*

4. *Пусть X — нормированное пространство, $f : (M, d) \to X$ — изометрическое отображение, дифференцируемое в точке $p \in M$. Тогда $\varphi|_{T_p M}$ совпадает с полунормой, индуцированной из $\|\cdot\|_X$ отображением $d_p f$, т.е.*

$$\varphi(v) = \|d_p f(v)\|_X$$

для всех $v \in T_p M$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 тривиально следуют из определений и липшицевости метрики. Утверждение 3 является переформулировкой предложения 1.16.

Докажем утверждение 4. Пусть $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — дифференцируемая в нуле кривая, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Тогда

$$\varphi(v) = \varlimsup_{t \to 0} \frac{d(\gamma(t), p)}{t} = \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\|f(\gamma(t)) - f(p)\|_X}{t} = \|(f \circ \gamma)'(0)\|_X = \|d_p f(v)\|_X.$$

Здесь первое равенство следует из определения φ, второе — из изометричности отображения f, последнее — из дифференцируемости f в точке p. □

Определение 2.8. Будем говорить, что функции $\varphi_1, \varphi_2 : TM \to \mathbf{R}$ совпадают *почти всюду на липшицевых кривых*, если для любой липшицевой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ для почти всех $t \in [a, b]$ выполняется равенство $\varphi_1(\gamma'(t)) = \varphi_2(\gamma'(t))$.

Очевидно, что из совпадения функций почти всюду на липшицевых кривых следует их совпадение почти всюду на TM.

Предложение 2.9. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность метрик на M, поточечно сходящаяся к d. Тогда*

$$\varphi_d = \lim_{n \to \infty} \varphi_{d_n}$$

почти всюду на липшицевых кривых.

Доказательство. Очевидно, что касательная финслерова структура монотонно зависит от метрики, поэтому $\{\varphi_{d_n}\}$ — неубывающая последовательность, ограниченная сверху функцией φ_d. Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ — липшицева кривая. Из предложения 1.13 следует, что $L_{d_n}(\gamma) \to L_d(\gamma)$ при $n \to \infty$. Отсюда по предложению 2.7(3) следует, что

$$\int_a^b \varphi_d(\gamma'(t))\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_{d_n}(\gamma'(t))\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \varphi_{d_n}(\gamma'(t))\,dt$$

(второе равенство выполняется по теореме Леви в силу монотонности последовательности $\{\varphi_{d_n}\}$). Поскольку $\lim_{n\to\infty} \varphi_{d_n} \le \varphi_d$, отсюда следует, что подынтегральные выражения равны при почти всех t. $\square$

Следующее предложение оправдывает использование термина „финслерова структура“ для функций φ_d.

Предложение 2.10. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Тогда для почти всех $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_xM}$ является полунормой.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае, когда метрика d допускает изометрическое отображение в конечномерное банахово пространство X. Пусть $f : (M,d) \to X$ — изометрическое отображение, тогда оно липшицево относительно вспомогательной римановой метрики на M, следовательно (по теореме Радемахера) f дифференцируемо почти всюду на M. Для каждой точки $p \in M$, в которой f дифференцируемо, по предложению 2.7(4) имеем $\varphi(v) = \|d_xf(v)\|_X$ для всех $v \in T_pM$. Значит, $\varphi|_{T_pM}$ — полунорма.

В общем случае по предложению 1.4 существует неубывающая последовательность $\{d_n\}$ метрик, допускающих изометрические вложения в конечномерные банаховы пространства, сходящаяся к d. Применяя доказанное выше к метрикам d_n, получаем, что соответствующие функции $\varphi_n = \varphi_{d_n}$ являются полунормами на почти всех слоях T_xM, $x \in M$. По предложению 2.9 $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ почти всюду на TM. Таким образом, для почти всех $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_xM}$ почти всюду (на T_xM) совпадает с пределом последовательности полунорм. В силу непрерывности (см. предложение 2.7(2)) это означает, что $\varphi|_{T_xM}$ само является полунормой. $\square$

Замечание 2.11. Вообще говоря, неверно, что $\varphi|_{T_xM}$ является полунормой для всех $x \in M$. Например, нетрудно построить липшицеву метрику d на $\mathbf{R}^2$ такую, что $d((0,0),(0,x)) = d((0,0),(x,0)) = |x|$ и $d((0,0),(x,x)) = 10|x|$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда в $T_0\mathbf{R}^2$ для базисных касательных векторов e_1 и e_2 выполняются соотношения $\varphi_d(e_1) = \varphi_d(e_2) = 1$, $\varphi_d(e_1+e_2) \ge 10$, значит, сужение φ_d на $T_0\mathbf{R}^2$ не удовлетворяет неравенству треугольника.

Следующее предложение показывает, что касательная финслерова структура по существу не меняется при переходе к внутренней метрике на M.

Предложение 2.12. *Пусть d — липшицева метрика на M. Определим метрику d^* на M равенством*

$$d^*(x,y) = \inf\{L_d(\gamma) : \ \gamma \text{ — липшицева кривая, соединяющая } x \text{ и } y\}.$$

Тогда касательные финслеровы структуры метрик d и d^* совпадают почти всюду на кривых.

Доказательство. Обозначим $\varphi = \varphi_d$, $\varphi^* = \varphi_{d^*}$. Очевидно, что $d^* \geq d$, откуда $\varphi^* \geq \varphi$. Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ — липшицева кривая. Тогда $L_{d^*}(\gamma) = L_d(\gamma)$. Действительно, из неравенства $d^* \geq d$ следует, что $L_{d^*}(\gamma) \geq L_d(\gamma)$. Чтобы доказать обратное, достаточно проверить, что для любого разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[a,b]$ верно неравенство

$$\sum d^*(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq L(\gamma).$$

Заметим, что

$$d^*(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq L_d(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}),$$

так как $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ входит в множество кривых, по которым берется инфимум в определении d^* в левой части. Складывая эти неравенства по всем i, получаем требуемое.

Таким образом, $L_{d^*}(\gamma) = L_d(\gamma)$, откуда по предложению 2.7(3) $L_{\varphi^*}(\gamma) = L_\varphi(\gamma)$. В силу неравенства $\varphi^* \geq \varphi$ отсюда следует, что $\varphi^*(\gamma'(t)) = \varphi(\gamma(t))$ для почти всех $t \in [a,b]$. □

Замечание 2.13. Метрика d^* из предложения 2.12 является внутренней как частный случай метрики, определяемой функционалом длины (см. [11]). Другой способ построения внутренней метрики состоит в следующем: для $x, y \in M$ положим $d'(x,y)$ равным инфимуму длин всех непрерывных (не только липшицевых) кривых, соединяющих x и y. Касательная финслерова структура такой метрики d' тоже совпадает с φ_d почти всюду на путях; это следует из очевидных неравенств $d \leq d' \leq d^*$.

Если метрика d билипшицево эквивалентна римановой, то метрики d^* и d' совпадают, так как любая спрямляемая кривая допускает липшицеву параметризацию.

2.2. Сглаживание липшицевых метрик. Пусть (M,φ) — финслерово многообразие. Финслерова структура φ определяет метрику d_φ на M равенством $d_\varphi(x,y) = \inf\{L_\varphi(\gamma)\}$, где инфимум берётся по всем липшицевым (или кусочно-гладким) кривым γ, соединяющим точки x и y в M.

Финслерова структура φ (и метрика d_φ) называется *гладкой*, если функция $\varphi : TM \to \mathbf{R}$ является гладкой (класса C^∞) вне нулевого сечения. Гладкая финслерова структура φ (и метрика d_φ) называется *строго выпуклой*, если для любой точки $x \in M$ второй дифференциал функции $\varphi^2|_{T_xM}$ положительно определён всюду на $T_xM \setminus \{0\}$.

Предложение 2.14. *Пусть M — компактное гладкое многообразие, d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Тогда существует последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ гладких строго выпуклых финслеровых структур на M такая, что*

1. $\varphi_i|_{T_xM} \to \varphi|_{T_xM}$ *для почти всех* $x \in M$.

2. $d_i(x,y) \ge d(x,y) - \varepsilon_i$ *для всех* $x, y \in M$, *где* $d_i = d_{\varphi_i}$, $\{\varepsilon_i\}$ *— некоторая стремящаяся к нулю последовательность чисел.*

3. $d_i \le C \cdot d_{\mathrm{riem}}$ *для всех* i, *где* d_{riem} *— вспомогательная риманова метрика,* $C > 1$ *— такая константа, что* $d \le (C-1)d_{\mathrm{riem}}$.

Доказательство. Из предложений 1.4 и 2.9 следует, что достаточно доказать утверждение для метрики d, допускающей изометрическое отображение в $\mathbf{R}^N_\infty$. Такое отображение $f : M \to \mathbf{R}^N_\infty$ липшицево с константой $C-1$ относительно метрики d_{riem}. Сгладив f с помощью подходящей свертки, получим такую последовательность гладких отображений $f_i : M \to \mathbf{R}^N_\infty$, что $f_i \rightrightarrows f$, $df_i \to df$ почти всюду на TM и $\|df_i\| \le C - \frac{1}{2}$, где норма $\|df_i\|$ вычисляется относительно метрики d_{riem}. Можно считать, что $N > 2\dim M$, тогда отображения f_i можно заменить на гладкие вложения с теми же свойствами. Норму $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbf{R}^N$ приблизим гладкими строго выпуклыми нормами $\|\cdot\|_{p_i}$, $p_i \to \infty$ (и все p_i достаточно велики), где

$$\|(x_1, \dots, x_N)\|_p = (x_1^p + \dots + x_N^p)^{1/p}.$$

Пусть φ_i — финслерова структура, индуцируемая на M отображением f_i из нормы $\|\cdot\|_{p_i}$. Тогда $\{\varphi_i\}$ — искомая последовательность. Действительно, свойство 1 следует из сходимости $df_i \to df$ почти всюду и сходимости $\|\cdot\|_p \to \|\cdot\|_\infty$ при $p \to \infty$, свойство 2 — из соотношений

$$d_i(x,y) \ge \|f_i(x) - f_i(y)\|_{p_i} \ge \|f_i(x) - f_i(y)\|_\infty \rightrightarrows \|f(x) - f(y)\|_\infty = d(x,y).$$

Свойство 3 следует из условия $\|df_i\| \le C - \frac{1}{2}$ и близости норм $\|\cdot\|_{p_i}$ и $\|\cdot\|_\infty$. □

Замечание 2.15. Если касательная финслерова структура $\varphi = \varphi_d$ в предложении 2.14 является гладкой и строго выпуклой в окрестности некоторого замкнутого множества $K \subset M$, то приближающие финслеровы структуры φ_i можно выбрать совпадающими с φ на K. Для этого достаточно скомбинировать φ и построенные в теореме φ_i с помощью соответствующего гладкого разбиения единицы.

§3. Слабая дифференцируемость

3.1. Теорема Радемахера. Классическая теорема Радемахера (см. [16, теорема 3.1.6]) утверждает, что любое липшицево отображение $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ дифференцируемо почти всюду. Эта теорема верна и для функций со значениями в рефлексивных банаховых пространствах и, более общо, в банаховых пространствах, обладающих свойством Радона–Никодима (см. [4, гл. 5]).

Однако для пространств типа L^∞ (которые выступают в качестве области значений для вложений Куратовского) аналогичное утверждение неверно. Например, рассмотрим отображение $f : [0,1] \to L^\infty[0,1]$, заданное равенством $f(x)(y) = |x - y|$. Нетрудно проверить, что f липшицево с константой 1, но нигде не дифференцируемо.

Чтобы обойти эту трудность, мы введём понятие слабой дифференцируемости для отображений со значениями в банаховых пространствах, сопряжённых к сепарабельным, и покажем, что липшицевы отображения почти всюду слабо дифференцируемы и их слабые дифференциалы естественно связаны с касательными финслеровыми структурами индуцированных метрик.

Далее M обозначает гладкое многообразие, снабжённое вспомогательной римановой метрикой d_{riem}, X — банахово пространство, X^* — сопряжённое пространство (непрерывных линейных функционалов $X \to \mathbf{R}$). В приложениях, как правило, мы будем полагать $X = L^1(\mu)$, $X^* = L^\infty(\mu)$, где μ — некоторая конечная мера.

Определение 3.1. Пусть $f : M \to X^*$ — произвольное отображение. Для каждого $u \in X$ рассмотрим функцию $f_u : M \to \mathbf{R}$, заданную равенством

$$f_u(x) = \langle f(x), u \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ обозначает стандартное спаривание X^* и X. Будем говорить, что f *слабо дифференцируема* в точке $p \in M$, если существует такое линейное отображение $L : T_pM \to X^*$, что для любого $u \in X$ функция f_u дифференцируема в точке p и её дифференциал задаётся равенством

$$d_p f_u(v) = \langle L(v), u \rangle \quad \text{для всех } v \in T_pM.$$

Отображение L будем называть *слабым дифференциалом* f в точке p и обозначать через $d_p^w f$.

Предложение 3.2. *Пусть отображение $f : M \to X^*$ липшицево (относительно метрики d_{riem}), $p \in M$. Тогда слабая дифференцируемость f в точке p эквивалентна тому, что для каждого $u \in X$ функция f_u из определения* 3.1 *дифференцируема в p.*

Доказательство. Пусть C — константа Липшица для f. Тогда для любых $x, y \in M$ выполняется неравенство $\|f(x) - f(y)\|_{X^*} \le C \cdot d_{\mathrm{riem}}(x, y)$. Тогда для любого $u \in X$

$$|f_u(x) - f_u(y)| = |\langle f(x) - f(y), u\rangle| \le C \cdot \|u\|_X \cdot d_{\mathrm{riem}}(x, y),$$

т.е. функция f_u липшицева с константой Липшица $C\|u\|_X$.

Предположим, что f_u дифференцируема в p для всех $u \in X$. Зафиксируем вектор $v \in T_pM$. Из липшицевости функции f_u следует оценка на ее производную: $d_pf_u(v) \le C\|u\|_X|v|$. Заметим, что функция $u \mapsto d_pf_u(v)$ линейна и в силу вышеуказанной оценки непрерывна. Следовательно, она представляет элемент $L(v)$ пространства X^* такой, что

$$d_pf_u(v) = \langle L(v), u\rangle \quad \text{для всех } u \in X.$$

Таким образом, построено отображение $L : T_pM \to X^*$. Оно, очевидно, линейно, следовательно, является слабым дифференциалом f в точке p. □

Теорема 3.3. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство и пусть $f : M \to X^*$ — липшицево отображение. Тогда f слабо дифференцируемо почти всюду на M.*

Доказательство. Поскольку доказываемое утверждение локально, можно считать, что M — область в $\mathbf{R}^n$ и d_{riem} — стандартная евклидова метрика. Пусть U — счётное всюду плотное подмножество в X. Для каждого $u \in U$ функция f_u из определения 3.1 липшицева, следовательно, дифференцируема почти всюду. Значит, для почти любой точки $p \in M$ верно, что для всех $u \in U$ функция f_u дифференцируема в p. Докажем, что для каждой такой точки p отображение f слабо дифференцируемо в p.

Пусть C — константа Липшица для f. Тогда для любого $u \in X$ функция f_u из определения 3.1 липшицева с константой $C\|u\|_X$. Зафиксируем $u \in X$ и последовательность $\{u_i\} \subset U$, сходящуюся к u. По предположению каждая функция f_{u_i} дифференцируема в точке p, обозначим ее дифференциал $d_pf_{u_i}$ через L_i ($L_i : T_pM \to \mathbf{R}$). Для любых i и j функция $f_{u_i} - f_{u_j} = f_{u_i - u_j}$ липшицева с константой $C\|u_i - u_j\|_X$, откуда $\|L_i - L_j\| \le C\|u_i - u_j\| \to 0$ при $i, j \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{L_i\}$ сходится к некоторой линейной функции $L : T_pM \to M$.

Выберем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем такое i, что $\|u - u_i\|_X < \varepsilon$, тогда $\|L - L_i\| \le C\varepsilon$. Поскольку $L_i = d_p f_{u_i}$, найдётся такое $\delta > 0$, что

$$|f_{u_i}(q) - f_{u_i}(p) - L_i(q-p)| < \varepsilon|q-p| \tag{3.4}$$

для всех $q \in M \subset \mathbf{R}^n$, таких, что $|q-p| < \delta$. Из липшицевости f имеем $\|f(q) - f(p)\|_{X^*} \le C \cdot |q-p|$, откуда

$$\begin{aligned} &|(f_u(q) - f_u(p)) - (f_{u_i}(q) - f_{u_i}(q))| \\ &\qquad = |\langle f(q) - f(p), u - u_i\rangle| \le C \cdot |q-p| \cdot \|u - u_i\|_X \le C\varepsilon|q-p|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из неравенства $\|L - L_i\| \le C\varepsilon$ имеем

$$|L(q-p) - L_i(q-p)| \le C|q-p|. \tag{3.6}$$

Складывая (3.4), (3.5) и (3.6), получаем

$$|f_u(q) - f_u(p) - L(q-p)| < (2C+1)\varepsilon|q-p|$$

при $|q-p| < \delta$. В силу произвольности ε это означает, что функция f_u дифференцируема в точке p и $d_p f_u = L$. Поскольку u — произвольный элемент пространства X, из предложения 3.2 следует, что f слабо дифференцируемо в точке p, что и требовалось. □

3.2. Слабый дифференциал и метрика. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим липшицево отображение $f : M \to X^*$, где M — гладкое многообразие, X — сепарабельное банахово пространство. Это отображение индуцирует метрику d на M, относительно которой отображение является изометрическим (т.е. $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|_{X^*}$).

Если f дифференцируемо в точке p в обычном смысле, то ее дифференциал индуцирует полунорму $\|\cdot\|_p$ на T_pM равенством $\|v\|_p = \|d_p f(v)\|_{X^*}$. По предложению 2.7, эта полунорма совпадает с касательной финслеровой структурой метрики d в точке p.

Для слабого дифференциала аналогичное равенство, вообще говоря, неверно. Например, рассмотрим для $M = [-1,1]$ и $X = L^1[0,1]$ отображение $f : [-1,1] \to X^* = L^\infty[0,1]$, заданное равенствами

$$f(x)(t) = \begin{cases} x \cdot \max\{1 - t/|x|, 0\}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что отображение f изометрическое и слабо дифференцируемо в нуле, однако $d_0^w f = 0$.

Тем не менее следующая теорема показывает, что совпадение касательной финслеровой структуры и полунормы, индуцированной слабым дифференциалом, имеет место почти всюду на M.

Теорема 3.7. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура, X — сепарабельное банахово пространство, $f : M \to X^*$ — изометрическое отображение пространства (M, d). Тогда для почти всех точек $p \in M$ имеет место равенство*

$$\varphi_d(v) = \|d_p^w f(v)\|$$

для всех $v \in T_pM$.

Доказательство. Выберем счетное множество $U = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, плотное в единичной сфере пространства X. Для каждого $\xi \in X^*$ имеем

$$\|\xi\|_{X^*} = \sup\{|\langle \xi, u\rangle| : u \in X, \|u\|_X = 1\} = \sup_i |\langle \xi, u_i\rangle|,$$

где первое равенство следует из определения нормы $\|\cdot\|_{X^*}$, а второе — из плотности множества $\{u_i\}$ в единичной сфере пространства X.

Для каждого натурального n рассмотрим отображение $P_n : X^* \to \mathbf{R}^n_\infty$, заданное равенством $P_n(\xi) = (\langle \xi, u_1\rangle, \langle \xi, u_2\rangle, \dots, \langle \xi, u_n\rangle)$, и определим полунорму $\|\cdot\|_n$ на X^* равенством $\|\xi\|_n = \|P_n(\xi)\|_\infty$. Для каждого фиксированного $\xi \in X^*$ имеем

$$\|\xi\|_n = \max_{1\le i\le n} |\langle \xi, u_i\rangle|,$$

следовательно, последовательность $\{\|\xi\|_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая и сходится к $\|\xi\|_{X^*}$.

Для каждого натурального n определим липшицеву метрику d_n на M равенством $d_n(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_n$. Тогда $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность метрик, поточечно сходящаяся к d. Пусть φ_n — касательная финслерова структура метрики d_n, тогда по предложению 2.9 $\varphi_n|_{T_pM}$ сходится к $\varphi|_{T_pM}$ для почти всех $p \in M$.

Пусть точка $p \in M$ такова, что $\varphi_n|_{T_pM}$ сходится к $\varphi|_{T_pM}$ и при этом f слабо дифференцируемо в p. Тогда для всех n отображение $P_n \circ f : M \to \mathbf{R}^n_\infty$ дифференцируемо в p и $d_p(P_n \circ f) = P_n \circ d_p^w f$, так как координатные функции отображения $P_n \circ f$ — это функции f_{u_i} из определения слабой дифференцируемости, $1 \le i \le n$. Заметим, что отображение $P_n \circ f$ является изометрическим отображением пространства (M, d_n) в $\mathbf{R}^n_\infty$. Следовательно, по предложению 2.7(4) $\varphi_n|_{T_pM}$ совпадает с полунормой, индуцированной из нормы $\|\cdot\|_\infty$ отображением $d_p(P_n \circ f)$, или, что то же самое, с полунормой, индуцированной из полунормы $\|\cdot\|_n$ на X^* отображением $d_p^w f$. Значит, для любого $v \in T_pM$

$$\varphi(v) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(v) = \lim_{n\to\infty} \|d_p^w f(v)\|_n = \|d_p^w f(v)\|_{X^*},$$

что и требовалось. □

§4. Финслеровы объёмы

4.1. Примеры. В отличие от риманова случая для финслеровых многообразий используются различные (неэквивалентные) „естественные“ определения объёма. Под „естественностью“ мы понимаем монотонную зависимость объёма от метрики и совпадение с римановым объёмом на классе римановых многообразий. Напомним, что финслеровым многообразием называется гладкое многообразие с *непрерывной* финслеровой структурой $\Phi : TM \to \mathbf{R}$ (в отличие от слабых финслеровых структур из §2, которые предполагаются лишь измеримыми).

Определение 4.1. Пусть n — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что задан *функционал n-мерного финслерова объёма*, если каждому n-мерному финслерову многообразию (M, Φ) сопоставлена борелевская мера vol_Φ на M так, что выполняются следующие свойства.

1. Мера vol_Φ монотонно зависит от Φ, т.е. $\mathrm{vol}_{\Phi'} \le \mathrm{vol}_\Phi$, если $\Phi' \le \Phi$.

2. Мера сохраняется при изометриях, т.е. если (M, Φ) и (M', Φ') — n-мерные финслеровы многообразия, $f : M \to M'$ — инъективное гладкое отображение такое, что $\Phi = \Phi' \circ df$, то $\mathrm{vol}_{\Phi'}|_{f(M)} = f_* \mathrm{vol}_\Phi$, где звёздочка обозначает перенос меры отображением f.

3. Если $M = \mathbf{R}^n$ и Φ — стандартная евклидова метрика, то vol_Φ — стандартный евклидов объём (n-мерная мера Лебега).

Пример 4.2 (объём по Буземану). n-Мерная мера Хаусдорфа, очевидно, удовлетворяет вышеуказанным требованиям. Для финслеровых многообразий ее называют *объёмом по Буземану.* Буземан [12] доказал, что это единственный функционал объёма, обладающий следующим свойством: объём единичного шара в n-мерном нормированном пространстве равен ω_n (т.е. не зависит от нормы). Несмотря на геометрическую естественность этого объёма, он оказывается неудобным во многих вопросах и не обладает некоторыми свойствами, ожидаемыми от объёма в дифференциальной и интегральной геометрии (см., например, [2, 24]).

Пример 4.3 (объём по Холмсу–Томпсону). Пусть (M, Φ) — n-мерное финслерово многообразие. Рассмотрим кокасательное расслоение T^*M. В каждом его слое T^*_xM определена норма Φ^*_x, двойственная к норме Φ_x. Объединение этих норм даёт непрерывную функцию $\Phi^* : T^*M \to \mathbf{R}$. Рассмотрим множество

$$B^*(M, \Phi) = \{w \in T^*M : \Phi^*(w) \le 1\}$$

(т.е. объединение единичных шаров норм Φ^*_x по всем $x \in M$).

На кокасательном расслоении определён канонический $2n$-мерный (симплектический) объём, обозначим его через V_{symp}. Теперь определим финслеров объём vol^s_Φ формулой

$$\mathrm{vol}^s_\Phi(M) = \frac{1}{\omega_n} V_{\mathrm{symp}}(B^*(M,\Phi)).$$

Более точно, определим меру vol^s_Φ как образ меры $\frac{1}{\omega_n} V_{\mathrm{symp}}$ при отображении проекции $B^*(M,\Phi) \to M$.

Этот функционал объёма называется *объёмом по Холмсу–Томпсону* или *симплектическим финслеровым объёмом*. Он удовлетворяет условиям определения 4.1 в силу инвариантности построения и антимонотонной зависимости Φ^* от Φ.

Этот объём был введён Холмсом и Томпсоном [18] в 1979 г., но связанные с ним задачи изучались и раньше. Одна из причин, по которой он удобен в вопросах дифференциальной геометрии, состоит в том, что симплектическому объёму на множестве $B^*(M,\Phi)$ соответствует инвариантная относительно геодезического потока мера Лиувилля на единичном касательном расслоении.

Пример 4.4 (вписанный риманов объём). Пусть (M,Φ) — финслерово многообразие. Для каждого измеримого $U \subset M$ положим

$$\mathrm{vol}^e_\Phi(U) = \inf\{\mathrm{vol}_g(U) : g \text{ — риманова метрика на } M,\ g \geq \Phi^2\}, \tag{4.5}$$

где vol_g обозначает риманов объём относительно g. В неравенстве $g \geq \Phi^2$ риманова метрика g рассматривается как функция на TM, вычисляющая квадрат длины касательного вектора. Будем называть полученную меру vol^e_Φ *вписанным римановым объёмом* финслеровой метрики Φ. Очевидно, что этот объём удовлетворяет требованиям из определения 4.1. Более того, это максимальный функционал, удовлетворяющий этим требованиям. Это следует из того, что на классе римановых метрик функционал объёма определён однозначно (см. предложение 4.6).

Существует единственная риманова метрика g, реализующая инфимум в (4.5). В каждом слое T_xM единичный шар этой метрики g — эллипсоид максимального объёма, содержащийся в единичном шаре нормы Φ_x (*эллипсоид Джона* [20]).

Для целей финслеровой геометрии этот объём не удобен, но он оказывается полезным для оценок римановых объёмов, требующих вспомогательных финслеровых построений. В частности, именно это определение объёма обеспечивает совпадение заполняющих объёмов в классах римановых и финслеровых метрик, доказываемое ниже в теореме 5.2.

Нетрудно убедиться, что три введенных выше функционала объёма различны. Например, рассмотрим множество $[-1,1]^2$ в нормированном пространстве $\mathbf{R}^2_\infty$. Его объём по Буземану равен π (так как это единичный шар нормы), объём по Холмсу–Томпсону равен $\frac{8}{\pi}$, а вписанный риманов объём равен 4.

Предложение 4.6. 1. *Функционал n-мерного финслерова объёма однозначно определяется своими значениями на n-мерных банаховых пространствах.*

2. *На классе римановых многообразий любой финслеров объём совпадает со стандартным римановым объёмом.*

Доказательство. Второе требование определения 4.1 позволяет ограничиться финслеровыми структурами в $\mathbf{R}^n$. Пусть Φ — финслерова структура в $\mathbf{R}^n$. Отождествив все касательные пространства $T_x\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{R}^n$, можно рассматривать Φ как семейство норм $\{\Phi_x\}_{x\in\mathbf{R}^n}$ на $\mathbf{R}^n$, где $\Phi_x = \Phi|_{T_x\mathbf{R}^n}$. Зафиксируем $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и обозначим $\|\cdot\| = \Phi_{x_0}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности Φ найдется такая окрестность U точки x_0, что

$$(1-\varepsilon)\|\cdot\| \le \Phi_x \le (1+\varepsilon)\|\cdot\|$$

для всех $x \in U$. Для любого $\lambda > 0$ пространство $(\mathbf{R}^n, \lambda\|\cdot\|)$ изометрично пространству $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ гомотетией с коэффициентом λ. Отсюда по второму требованию определения 4.1 следует, что

$$\mathrm{vol}_{\lambda\|\cdot\|}(A) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\lambda A)$$

для любого измеримого $A \subset \mathbf{R}^n$. Мера $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ пропорциональна мере Лебега, так как она локально конечна и инвариантна относительно параллельных переносов, следовательно, $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(A)$. Таким образом, $\mathrm{vol}_{\lambda\|\cdot\|} = \lambda^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. Подставляя $\lambda = 1 \pm \varepsilon$ и пользуясь монотонной зависимостью меры от метрики, получаем, что

$$(1-\varepsilon)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|} \le \mathrm{vol}_\Phi \le (1+\varepsilon)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$$

на множестве U. Устремляя ε к нулю, получаем, что плотность меры vol_Φ относительно меры Лебега в точке x_0 равна плотности меры $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. Таким образом, мера vol_Φ имеет плотность, значение которой в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$ определяется значением функционала объёма на банаховом пространстве $(\mathbf{R}^n, \Phi_x)$. Отсюда следует первое утверждение предложения.

Если финслерова структура Φ является римановой, то все нормы Φ_x, $x \in \mathbf{R}^n$ — евклидовы. Поскольку все n-мерные евклидовы пространства изометричны, второе и третье требования из определения 4.1 однозначно определяют плотность меры vol_Φ, и она равна плотности стандартного риманова объёма. Отсюда следует второе утверждение предложения. $\square$

4.2. Плотности финслеровых объёмов. Предложение 4.6 показывает, что для определения n-мерного финслерова объёма достаточно задать его на n-мерных банаховых пространствах. В этом параграфе мы дадим соответствующие определения, следуя подходу из [3], и определим финслеров объём для произвольных липшицевых метрик.

Предположим, зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объёма $\Phi \mapsto \mathrm{vol}_\Phi$. Тогда, в частности, каждому n-мерному нормированному пространству $(V, \|\cdot\|)$ сопоставлена инвариантная относительно параллельных переносов локально конечная борелевская мера $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ на V. Все такие меры на V пропорциональны друг другу. Они находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с нормами на n-кратном внешнем произведении $\Lambda^n V$: норма n-вектора $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$ равна мере параллелепипеда, образованного векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$. Мы будем обозначать определённую таким образом норму n-вектора σ через $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\sigma)$.

Из определения 4.1 следует, что это отображение обладает следующими свойствами.

(4.7) Если $(V, \|\cdot\|)$ и $(V', \|\cdot\|')$ — n-мерные нормированные пространства, $f : V \to V'$ — нерастягивающее линейное отображение, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\sigma) \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}(f_*(\sigma))$ для всех $\sigma \in \Lambda^n V$, где звёздочка обозначает естественное действие изоморфизма на n-формах.

В частности, если $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — нормы на V и $\|\cdot\| \le \|\cdot\|'$, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|} \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}$.

(4.8) Если $|\cdot|$ — евклидова норма, то $\mathrm{vol}_{|\cdot|}$ — соответствующий евклидов объём.

Определение 4.9. Будем говорить, что задан *функционал n-мерного банахова объёма*, если каждому n-мерному нормированному пространству $(V, \|\cdot\|)$ сопоставлена норма $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ на $\Lambda^n V$ так, что выполняются свойства (4.7) и (4.8).

Из свойства (4.7) следует, что объём сохраняется при изометриях. Следовательно, достаточно определить n-мерный банахов объём $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ только для норм $\|\cdot\|$, заданных на $\mathbf{R}^n$. Для фиксированного векторного пространства V функционал объёма $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ задаёт отображение из $\mathcal{N}(V)$ в $\mathcal{N}(\Lambda^n(V))$. (Напомним, что через $\mathcal{N}(V)$ обозначается множество всех норм на V. Пространство $\mathcal{N}(\Lambda^n(V))$ одномерно и может быть отождествлено с $\mathbf{R}_+$, но такое отождествление не инвариантно.) Это отображение естественно продолжается на множество полунорм $\mathcal{N}_0(V)$, а именно мы полагаем $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|} = 0$, если полунорма $\|\cdot\|$ вырождена (не является нормой).

Лемма 4.10. *Пусть* $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ *— функционал n-мерного банахова объёма, V — n-мерное векторное пространство. Тогда*

1. $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ *зависит от* $\|\cdot\|$ *однородно степени n, т.е.* $\mathrm{vol}_{\lambda\|\cdot\|} = \lambda^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ *для любой нормы* $\|\cdot\|$ *на V и любого* $\lambda > 0$.

2. *Отображение* $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|} : \mathcal{N}_0(V) \to \mathcal{N}_0(\Lambda^n V)$ *непрерывно.*

Доказательство. 1. Следует из изометричности пространств $(V, \lambda\|\cdot\|)$ и $(V, \|\cdot\|)$ гомотетией с коэффициентом λ (см. доказательство предложения 4.6).

2. Сначала докажем непрерывность на множестве норм $\mathcal{N}(V)$. Рассмотрим последовательность $\{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^{\infty}$ норм, сходящуюся к норме $\|\cdot\|$. Отношение $\frac{\|\cdot\|_i}{\|\cdot\|}$ равномерно стремится к 1, т.е.

$$(1-\varepsilon_i)\|\cdot\| \le \|\cdot\|_i \le (1+\varepsilon_i)\|\cdot\|$$

для некоторой последовательности $\varepsilon_i \to 0$. Отсюда в силу однородности

$$(1-\varepsilon_i)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|} \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \le (1+\varepsilon_i)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|},$$

следовательно, $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \to \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$, и непрерывность на $\mathcal{N}(V)$ доказана.

Теперь пусть $\|\cdot\|$ — вырожденная полунорма, $\{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность полунорм, сходящаяся к $\|\cdot\|$. Пусть V_0 — нулевое подпространство нормы $\|\cdot\|$, т.е. $V_0 = \{v \in V : \|v\| = 0\}$. V_1 — дополнительное подпространство к V_0. Можно считать, что $V_0 = \mathbf{R}^k$, $V_1 = \mathbf{R}^{n-k}$, где $1 \le k \le n$, $V = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k} = \mathbf{R}^n$. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим норму $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ на $\mathbf{R}^n$, заданную равенством

$$\|(x,y)\|_{(\varepsilon)} = \varepsilon|x| + 2\|y\|, \quad x \in \mathbf{R}^k, y \in \mathbf{R}^{n-k},$$

где $|\cdot|$ — стандартная евклидова норма. Поскольку сужение полунормы $\|\cdot\|$ на V_1 является нормой, отношение $\frac{\|\cdot\|_i}{\|\cdot\|}$ равномерно стремится к 1 на $V_1 \setminus \{0\}$, поэтому $\|\cdot\|_i \le 2\|\cdot\|$ на V_1 при всех достаточно больших i. Можно считать, что это неравенство выполняется для всех i. Положим

$$\varepsilon_i = \max\{\|v\|_i : v \in V_0, |v| = 1\}.$$

Тогда $\varepsilon_i \to 0$, так как сужения полунорм $\|\cdot\|_i$ на V_0 стремятся к нулю. Из неравенств $\|\cdot\|_i \le 2\|\cdot\|$ на V_1 и $\|\cdot\|_i \le \varepsilon_i|\cdot|$ на V_0 следует, что $\|\cdot\|_i \le \|\cdot\|_{(\varepsilon_i)}$ всюду на V.

Заметим, что все нормы вида $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ изометричны; изометрия между $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ реализуется отображением $(x,y) \mapsto (\varepsilon x, y)$, $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^{n-k}$. Следовательно, $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_{(\varepsilon)}} = \varepsilon^k \mathrm{vol}_{(1)}$, где $\mathrm{vol}_{(1)} = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_{(1)}}$. Отсюда и из монотонной зависимости объёма от нормы следует, что $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \le \varepsilon_i^k \mathrm{vol}_{(1)}$. Следовательно, $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \to 0 = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. □

Определение 4.11. *Плотностью меры* на n-мерном гладком многообразии M будем называть неотрицательную измеримую функцию $\nu : \Lambda^n TM \to \mathbf{R}$, сужение которой на каждый слой является полунормой, т.е. симметрично и положительно однородно. ($\Lambda^n TM$ — одномерное векторное расслоение над M, слоем которого над точкой $x \in M$ является n-кратное внешнее произведение $\Lambda^n T_x M$.)

Такую структуру можно интегрировать по многообразию точно так же, как дифференциальную n-форму, при этом (в отличие от дифференциальной формы) интеграл не зависит от ориентации многообразия. Таким образом, функция ν определяет некоторую меру μ на M. Мы будем записывать это отношение между μ и ν формулой $\mu = \int \nu$.

Определение 4.12. Предположим, что зафиксирован некоторый функционал n-мерного банахова объёма $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. Пусть d — липшицева метрика на n-мерном гладком многообразии M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Рассмотрим плотность $\nu = \nu_d$ на M, значение которой на n-векторе $\sigma \in \Lambda^n T_x M$ равно $\mathrm{vol}_{\varphi|_{T_x M}}(\sigma)$, если $\varphi|_{T_x M}$ — полунорма, и 0 в противном случае. Меру $\mathrm{vol}_d = \int \nu_d$ будем называть *финслеровым объёмом* липшицевой метрики d.

Предложение 4.13. *Мера* vol_d *из определения* 4.12 *корректно определена и обладает следующими свойствами.*

1. *Однородность*: $\mathrm{vol}_{\lambda d} = \lambda^n \mathrm{vol}_d$ *для любой липшицевой метрики* d *и любого* $\lambda > 0$.

2. *Если* (M, d) *и* (M', d') *— многообразия с липшицевыми метриками,* $f : (M, d) \to (M', d')$ *— нерастягивающее отображение, то* $\mathrm{vol}_{d'}(f(A)) \leq \mathrm{vol}_d(A)$ *для любого измеримого* $A \subset M$.

В частности, если $M' = M$ *и* $d' \leq d$, *то* $\mathrm{vol}_{d'} \leq \mathrm{vol}_d$.

3. *Если* $\{d_i\}$ *— неубывающая последовательность метрик на* M, *поточечно сходящаяся к липшицевой метрике* d, *то* $\mathrm{vol}_{d_i}(A) \to \mathrm{vol}(A)$ *для любого измеримого* $A \subset M$.

Доказательство. Для проверки корректности определения необходимо доказать, что плотность ν_d в определении 4.12 измерима. Это следует из измеримости функции $\varphi_d : TM \to \mathbf{R}$ и непрерывной зависимости объёма от полунормы (см. лемму 4.10(2)).

Свойство однородности следует из соответствующего свойства банахова объема (см. лемму 4.10(1)).

Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что в любой точке $x \in M$, где отображение f дифференцируемо, его якобиан не превосходит 1, где под якобианом понимается отношение плотностей

$$\frac{(d_x f)_* \nu_d(x)}{\nu_{d'}(f(x))}.$$

Это следует из свойства (4.7) банахова объёма.

Третье утверждение следует из сходимости почти всюду касательных финслеровых структур (см. предложение 2.9) и непрерывной зависимости плотности объёма от полунормы (см. лемму 4.10(2)). □

Следствие 4.14. *Определение* 4.12 *на классе финслеровых многообразий задает функционал финслерова объёма в смысле определения* 4.1. *Обратно, любой функционал финслерова объёма задается в таком виде.*

Доказательство. Первое утверждение следует из предложения 4.13(2). Обратное следует из предложения 4.6. □

Примеры. Пусть Φ — финслерова метрика в области $U \subset \mathbf{R}^n$. Отождествляя $T_xU \simeq \mathbf{R}^n$ для всех $x \in U$, можно рассматривать Φ как семейство норм $\{\Phi_x\}_{x\in U}$, заданных на $\mathbf{R}^n$. Обозначим через B_x единичный шар нормы Φ_x. Каждый финслеров объём имеет непрерывную плотность ρ относительно меры Лебега m_n, она связана с введённой выше бескоординатной плотностью соотношением

$$\rho(x) = \nu_{\Phi_x}(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n),$$

где $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ — стандартный базис пространства $\mathbf{R}^n$.

В случае объёма по Буземану плотность равна

$$\rho(x) = \frac{\omega_n}{m_n(B_x)},$$

так как объём единичного шара нормы равен ω_n.

Для объёма по Холмсу–Томпсону плотность равна

$$\rho(x) = \frac{m_n(B_x^\circ)}{\omega_n},$$

где B_x° — полярное множество тела B_x. Это следует из определения объёма по Холмсу–Томпсону и того факта, что B_x° — единичный шар двойственной нормы $\|\cdot\|_x^*$ (с учетом стандартного отождествления $(\mathbf{R}^n)^* \simeq \mathbf{R}^n$).

Для вписанного риманова объёма плотность равна

$$\rho(x) = \frac{\omega_n}{m_n(E_x)},$$

где E_x — эллипсоид Джона единичного шара нормы Φ_x.

§5. Заполняющие объёмы

Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объёма. Тогда по определению 4.12 каждому n-мерному многообразию M в липшицевой метрике d сопоставляется мера vol_d на M.

Определение 5.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс компактных n-мерных многообразий с липшицевыми метриками. Пусть S — $(n-1)$-мерное многообразие, d_0 — липшицева метрика на S. Будем называть *заполняющим объёмом* метрики d_0 в классе $\mathfrak{M}$ (относительно данного функционала объёма) величину

$$\inf\{\mathrm{vol}_d(M) : (M, d) \in \mathfrak{M}, \partial M = S, d|_{S\times S} \geq d_0\}.$$

Будем называть многообразие $(M, d) \in \mathfrak{M}$ *минимальным заполнением* в классе $\mathfrak{M}$, если $\mathrm{vol}_d(M)$ равно заполняющему объёму метрики $d|_{\partial M\times\partial M}$ в классе $\mathfrak{M}$.

Определение заполняющего объёма, данное во введении, соответствует заполняющему объёму в классе римановых многообразий.

Теорема 5.2. *Пусть M — n-мерное многообразие, $S = \partial M$, d_0 — липшицева метрика на S. Тогда*

1. *заполняющий объём метрики d_0 в классе всех липшицевых метрик на M равен ее заполняющему объёму в классе гладких строго выпуклых финслеровых метрик;*
2. *если в качестве функционала объема выбран вписанный риманов объем, то заполняющий объём метрики d_0 в классе всех липшицевых метрик на M равен ее заполняющему объёму в классе римановых метрик.*

Доказательство. 1. Пусть d — липшицева метрика на M такая, что $d|_{S\times S} \geq d_0$. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется гладкая строго выпуклая финслерова метрика $\tilde{d}$ на M, для которой $\tilde{d}|_{S\times S} \geq d|_{S\times S}$ и $\mathrm{vol}_{\tilde{d}}(M) \leq \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$. Метрику d можно считать внутренней, так как от перехода к индуцированной внутренней метрике расстояния не уменьшаются, а объём сохраняется (по предложению 2.12).

Приклеим к многообразию M „воротник“ $M^+ = S \times [0, 1]$, отождествив множества $S \subset M$ и $S \times \{0\} \subset S \times [0, 1]$. На M^+ построим такую гладкую риманову метрику d^+, что

(1) $\mathrm{vol}_{d^+}(M^+) < \varepsilon$;

(2) $d^+((x, t)(x', t')) > d(x, x')$ для любых $x, x' \in S$, $t, t' \in [0, 1]$ таких, что $(x, t) \neq (x', t')$.

В качестве d^+ можно выбрать метрику произведения $(S, d_0^+) \times [0, \theta]$, где d_0^+ — риманова метрика на S, $d_0^+ \geq 2d|_{S\times S}$, $0 < \theta < \varepsilon/\,\mathrm{vol}(S, d_0^+)$.

Увеличенное многообразие $M' = M \cup M^+$ снабжается метрикой d', полученной склеиванием метрик d на M и d^+ на M^+. Операция склеивания описана в [11, §3.1]; здесь мы пользуемся только тем, что результат является внутренней метрикой, локально изометричной склеиваемым метрикам на внутренностях склеиваемых многообразий. Заметим, что

$$d'((x,t),(x',t')) \geq d(x,y) \tag{5.3}$$

для любых $x, x' \in S$, $t, t' \in [0,1]$, так как это неравенство выполняется для обеих склеиваемых метрик.

Пусть $\delta > 0$ таково, что $d^+((x,1),(x',\frac{1}{2})) \geq d(x,x') + \delta$ для всех $x, x' \in S$. Построим для метрики d' последовательность $\{\varphi_i\}$ гладких финслеровых структур, как в предложении 2.14, при этом выберем φ_i совпадающими с римановой структурой метрики d^+ на множестве $S \times [\frac{1}{2}, 1]$. (см. замечание 2.15). Пусть $d_i = d_{\varphi_i}$. По свойствам 1 и 3 предложения 2.14, плотности финслеровых объёмов, порождаемых метриками d_i, равномерно ограничены и поточечно сходятся к плотности меры $\mathrm{vol}_{d'}$. Следовательно, $\mathrm{vol}_{d_i}(M') \to \mathrm{vol}_{d'}(M')$, поэтому при всех достаточно больших i имеем $\mathrm{vol}_{d_i}(M') < \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$.

При всех достаточно больших i имеем $d_i \geq d' - \delta$ всюду на M' (см. свойство 2 из предложения 2.14). Отсюда следует, что $d_i((x,1),(y,1)) \geq d(x,y)$ для любых $x, y \in S$. Действительно, пусть γ — кратчайшая кривая метрики d_i, соединяющая $(x,1)$ и $(y,1)$. Если эта кривая целиком лежит в множестве $S \times [\frac{1}{2}, 1]$, то ее длина не меньше $d^+((x,1),(y,1)) \geq d(x,y)$. В противном случае пусть $(x', \frac{1}{2})$ и $(y', \frac{1}{2})$ — ближайшие к x и y соответственно точки пересечения кривой γ с множеством $S \times \{\frac{1}{2}\}$, тогда

$$\begin{aligned} d_i((x,1),(y,1)) &= d^+((x,1),(x',\tfrac{1}{2})) + d_i((x',\tfrac{1}{2}),(y',\tfrac{1}{2})) + d^+((y,1),(y',\tfrac{1}{2})) \\ &\geq (d(x,x') + \delta) + (d'((x',\tfrac{1}{2}),(y',\tfrac{1}{2})) - \delta) + (d(y,y') + \delta) \\ &\geq (d(x,x') + \delta) + (d(x',y') - \delta) + (d(y,y') + \delta) > d(x,y). \end{aligned}$$

Здесь второе неравенство следует из (5.3), последнее — из неравенства треугольника для d.

Пусть $f : M \to M'$ — диффеоморфизм, переводящий $S \subset M$ в $S \times \{1\} \subset M'$ естественным образом. Пусть $\tilde{d}_i = f^* d_i$ — метрика на M, соответствующая d_i при этом диффеоморфизме. Тогда при достаточно большом i метрика $\tilde{d} = \tilde{d}_i$ удовлетворяет условиям $\tilde{d}|_{S \times S} \geq d|_{S \times S}$ и $\mathrm{vol}_{\tilde{d}}(M) < \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$, что и требовалось.

2. Для каждой точки $x \in M$ рассмотрим норму на $T_x M$, являющуюся сужением финслеровой структуры построенной выше метрики $\tilde{d}$. Пусть E_x — эллипсоид Джона единичного шара этой нормы (см. 4.4). Пусть d_r — риманова метрика на M, порождаемая семейством эллипсоидов $\{E_x\}_{x \in M}$.

Тогда $d_r \geq \tilde{d}$, откуда $d_r|_{S\times S} \geq d|_{S\times S}$, и в силу выбора вписанного риманова объёма в качестве определения финслерова объёма $\mathrm{vol}_{d_r}(M) = \mathrm{vol}_{\tilde{d}}(M) < \mathrm{vol}_d(M)+\varepsilon$. В силу единственности эллипсоида Джона риманова структура метрики d_r непрерывна; её можно сгладить с сохранением неравенств $d_r|_{S\times S} \geq d|_{S\times S}$ и $\mathrm{vol}_{d_r}(M) < \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$. Таким образом, заполняющий объём реализуется гладкими римановыми метриками, что и требовалось. □

Определение 5.4. Пусть M — гладкое многообразие, X — банахово пространство, $f : M \to X$ — липшицево отображение. Пусть зафиксирован некоторый функционал финслерова объёма. Будем называть *площадью* отображения (поверхности) f величину $\mathrm{area}(f) = \mathrm{vol}_d(M)$, где d — метрика на M, заданная формулой $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, vol_d — мера, определяемая этой липшицевой метрикой и выбранным функционалом финслерова объёма (см. определение 4.12).

Если банахово пространство X — сопряжённое к сепарабельному (например, имеет вид $L^\infty(\mu)$, где μ — конечная мера), то площадь отображения стандартным образом вычисляется через его слабый дифференциал, а именно имеет место следующее

Предложение 5.5. *Пусть X — банахово пространство, сопряжённое к сепарабельному, M — гладкое многообразие, $f : M \to X$ — липшицево отображение. Тогда* $\mathrm{area}(f) = \int_M \nu_f$, *где ν_f — плотность на M, значение которой на n-векторе $\sigma \in T_xM$ равно*

$$\nu_f(\sigma) = \mathrm{vol}_{(d^w_x f)^*\|\cdot\|_X},$$

если f слабо дифференцируемо в точке x. Здесь звёздочка обозначает перенос полунормы линейным отображением, т.е. $(d^w_x f)^*\|\cdot\|_X$ — полунорма $\|\cdot\|$ на T_xM, заданная равенством $\|v\| = \|d^w_x f(v)\|_X$.

Доказательство. Следует из определения площади и теоремы 3.7. □

Теорема 5.6. *Для любого функционала финслерова объёма верно следующее. Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — конечная мера на произвольном множестве, M — гладкое многообразие, $S = \partial M$.*

1. *Пусть d_0 — липшицева метрика на S, $f : (S, d_0) \to X$ — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объём пространства (S, d_0) в классе липшицевых (или, что то же самое, гладких строго выпуклых финслеровых) метрик на M равен*

$$\inf\{\mathrm{area}(F) : F : M \to X \text{ — липшицево, } F|_S = f\}.$$

2. *Пусть d — липшицева метрика на M. Тогда для любого изометрического отображения $F : (M, d) \to X$ верно следующее: (M, d) является*

минимальным заполнением в классе всех многообразий с липшицевыми метриками тогда и только тогда, когда F реализует минимум площади среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.

Доказательство. 1. Пусть $F : M \to X$ — липшицево отображение, $F|_S = f$. Рассмотрим на M липшицеву метрику d, индуцированную отображением F (т.е. заданную равенством $d(x,y) = \|F(x) - F(y)\|$). По определению площади $\mathrm{area}(F) = \mathrm{vol}(M,d)$. В силу изометричности отображения $f = F|_S$ относительно d_0, имеем $d|_{S\times S} = d_0$. Следовательно, заполняющий объём пространства (S, d_0) не превосходит $\mathrm{area}(F)$. В силу произвольности F заполняющий объем не превосходит инфимума таких площадей.

Обратно, если d — такая липшицева метрика на M, что $d|_{S\times S} \geq d_0$, то по предложению 1.6 существует нерастягивающее отображение $F : (M,d) \to X$. Поскольку F нерастягивающее, индуцируемая им метрика на M не превосходит d, следовательно, $\mathrm{area}(F) \leq \mathrm{vol}(M,d)$. Переходя к инфимуму по (M,d), получаем требуемое.

2. Тривиально следует из первого утверждения теоремы. □

Подставляя в качестве определения объёма вписанный риманов объём, из теоремы 5.6 и второго утверждения теоремы 5.2 получаем

Следствие 5.7. *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — конечная мера на произвольном множестве, M — гладкое многообразие, $S = \partial M$. Будем называть площадью поверхности в X площадь, определяемую функционалом вписанного риманова объёма.*

1. *Пусть d_0 — липшицева метрика на S, $f : (S, d_0) \to X$ — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объём пространства (S, d_0) в классе римановых метрик на M равен*

$$\inf\{\mathrm{area}(F) : F : M \to X \text{ — \textit{липшицево}, } F|_S = f\}.$$

2. *Пусть d — риманова метрика на M. Тогда для любого изометрического отображения $F : (M,d) \to X$ верно следующее: (M,d) является минимальным заполнением в классе всех римановых многообразий тогда и только тогда, когда F реализует минимум площади среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.*

§6. Полуэллиптичность

Определение 6.1. Будем называть функционал n-мерного финслерова объёма *полуэллиптическим над* $\mathbf{Z}$, если порождаемый им функционал n-мерной площади поверхности в любом конечномерном банаховом пространстве V обладает следующим свойством: образ $L(D^n)$ стандартного диска $D^n \subset \mathbf{R}^n$ при любом инъективном линейном отображении $L : \mathbf{R}^n \to V$, минимизирует площадь среди всех ориентированных липшицевых поверхностей в V с тем же краем.

Будем называть функционал объёма *топологически полуэллиптическим*, если аналогичная минимальность имеет место в классе всех липшицевых поверхностей, параметризованных диском D^n, и *полуэллиптическим над* $\mathbf{R}$, если она имеет место в классе всех липшицевых цепей с вещественными коэффициентами.

Другими словами, функционал объёма полуэллиптичен, если порождаемый им интегранд площади полуэллиптичен в любом конечномерном банаховом пространстве. Представляется правдоподобным, что в этом случае интегранд площади эллиптичен в пространствах со строго выпуклыми нормами. Эллиптичность интегранда площади играет важную роль в теории минимальных поверхностей (см. [1; 16, гл. 5]). В [8] показаны связи между полуэллиптичностью и заполняющими объёмами, а также асимптотическими объёмами периодических метрик.

Очевидно, что полуэллиптичность над $\mathbf{R}$ влечёт полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$. Обратное неверно, контрпример построен в [9]. Полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$, очевидно, влечёт топологическую, а при $n \geq 3$ эти два свойства эквивалентны [17, прил. 2, предложение A$'$].

Полуэллиптичность объёма по Буземану и объёма по Холмсу–Томпсону является по большей части открытым вопросом. В коразмерности 1 оба объёма полуэллиптичны (это эквивалентно выпуклости тел сечений и тел проекций соответственно, см. [13, 23]). Двумерный объём по Холмсу–Томпсону топологически полуэллиптичен, но не полуэллиптичен над $\mathbf{R}$ [8]. Вопрос об полуэллиптичности объёма по Буземану в коразмерностях, больших 1, остается полностью открытым.

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 6.2. *Пусть X — нормированное пространство, $Y \subset X$ — n-мерное линейное подпространство. Тогда существует такое линейное отображение $P : X \to Y$, что*

1. *P является проектором на Y, т.е. $P|_Y = id_Y$.*
2. *Для любого липшицева отображения $f : M \to X$, где M — гладкое n-мерное многообразие, выполняется неравенство* $\operatorname{area}(P \circ f) \leq \operatorname{area}(f)$, *где* area *— площадь, порождаемая функционалом вписанного риманова объёма.*

Как следствие функционал вписанного риманова объёма полуэллиптичен над $\mathbf{R}$.

Доказательство. Доказательство основано на идеях из работы [7]. Сначала предположим, что пространство X — сопряжённое к сепарабельному. Тогда по предложению 5.5 достаточно построить проектор, не увеличивающий n-мерную площадь на n-мерных линейных подпространствах пространства X. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.3 (см. [7, лемма 1.3]). *Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство. Тогда существуют конечный набор $\{L_i\}_{i=1}^N$ нерастягивающих линейных функций $L_i : (V, \|\cdot\|) \to \mathbf{R}$ и набор $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ положительных чисел, такие, что $\sum \lambda_i = n$ и $\sum \lambda_i L_i^2(v) \geq \|v\|$ для всех $v \in V$.*

Применяя эту лемму к подпространству Y, снабжённому сужением нормы $\|\cdot\|_X$, получаем набор нерастягивающих линейных функций $L_i : Y \to \mathbf{R}$ и коэффициентов $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, таких, что $\sum \lambda_i = n$ и $\sum \lambda_i L_i^2 \geq \|\cdot\|_X^2$ всюду на Y. По теореме Хана–Банаха функции L_i продолжаются до нерастягивающих линейных функций $\tilde{L}_i : X \to \mathbf{R}$. Рассмотрим квадратичную форму Q на X, заданную равенством $Q(x) = \sum \lambda_i \tilde{L}_i^2$. Обозначим через area_Q n-мерную площадь относительно евклидовой полунормы $\sqrt{Q}$.

Докажем, что $\mathrm{area}_Q \leq \mathrm{area}$ на любом n-мерном линейном подпространстве $W \subset X$. Напомним, что под площадью здесь подразумевается вписанный риманов объём индуцированной метрики. Пусть $|\cdot|_W$ — евклидова норма на W, единичный шар которой является эллипсоидом Джона сужения нормы $\|\cdot\|_X$ на W. Тогда на W по определению имеем $|\cdot|_W \geq \|\cdot\|_X$ и $\mathrm{vol}_{|\cdot|_W} = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_X}$. Из неравенства $|\cdot|_W \geq \|\cdot\|_X$ следует, что сужения $\tilde{L}_i|_W$ являются нерастягивающими относительно нормы $|\cdot|_W$, следовательно,

$$\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}(L_i^2|_W) \leq 1,$$

откуда

$$\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}(Q|_W) \leq \sum \lambda_i = n.$$

По неравенству Коши отсюда следует, что

$$\det{}_{|\cdot|_W}(Q|_W) \leq \left(\tfrac{1}{n}\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}(Q|_W)\right)^n \leq 1.$$

(Здесь $\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}$ и $\det_{|\cdot|_W}$ обозначают соответственно след и определитель квадратичной формы в евклидовом пространстве $(W, |\cdot|_W)$.) Следовательно, форма объёма на W, определяемая квадратичной формой $Q|_W$, не превосходит формы объёма, определяемой нормой $|\cdot|_W$. Таким образом, $\mathrm{area}_Q \leq \mathrm{area}$ на W.

Из неравенства $Q(x) \geq \|x\|_X^2$ для всех $x \in Y$ следует, что на подпространстве Y выполняется неравенство $\mathrm{area}_Q \geq \mathrm{area}$, откуда $\mathrm{area}_Q = \mathrm{area}$ на Y.

Пусть $P : X \to Y$ — ортогональная проекция X на Y относительно квадратичной формы Q. Поскольку ортогональная проекция не увеличивает длины векторов, она не увеличивает и площадь, вычисляемую относительно Q, значит,

$$\operatorname{area}(P(A)) = \operatorname{area}_Q(P(A)) \leq \operatorname{area}_Q(A) \leq \operatorname{area}(A)$$

для любого измеримого A, лежащего в n-мерном линейном подпространстве $W \subset X$. Следовательно, отображение P — искомое. Таким образом, теорема доказана в случае, когда пространство X — двойственное к сепарабельному.

Рассмотрим общий случай. Пусть $S = \{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное подмножество единичной сферы подпространства Y. Для каждого i по теореме Хана–Банаха существует нерастягивающее линейное отображение $f_i : X \to \mathbf{R}$ такое, что $f_i(s_i) = 1$. Определим линейное отображение $f : X \to \ell_\infty$ формулой

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Это отображение — нерастягивающее, поскольку таковыми являются все f_i. При этом сужение $f|_Y$ — изометрическое. Действительно, для любого $x \in Y$ с $\|x\|_X = 1$ имеем

$$\|f(x)\|_\infty = \sup_i f_i(x) \geq \sup_i (f_i(s_i) - \|x - s_i\|_X) = \sup_i (1 - \|x - s_i\|_X) = 1,$$

так как f нерастягивающее и S плотно в единичной сфере подпространства Y. Пространство ℓ_∞ — двойственное к сепарабельному, поэтому по уже доказанному существует проектор $P_0 : \ell_\infty \to f(Y)$, не увеличивающий n-мерные площади. Тогда отображение $P = (f|_Y)^{-1} \circ P_0 \circ f$ — искомое. □

Список литературы

[1] Almgren F. J., jr., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 321–391.

[2] Álvarez-Paiva J. C., Berck G., *What is wrong with the Hausdorff measure in Finsler spaces*, Preprint, 2004, `arXiv:math.DG/0408413`.

[3] Álvarez-Paiva J. C., Thompson A. C., *Volumes on normed and Finsler spaces*, A Sampler of Riemann–Finsler Geometry (D. Bao, R. Bryant, S.-S. Chern, and Z. Shen, eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., No. 50, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 1–48.

[4] Benyamini Y., Lindenstrauss J., *Geometric nonlinear functional analysis.* Vol. 1, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[5] Besicovitch A., *On two problems of Loewner*, J. London Math. Soc. **27** (1952), 141–144.

[6] Бураго Д., Иванов С., *Изометрические вложения финслеровых многообразий*, Алгебра и анализ **5** (1993), №1, 179–192.

[7] Burago D., Ivanov S., *On asymptotic volume of tori*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 800–808.

[8] Burago D., Ivanov S., *On asymptotic volume of Finsler tori, minimal surfaces in normed spaces, and symplectic filling volume*, Ann. of Math. (2) **156** (2002), 891–914.

[9] Burago D., Ivanov S., *Gaussian images of surfaces and ellipticity of surface area functionals*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), 469–490.

[10] Burago D., Ivanov S., *Boundary rigidity and filling volume minimality of metrics close to a flat one* (to appear).

[11] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В., *Курс метрической геометрии*, Ин-т компьют. исслед., М.–Ижевск, 2004.

[12] Busemann H., *Intrinsic area*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 234–267.

[13] Busemann H., *A theorem on convex bodies of the Brunn–Minkowski type*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35** (1949), 27–31.

[14] Busemann H., Ewald G., Shephard G. C., *Convex bodies and convexity on Grassmann cones.* I–IV, Math. Ann. **151** (1963), 1–41.

[15] De Cecco G., Palmieri G., *LIP manifolds: from metric to Finslerian structure*, Math. Z. **218** (1995), 223–237.

[16] Федерер Г., *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.

[17] Gromov M., *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **18** (1983), 1–147.

[18] Holmes R. D., Thompson A. C., n-*dimensional area and content in Minkowski spaces*, Pacific J. Math. **85** (1979), 77–110.

[19] Иванов С., *О двумерных минимальных заполнениях*, Алгебра и анализ **13** (2001), №1, 26–38.

[20] John F., *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, Intersci. Publ., Inc., New York, NY, 1948, pp. 187–204.

[21] Michel R., *Sur la rigidité imposée par la longuer des géodésiques*, Invent. Math. **65** (1981/82), 71–83.

[22] Pu P., *Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. **2** (1952), 55–71.

[23] Thompson A. C., *Minkowski geometry*, Encyclopedia Math Appl., vol. 63, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[24] Schneider R., *On the Busemann area in Minkowski spaces*, Beitr. Algebra Geom. **42** (2001), 263–273.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: svivanov@pdmi.ras.ru

Поступило 29 мая 2007 г.