

АВХАДИЕВ Р. Г., ЖУРБЕНКО Л. Н.

## НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО $x$ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Обратные краевые задачи об отыскании области  $D_z$  с границей  $L_z$  и регулярной в ней функции  $w(z)$ , когда граничные условия

$$w(z)|_{L_z} = f(x)$$

заданы в функции декартовой координаты  $x$ , изучены в работах [1, с. 43, 44], [2]. Регулярная функция  $z(\zeta)$ , однолистно отображающая круг  $|\zeta| < 1$  на искомую область  $D_z$ , записывается в виде интеграла Шварца

$$z(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + i\alpha, \quad (1)$$

где плотность  $x(\gamma)$  есть гельдерова или непрерывная вещественная функция, имеющая два промежутка монотонности,  $\alpha = \text{const}$ .

Рассмотрим (1) при одном из следующих двух предположений относительно  $x(\gamma)$ :

1) функция  $x(\gamma) \neq \text{const}$ , не убывает на  $[0, \pi]$  и не возрастает на  $[\pi, 2\pi]$ , кусочно-непрерывна с конечным числом точек разрыва 1-го рода, причем  $x(0) = x(2\pi) = a_0$ ,  $x(\pi) = b_0$ ,  $a_0, b_0$  — конечные числа;

2) функция  $x(\gamma)$  обладает всеми свойствами предположения 1), только  $a_0 = -\infty$ ,  $b_0 = +\infty$ .

В работе будет показано, что предположения 1), 2) влекут за собой изменение формулировки обратной краевой задачи и свойств искомого контура  $L_z$ . Так, один разрыв в точке  $\gamma_1 \in [0, \pi]$ ,  $x(\gamma_1 - 0) = a_1$ ,  $x(\gamma_1 + 0) = b_1$ , возникает, если для исходной функции

$$f(x) = f^j(x), \quad j = 1, 2, \quad x \in [a_0, b_0]$$

считать функцию  $f(x)$  непрерывной на  $[a_0, a_1]$ ,  $[b_1, b_0]$  и не заданной на  $[a_1, b_1]$ , а  $f(x)$  — непрерывной на  $[a_0, b_0]$ . Искомый контур  $L_z$  в таком случае будет иметь бесконечные ветви с асимптотами  $x = a_1$ ,  $x = b_1$ . Будут исследованы вопросы единственности, существования и устойчивости решений поставленных задач.

1°. Обозначим через  $\gamma_m^j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $m = \overline{1, k}$ , точки разрыва функции  $x(\gamma)$ . Пусть  $\gamma_m^1 \in (0, \pi)$ ,  $\gamma_m^2 \in (\pi, 2\pi)$ , и  $a_m^j = x(\gamma_m^j - 0)$ ,  $b_m^j = x(\gamma_m^j + 0)$  — односторонние пределы  $x(\gamma)$  (для удобства в обозначениях считаем, что число точек разрыва на  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$  одинаково).

В силу предположения 1) для функции  $x(\gamma)$  и введенных обозначений будут справедливы следующие неравенства:

$$a_0 < a_1^1 < b_1^1 < \dots < a_k^1 < b_k^1 < b_0,$$

$$a_0 < b_k^2 < a_k^2 < \dots < b_1^2 < a_1^2 < b_0.$$

Пусть двузначная функция  $f(x) = f^j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , удовлетворяет на  $[a_0, b_0]$  следующим требованиям:

a<sub>1</sub>)  $f(x)$ ,  $f^j(x)$  однозначны и непрерывны на множествах  $M = [a_0, a_1^1] + \bigcup_{m=1}^k [b_m^1, a_{m+1}^1]$ ,  $M^2 = [a_0, b_k^2] + \bigcup_{m=1}^k [a_m^2, b_{m-1}^2]$ ,  
 $a_{k+1}^1 = b_0$ ,

соответственно;

a<sub>2</sub>)  $f^j(x)$  не заданы на  $B = \bigcup_{m=1}^k [a_m^j, b_m^j]$ ;

$$a_3) \lim_{x \rightarrow a_m^1 - 0} f^1(x) = \lim_{x \rightarrow b_m^1 + 0} f^1(x) = \omega_m,$$

$$\lim_{x \rightarrow a_m^2 + 0} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow b_m^2 - 0} f^2(x) = \omega_m;$$

a<sub>4</sub>)  $\omega = f^j(x)$ ,  $j = 1, 2$  определяют в плоскости  $\omega$  замкнутую жорданову кривую  $L_\omega$ , ограничивающую область  $D_\omega$ .

Задача 1. Найти область  $D_z (\infty \notin D_z)$  и регулярную однолистную в ней функцию  $\omega(z)$ , для которой вещественная часть обратной функции  $q(\omega)$  ограничена ( $a_0 \leq \operatorname{Re} q(\omega) \leq b_0$ ) и непрерывна в  $\bar{D}_\omega$ , за исключением точек  $\omega_m^j \in L_\omega$ , по заданным краевым условиям

$$\omega(z)|_{L_z} = f^j(x), \quad j=1, 2, \quad x \in [a_0, b_0].$$

Функция  $f^j(x)$  от декартовой координаты  $x$  удовлетворяет условиям  $a_1) - a_4)$ .

Отметим, что к задаче 1 приводится следующая обратная задача (для параметра  $z$  подобная задача изучена в работах [1, с. 60] [3]).

Пусть

$$\operatorname{Re} \omega = g_1^j(x), \quad |\omega| = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)} = g_2^j(x)$$

есть краевые условия на границе  $L_z$  области  $D_z$ , причем  $g_1^j(x)$ ,  $g_2^j(x)$  удовлетворяют условиям  $a_1) - a_3)$ . Кроме того, предположим, что  $g_2^j(x) > 0$ ,  $|g_1^j(x)| \leq g_2^j(x)$ , уравнение  $|g_1^j(x)| = g_2^j(x)$  имеет конечное число корней, различных при разных  $j$ , и заданы знаки  $\psi(x)$  между корнями уравнения. Тогда

$$f^j(x) = \omega(z)|_{L_z} = g_1^j(x) + i \operatorname{sign} \psi \cdot \sqrt{[g_2^j(x)]^2 - [g_1^j(x)]^2} \quad (2)$$

и для функции (2) можно ставить задачу 1.

Исследуем решение задачи 1. Справедлива

**Теорема 1.** Если  $f^j(x)$  удовлетворяет условиям  $a_1) - a_4)$ , то при фиксировании  $\operatorname{Im} q(\omega_0) = y_0$ ,  $\omega_0 \in D_\omega$  задача 1 имеет не более одного решения.

**Доказательство.** Допустим противное, т. е. при одном начальном условии (2) существуют две области  $D_{z_1}$ ,  $D_{z_2}$  и, соответственно, две однолистные функции  $\omega_1(z)$ ,  $\omega_2(z)$ . Обратные функции  $q_1(\omega)$ ,  $q_2(\omega)$  являются регулярными и однолистными в области  $D_\omega$ , ограниченной замкнутой жордановой кривой  $L_\omega$  с уравнением (2).

Функция  $\operatorname{Re} [q_1(\omega) - q_2(\omega)]$  ограничена, непрерывна за исключением точек  $\omega_m$  и

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega^*} \operatorname{Re} [q_1(\omega) - q_2(\omega)] = 0, \quad \omega^* \in L_\omega, \quad \omega^* \neq \omega_m.$$

По обобщенному принципу экстремума [4, с. 211] для гармонических функций отсюда следует равенство  $\operatorname{Re} q_1(\omega) \equiv \operatorname{Re} q_2(\omega)$ ,  $\omega \in D_\omega$ . Из условий Коши — Римана имеем  $\operatorname{Im} q_1(\omega) \equiv \operatorname{Im} q_2(\omega) + \alpha_1$ , причем  $\alpha_1 = 0$  в силу требования  $\operatorname{Im} q_1(\omega_0) = \operatorname{Im} q_2(\omega_0) = y_0$ . Следовательно,  $q_1(\omega) \equiv q_2(\omega)$ ,  $\omega \in D_\omega$ , области  $D_{z_1}$ ,  $D_{z_2}$  совпадают, и  $\omega_1(z) \equiv \omega_2(z)$ .

Теорема доказана.

Покажем существование решения задачи 1. Пусть через  $f^j(x)$  обозначено то значение функции  $f^j(x)$ , которое соответствует положительному обходу контура  $L_\omega$  при движении от  $f^j(a_0)$  к  $f^j(b_0)$ . Реализуем, как в [1, с. 43], однолистное конформное отображение  $w = \omega(\zeta)$  круга  $|\zeta| < 1$  на область  $D_\omega$ , причем будем считать, что

$$\omega(1) = f^j(a_0); \omega(i) = f^j(\tilde{a}), \quad b_m < \tilde{a} < a_{m+1},$$

$$m = \overline{1, k}, \quad \omega(-1) = f^j(b_0). \quad (3)$$

По теореме [5, с. 46] функция  $\omega(\zeta)$  непрерывна в  $|\zeta| \leq 1$ . Исходя из равенства  $f^j(x) = \omega(e^{i\gamma})$ , которое выражает соответствие точек отрезков из пункта  $a_1$  оси  $x$  и контуров  $L_\omega$ ,  $\{\zeta: |\zeta| = 1\}$ , находим зависимость  $x = x(\gamma)$ . В силу условий  $a_1 - a_4$  функция  $x(\gamma)$  будет обладать свойствами 1). Следовательно, регулярная функция  $z(\zeta)$ , отображающая  $|\zeta| < 1$  на  $D_z$ , записывается в виде (1).

Вышеуказанные свойства  $x(\gamma)$  дают по [6], [7] однолистность  $z(\zeta)$ , по [4, с. 212] непрерывность  $\operatorname{Re} z(\zeta)$  в  $|\zeta| \leq 1$  за исключением точек  $\gamma_m$ , и по [4, с. 215] ограниченность  $\operatorname{Re} z(\zeta)$ . Тогда функция  $w(z) = \omega[z(z)]$  регулярна и однолистка в  $D_z$ , а вещественная часть обратной к ней функции ограничена ( $a_0 \leq \operatorname{Re} q(\omega^{-1}(w)) \leq b_0$ ), непрерывна за исключением точек  $w_m$  в  $D_\omega$ , т. е. условия задачи 1 выполнены, что и требовалось.

Для изучения свойств полученного контура  $L_z$  функцию  $x(\gamma)$  запишем в виде

$$x(\gamma) = \tilde{x}(\gamma) + \tilde{\tilde{x}}(\gamma), \quad (4)$$

где  $\tilde{x}(\gamma)$  — непрерывная на  $[0, 2\pi]$  функция,  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi)$ , а  $\tilde{\tilde{x}}(\gamma)$  — функция вида

$$\tilde{\tilde{x}}(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \in [0, \gamma_1^1], [\gamma_k^2, 2\pi], \\ C_m = \sum_{j=1}^m h_j^1, & \gamma \in [\gamma_m^1, \gamma_{m+1}^1], m = \overline{1, k-1}, \\ C_m = \sum_{j=1}^m h_{k-j+1}^2, & \gamma \in [\gamma_{k-m}^2, \gamma_{k-m+1}^2], m = \overline{1, k-1}, \\ A\gamma + B, & \gamma \in [\gamma_k^1, \gamma_1^2]. \end{cases}$$

Здесь через  $h_p$  обозначены скачки в точках  $\gamma_p^j$ ,

$$A = (C_k^2 - C_k^1)/(\gamma_1^2 - \gamma_k^1), \quad B = (C_k^1 \gamma_1^2 - C_k^2 \gamma_k^1)/(\gamma_1^2 - \gamma_k^1).$$

Отсюда, представляя (1) в виде суммы интегралов  $\tilde{I}(\zeta) + \tilde{I}(\zeta)$  с соответствующими плотностями и используя [8, стр. 442], делаем вывод о суммируемости  $\text{Im } z(e^{i\tau})$  и выполнении для нее свойства  $D$ , причем  $\text{Im } z(\exp i\gamma_m^j) = \pm\infty$ . Таким образом, искомый контур  $L_z$  не менее  $k$  раз будет проходить через бесконечно удаленную точку плоскости  $z$ .

Заметим, что обратная краевая задача, когда контур  $L_z$  проходит через бесконечно удаленную точку, в случае параметра  $s$  рассмотрена в работе [9].

Рассмотрим случай 2) для плотности  $x(\gamma)$  интеграла (1). Допустим, что краевые условия (2) в окрестности точек  $\mp\infty$  представляются соответственно в виде

$$\omega(z)|_{L_z} = f^j(x) = w_\mu + x^{-r_\mu} f_\mu^j(x), \quad j = 1, 2, \mu = 1, 2, \quad (5)$$

где  $r_\mu > 0$ ,  $w_\mu = \text{const}$ ,  $f_1^j(x)$  — функция, аналитическая при  $x \in [-\infty, -c]$ ,  $f_2^j(x)$  — при  $x \in [c, +\infty]$ , для достаточно больших  $c > 0$ ,  $f_\mu^j(\pm\infty) \neq 0$ ,  $f_\mu^j = \varphi_\mu + i\psi_\mu$ .

Предположим, что существуют пределы отношений

$$\psi_1^j(-\infty+0)/\varphi_1^j(-\infty+0), \quad \psi_2^j(+\infty-0)/\varphi_2^j(+\infty-0).$$

Тогда в точках  $w_\mu$  контур  $L_w$  будет иметь углы  $\pi\beta_\mu$ , причем [1, с. 67], [10]

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \arctg [(\psi_1^2 \varphi_1^1 - \psi_1^1 \varphi_1^2)/(\varphi_1^1 \varphi_1^1 + \psi_1^1 \psi_1^1)],$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\pi} \arctg [(\psi_2^2 \varphi_2^1 - \psi_2^1 \varphi_2^2)/(\varphi_2^1 \varphi_2^1 + \psi_2^1 \psi_2^1)].$$

Будем рассматривать случай, когда  $0 < \beta_\mu \leq 2$ ,  $0 < \beta_\mu \cdot r_\mu^{-1} < 1$ .

По теореме Лихтенштейна [11] функция, отображающая  $|\zeta| < 1$  на область  $D_w$ , в окрестности точек  $\zeta_\mu = \omega^{-1}(w_\mu)$  будет иметь вид

$$\omega(\zeta) - w_\mu = (\zeta - \zeta_\mu)^{\beta_\mu} \omega_\mu(\zeta), \quad (6)$$

где  $\omega_\mu(\zeta)$  — однозначная, дифференцируемая и отличная от нуля вместе со своей производной при  $\zeta = \zeta_\mu$  функция.

Используя соотношение  $|f^j(x) - w_\mu| = |\omega(e^{i\gamma}) - w_\mu|$ , получим

$$\begin{aligned} x(\gamma) &= |f_\mu^j[x(\gamma)]| r_\mu^{-1} \cdot |\omega_\mu(e^{i\gamma})|^{-r_\mu^{-1}} \cdot \left| \sin \frac{\gamma - \lambda_\mu}{2} \right|^{-\beta_\mu \cdot r_\mu^{-1}} = \\ &= x_\mu(\gamma) \cdot \left| \sin \frac{\gamma - \lambda_\mu}{2} \right|^{-\beta_\mu \cdot r_\mu^{-1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

причем в силу (3)  $\lambda_1 = 0$ ,  $2\pi$ ,  $\lambda_2 = \pi$ . Тогда функцию (7) на отрезке  $[\varepsilon, 2\pi + \varepsilon]$ ,  $0 < \varepsilon < \pi$ , можно записать в виде

$$x(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \left| \sin \frac{\gamma - 2\pi}{2} \right|^{-x_1} \cdot \left| \sin \frac{\gamma - \pi}{2} \right|^{-x_2}, \quad x_\mu = \beta_\mu \cdot r_\mu^{-1}, \quad (8)$$

с ограниченной и отличной от нуля функцией  $\chi(\gamma)$ .

При условии (5) интеграл (1) с плотностью (8) является решением следующей задачи.

*Задача II. Найти область  $D_z (\infty \notin D_z)$  и регулярную однолистную в ней функцию  $w(z)$ , когда обратная функция  $q(w)$  в окрестности точек  $w_\mu$  имеет вид*

$$q(w) = \frac{q_\mu(w)}{(w - w_\mu)^{r_\mu^{-1}}},$$

где  $q_\mu(w)$  — вещественная, ограниченная и отличная от нуля функция, и  $\operatorname{Re} q(w)$  непрерывна в  $\bar{D}_w$  за исключением точек  $w_m$ ,  $w_\mu$ , по заданным краевым условиям  $w(z)|_{L_z} = f^j(x)$  с соотношением (5) в окрестности  $\pm\infty$ .

Единственность, существование, однолистность решения задачи II доказывается аналогично случаю задачи 1.

Изучим свойства контура  $L_z$ . В работе [12] для плотности (8) с гельдеровской на отрезках  $[\varepsilon, \pi]$ ,  $[\pi, 2\pi + \varepsilon]$  функцией  $\chi(\gamma)$  дано представление  $y(\gamma) = \operatorname{Im} z(e^{i\gamma}) - i\alpha$  в виде

$$\begin{aligned} y(\gamma) &= -\frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi+\varepsilon} f(\gamma') \operatorname{ctg} \frac{\gamma' - \gamma}{2} d\gamma' + \sum_{\mu=1}^2 Q_\mu(\gamma) - \\ &- \sum_{\mu=1}^2 2^{x_\mu} l_\mu \sin[\alpha_\mu - (\pi + \lambda_\mu) x_\mu], \quad \lambda_1 = \pi, \quad \lambda_2 = 2\pi. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $f(\gamma')$  — гельдеровская на  $[\varepsilon, 2\pi + \varepsilon]$  функция,

$$Q_\mu(\gamma) = l_\mu \left| \sin \frac{\gamma - \lambda_\mu}{2} \right|^{-x_\mu} \cdot \sin(\alpha_\mu - x_\mu \theta_\mu(\gamma)),$$

причем

$$\theta_\mu(\gamma) = \begin{cases} 1,5\pi + \frac{\gamma + \lambda_\mu}{2}, & \varepsilon < \gamma < \lambda_\mu, \\ 0,5\pi + \frac{\gamma + \lambda_\mu}{2}, & \lambda_\mu \leq \gamma \leq 2\pi + \varepsilon, \end{cases}$$

а постоянные  $\{\alpha_\mu, l_\mu\}$  — решения системы двух трансцендентных уравнений [см. 12].

Легко видеть, что справедливы предельные равенства

$$\lim_{\gamma \rightarrow \lambda_\mu \pm 0} \sin(\alpha_\mu - x_\mu \theta_\mu) = \pm c_\mu, \quad c_\mu = \text{const},$$

$$\mu, \nu = 1, 2, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \lambda_\mu \pm 0} Q(\gamma) = \pm \infty.$$

Отсюда видно, что  $y(2\pi \pm 0) = \pm \infty$ ,  $y(\pi \pm 0) = \pm \infty$ , и ветви контура  $L_z$  при  $x \rightarrow \pm \infty$  расходятся. Очевидно, что при замене (5) другими условиями ветви  $L_z$  при  $x \rightarrow \pm \infty$  могут вести себя по-другому. В рассматриваемом случае контур  $L_z$ , кроме того, будет обладать всеми особенностями контура задачи 1.

2°. Перейдем к исследованию устойчивости решений задач I и II. Введем в рассмотрение функции  $f_n^j(x)$ ,  $\omega_n(\zeta)$ ,  $x_n(\gamma)$ ,  $z_n(\zeta)$ ,  $w_n(z)$  и области  $D_{\omega n}$ ,  $D_{z n}$  с границами  $L_{\omega n}$ ,  $L_{z n}$ . Здесь  $f_n^j(x)$  — любая последовательность функций, удовлетворяющих тем же условиям, что и  $f^j(x)$  с одинаковым поведением (5) в окрестности  $\mp \infty$ ;  $\zeta = \omega_n^{-1}(w)$  — функция, однолистно и конформно отображающая  $D_{\omega n}$ , ограниченную контуром  $L_{\omega n}$ , на круг  $|\zeta| < 1$  с нормировкой

$$\omega_n(1) = f_n^j(a_0), \quad \omega_n(i) = f_n^j(\tilde{a}), \quad b_m < \tilde{a} < a_{m+1}, \quad m = \overline{1, k},$$

$$\omega_n(-1) = f_n^j(b_0);$$

$x_n(\gamma)$  — кусочно-непрерывная функция с конечным числом разрывов 1-го рода в точках  $\gamma_{mn}^j$ ,  $m = \overline{1, k}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и обладающая всеми остальными свойствами  $x(\gamma)$ ;  $\{z_n(\zeta), w_n(z)\}$  — решение задачи 1 (II) при  $w_n(z) |_{L_{z n}} = f_n^j(x)$ , причем

$$z_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_n(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + i\alpha_n, \quad (1')$$

где  $\alpha_n = \text{const}$ .

Определение 1 [ср. 13, с. 8]. Решение  $\{z(\zeta), \omega(z)\}$  задачи 1 (II) называется устойчивым, если из предположений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^j(x) - f^j(x)\|_C = 0, \quad x \in M = [a_0, b_0] \setminus \sum_{m=1}^k (a_m^j, b_m^j), \quad (10)$$

$$\operatorname{Im} q_n(\omega_0) = y_{0n} \rightarrow \operatorname{Im} q(\omega_0) = y_0, \quad (11)$$

следует

$$z_n(\zeta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z(\zeta) \quad \text{внутри } |\zeta| < 1 \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n(e^{i\gamma}) - z(e^{i\gamma})\|_{L_P} = 0, \quad \gamma \in [0, 2\pi], \quad (13)$$

$$\omega_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \omega(z) \quad \text{внутри } D_z, \quad (14)$$

где  $C$  — пространство непрерывных функций,  $L_P$  — пространство функций, интегрируемых с  $p$ -й степенью,  $\xrightarrow{\infty}$  означает равномерную сходимость.

В силу (10) точка  $\omega_0$  будет принадлежать  $D_{\omega_n} \cap D_\omega$ , начиная с некоторого номера  $n > N$ .

Теорема 2. Для устойчивости решения  $\{z(\zeta), \omega(z)\}$  задачи 1 (II) в смысле определения 1 достаточно, чтобы  $f_n^j(x), f^j(x)$  на  $[a_0, b_0] \setminus \sum_{m=1}^k (a_m^j, b_m^j)$  удовлетворяли свойствам  $a_1) - a_4) (a_1) - a_4), (5)$ .

Докажем сначала устойчивость решения задачи 1. Так как  $\omega_0 \in D_{\omega_n} \cap D_\omega$ , из условия (10) следует по [5, с. 56] сходимость  $D_{\omega_n}$  к  $D_\omega$  как к ядру при  $n \rightarrow +\infty$ . По теореме о сходимости однолистных функций для областей, ограниченных кривыми Жордана [5, с. 60], имеем

$$\omega_n(\zeta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \omega(\zeta), \quad |\zeta| \leq 1. \quad (15)$$

Равенства  $f^j(x) = \omega(e^{i\gamma})$ ,  $f_n^j(x) = \omega_n(e^{i\gamma})$  и условия (10), (11) дают по [14]

$$\gamma_{mn}^j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma_m^j, \quad m = \overline{1, k}. \quad (16)$$

Введем непрерывную функцию  $\theta_n(\gamma) = \gamma_{1n}^j + \gamma_{2n}^j$ ,  $\gamma \in [0, 2\pi]$ , переводящую  $\gamma_{mn}^j$  в  $\gamma_m^j$ , т. е.

$$\theta_n(\gamma) = \gamma^j (\gamma_{m+1, n}^j - \gamma_{mn}^j) / (\gamma_{m+1}^j - \gamma_m^j) + (\gamma_{mn}^j \gamma_{m+1}^j - \gamma_{m+1, n}^j \gamma_m^j) / (\gamma_{m+1}^j - \gamma_m^j),$$

$$\gamma \in [\gamma_m^j, \gamma_{m+1}^j], \quad m = \overline{0, k}, \quad j = 1, 2, \quad \text{считаем } \gamma_{0n}^1 = \gamma_0 = 0, \quad \gamma_{k+1, n}^1 = \gamma_{k+1}^1 = \gamma_{0n}^2 = \gamma_0 = \pi, \quad \gamma_{k+1, n}^2 = \gamma_{k+1}^2 = 2\pi.$$

В силу (16) имеем

$$\theta_n(\gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma, \quad \gamma \in [0, 2\pi]. \quad (17)$$

Из неравенства  $|\omega_n(e^{i\theta_n(\gamma)}) - \omega(e^{i\gamma})| \leq |\omega_n(e^{i\theta_n(\gamma)}) - \omega(e^{i\theta_n(\gamma)})| +$   
 $+ |\omega(e^{i\theta_n(\gamma)}) - \omega(e^{i\gamma})|$

и условий (15), (17) получаем, что

$$\omega_n(e^{i\theta_n(\gamma)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \omega(e^{i\gamma}), \quad \gamma \in [0, 2\pi].$$

Тогда подобно [14]

$$x_n[\theta_n(\gamma)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x(\gamma), \quad \gamma \in [\gamma_m^j, \gamma_{m+1}^j], \quad (18)$$

где  $m = \overline{0, k}$   $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_{k+1}^1 = 2\pi$ ,  $\gamma_{k+1}^2 = \gamma_0 = \pi$ .

Легко видеть, что вследствие (16) коэффициент  $\eta_{1n}$  в  $\theta_n(\gamma) = \eta_{1n}\gamma + \eta_{2n}$  ограничен постоянной  $M$ . Тогда в силу неравенства

$$\int_0^{2\pi} |x_n(\gamma) - x(\gamma)| d\gamma = \int_0^{2\pi} \eta_{1n} |x_n[\theta_n(\gamma)] - x[\theta_n(\gamma)]| d\gamma \leq$$

$$\leq M \sum_{m=0}^k \left\{ \int_{\gamma_m^j}^{\gamma_{m+1}^j} |x_n[\theta_n(\gamma)] - x(\gamma)| d\gamma + \int_{\gamma_m^j}^{\gamma_{m+1}^j} |x[\theta_n(\gamma)] - x(\gamma)| d\gamma \right\}$$

и условий (17), (18) справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |x_n(\gamma) - x(\gamma)| d\gamma = 0. \quad (19)$$

Формулы (1), (1') и условия (19), (11) обеспечивают справедливость (12). Кроме того, из неравенства

$$\left| \int_0^t |x_n(\gamma)| d\gamma - \int_0^t |x(\gamma)| d\gamma \right| \leq \int_0^t |x_n(\gamma) - x(\gamma)| d\gamma < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon),$$

$t \in [0, 2\pi]$ , следует равностепенная непрерывность  $\int_0^t x_n(\gamma) d\gamma$ .

Теперь применима теорема Тумаркина [15], по которой справедливо равенство (13). Доказательство (14) проводится как в работе [2].

Для доказательства устойчивости решения задачи II достаточно показать выполнимость предельного равенства (19).

Как и в случае задачи 1, вне окрестностей точек  $0, \pi, 2\pi$  имеем (18). Аналогично (7), функция  $x_n(\gamma)$  в окрестности точек  $\lambda_1 = 0, 2\pi, \lambda_2 = \pi$ , представляется в виде

$$x_n(\gamma) = x_{\mu n}(\gamma) \left| \sin \frac{\gamma - \lambda_\mu}{2} \right|^{-x_\mu} = |f_\mu^j[x_n(\gamma)]| r_\mu^{-1} \cdot |\omega_{\mu n}(e^{i\gamma})|^{-r_\mu^{-1}} \times \\ \times \left| \sin \frac{\gamma - \lambda_\mu}{2} \right|^{-x_\mu}.$$

Покажем, что

$$|x_{\mu n}(\gamma)| < M = \text{const} \quad (20)$$

в соответствующих окрестностях точек  $\lambda_\mu, \mu = 1, 2$ . Для этого вследствие (10) достаточно показать, что

$$|\omega_{\mu n}(e^{i\gamma})| \geq \tilde{M} > 0, \tilde{M} = \text{const}, \mu = 1, 2, \quad (21)$$

причем  $\omega_{\mu n}(e^{i\gamma})$  определяется разложением  $\omega_n(\zeta)$  в окрестности  $\zeta_\mu = e^{i\lambda_\mu}$

$$\omega_n(\zeta) = w_\mu + (\zeta - \zeta_\mu)^{\beta_\mu} \omega_{\mu n}(\zeta), \mu = 1, 2.$$

В случае угла, образованного прямолинейными отрезками, функция  $\omega_{\mu n}(\zeta)$  разлагается в ряд Тейлора в окрестности  $\zeta = \zeta_\mu$  [4, с. 171]. Тогда, так как

$$(\omega_n(\zeta) - w_\mu)^{\beta_\mu} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\omega(\zeta) - w_\mu)^{\beta_\mu}$$

в окрестности  $w_\mu$  в силу (15), то коэффициенты разложения  $\omega_{\mu n}(\zeta)$  сходятся к коэффициентам для функции  $\omega_\mu(\zeta)$  и равномерно ограничены. Это обеспечивает равномерную сходимость  $\omega_{\mu n}(\zeta)$  к  $\omega_\mu(\zeta)$  [16, с. 292] в окрестности точек  $\zeta_\mu$ , и

(21) выполняется. При аналитичности  $f_\mu^j(x)$  в (5) всё вышесказанное справедливо из-за возможности отображения окрестностей угловых точек на углы, образованные прямолинейными отрезками, одинаковой для  $n = 1, 2 \dots$  аналитической функцией.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^{2\pi} |x_n(\gamma) - x(\gamma)| d\gamma = \left( \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \right) |x_n(\gamma) - \\ - x(\gamma)| d\gamma. \quad (22)$$

Слагаемые в правой части (22) обозначим через  $I_{jn}$ ,  $j = \overline{1, 5}$  соответственно. В силу (18)  $I_{2n}$ ,  $I_{4n}$  сходятся к нулю,  $I_{1n}$ ,  $I_{3n}$ ,  $I_{5n}$  ограничены сколь угодно малым числом при всех  $n$  вследствие неравенства (20). Следовательно, (19) выполнено.

Теорема доказана.

3°. Изучим устойчивость решения  $[z(\zeta), w(z)]$  задачи 1 (II) в более узком, чем определение 1, смысле. Найдем условия на  $f^j(x)$  в требовании (2), которые обеспечат непрерывность функции  $z(\zeta)$ , определяемой (1), в  $|\zeta| \leq 1$  за исключением точек  $\exp i\gamma_m$ ,  $m = \overline{1, k}$ .

Пусть непрерывная функция  $f^j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , удовлетворяет условиям [2] на  $M$ :  $v_1) = a_4$ ;  $v_2) f^j(x)$  дифференцируема на  $M$ , причем  $f^j(x)$ , непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек  $x_k$ , в которых  $\lim_{x \rightarrow x_k} f^j(x) = \infty$  и несобственный интеграл  $\int_M^j |f^j(x)| dx$  сходится;  $v_3) f^j(x) \neq 0$  на  $M$ .

При условиях  $v_2), v_3)$  простой замкнутый контур  $L_w$  будет кусочно-гладким. Дуговая абсцисса  $\sigma(x)$  этого контура может быть определена через функцию  $f^j(x)$ . Обозначим

$$l^* = \int_M^1 |f^1(x)| dx, \quad l = l^* + \int_M^2 |f^2(x)| dx,$$

т. е.  $l$  — общая длина контура  $L_w$ .

Дополнительно к введенным условиям подчиним  $L_w$  требованию

$$v_4) \quad \Lambda(w_1, w_2) \leq x |w_2 - w_1|,$$

где  $\Lambda(w_1, w_2)$  — длина наименьшей дуги между  $w_1, w_2 \in L_w$ ,  $x > 1$ .

**Теорема 3.** Если непрерывная функция  $f^j(x)$  на  $M$  подчинена условиям  $v_1) - v_4)$ , то функция  $z(\zeta)$  непрерывна в  $|\zeta| \leq 1$  за исключением окрестностей точек  $\exp i\gamma_m$ ,  $j = 1, 2$ ,  $m = \overline{1, k}$ .

Доказательство теоремы легко проводится с использованием результатов из работ [17], [2].

Рассмотрим функции  $f_n^j(x)$ , непрерывные на  $M^j$  со свойствами  $v_1) - v_4)$ , в которых введены соответствующие обозначения  $L_{wn}, l_n, x(n)$ .

Определение 2 [ср. 13, с. 9]. Решение  $\{z(\zeta), w(z)\}$  задачи 1 называется устойчивым, если из предположений (11),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^j(x) - f^j(x)\|_D = 0, \quad x \in M^j$$

следует (13) и для любого сколь угодно малого  $\delta > 0$  существует множество

$$E = [0, \gamma_1^1 - \delta] + \bigcup_{m=1}^{k-1} [\gamma_m^1 + \delta, \gamma_{m+1}^1 - \delta] + [\gamma_k^1 + \delta, \gamma_1^2 - \delta] + \\ + [\gamma_k^2 + \delta, 2\pi],$$

на котором

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n(e^{i\tau}) - z(e^{i\tau})\|_C = 0, \quad (23)$$

где  $D$  — пространство абсолютно-непрерывных функций.

Теорема 4. Для устойчивости решения задачи 1 в смысле определения 2 достаточно, чтобы функции  $f_n^j(x)$ ,  $f^j(x)$ ,  $x \in M^j$  удовлетворяли условиям  $v_1) - v_4)$ , причем

$$|f_n^j(x)| \geq K > 0,$$

где  $K = \text{const}$ , и в  $v_4)$  для  $f_n^j(x)$

$$1 < x(n) \leq x^* < \infty.$$

Доказательство. Вследствие наложенных ограничений имеем, что по [17], [13] плотность  $x_n(\gamma)$  удовлетворяет условию Гёльдера с постоянными  $B_1(n) \leq B_1 < \infty$ ,  $\lambda(n) \geq \lambda > 0$  при  $\gamma \in [\gamma_{m_1}^j, \gamma_{m_2+1, n}^j]$ ,  $j=1, 2$ ,  $m=0, \overline{k}$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $\gamma_{0n} = 0$ ,  $\gamma_{k+1, n} = \gamma_{0n} = \pi$ ,  $\gamma_{k+1, n} = 2\pi$ ,  $x_n(\gamma) \in H(B(n), \lambda(n))$ .

Воспользуемся теперь представлением (4) и

$$x_n(\gamma) = \tilde{x}_n(\gamma) + \tilde{\tilde{x}}_n(\gamma).$$

В последнем равенстве  $\tilde{x}_n(\gamma)$  — непрерывная функция на  $[0, 2\pi]$ ,  $\tilde{x}_n(0) = \tilde{x}_n(2\pi)$ ,  $\tilde{\tilde{x}}_n(\gamma)$  — функция подобного  $\tilde{\tilde{x}}(\gamma)$  вида

$$\tilde{x}_n(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \in [0, \gamma_{1n}^1], \gamma \in [\gamma_{kn}^2, 2\pi], \\ C_m^1, & \gamma \in [\gamma_{mn}^1, \gamma_{m+1, n}^1], m = \overline{1, k-1}, \\ C_m^2, & \gamma \in [\gamma_{k-m, n}^2, \gamma_{k-m+1}^2], m = \overline{1, k-1}, \\ A\gamma + B, & \gamma \in [\gamma_{kn}^2, \gamma_{1n}^1]. \end{cases}$$

Тогда из вида  $\tilde{x}_n(\gamma)$  следует, что

$$\tilde{x}_n(\gamma) \in H(B_2(n), \lambda(n)), B_2(n) \leq B_2 < \infty, \lambda(n) \geq \lambda > 0, \\ \gamma \in [0, 2\pi]. \quad (24)$$

Интегралы (1), (1') представим в виде

$$z_n(\zeta) = I_{1n}(\zeta) + I_{2n}(\zeta) \\ z(\zeta) = I_1(\zeta) + I_2(\zeta),$$

где  $I_{1n}(\zeta)$ ,  $I_1(\zeta)$ ,  $I_{2n}(\zeta)$ ,  $I_2(\zeta)$  — интегралы Шварца с плотностями  $\tilde{x}_n(\gamma)$ ,  $x(\gamma)$ ,  $\tilde{x}_n(\gamma)$ ,  $x(\gamma)$  соответственно. Из теоремы Привалова [5, с. 400] вследствие (24) получаем равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность  $I_{1n}(\zeta)$  в  $|\zeta| \leq 1$ .

Представим при  $\zeta = e^{i\tau}$  функцию  $I_{2n}(e^{i\tau})$  в виде суммы

$$I_{2n}(e^{i\tau}) = \sum_{\substack{m=1 \\ j=1, 2}}^{k-1} I_{mn}^j + I_n^3,$$

где

$$\operatorname{Im} I_{mn}^j = \frac{C_m^j}{2\pi} \int_{\gamma_{mn}^j}^{\gamma_{m+1, n}^j} \operatorname{ctg} \frac{\tau - \gamma}{2} d\gamma = \frac{C_m^j}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\tau - \gamma_{m+1, n}^j}{2} / \sin \frac{\tau - \gamma_{mn}^j}{2} \right|, \\ \operatorname{Im} I_n^3 = \frac{A}{\pi} \int_{\gamma_{kn}^2}^{\gamma_{1n}^1} \frac{\gamma - \tau}{2} \operatorname{ctg} \frac{\tau - \gamma}{2} d\gamma + \frac{A\tau + B}{2} \int_{\gamma_{kn}^2}^{\gamma_{1n}^1} \operatorname{ctg} \frac{\tau - \gamma}{2} d\gamma = \\ = \frac{A}{\pi} \int_{\gamma_k}^{\gamma_1} \eta_{1n} u \left( \frac{\eta_{1n}\gamma + \eta_{2n}\tau}{2} \right) d\gamma + \frac{A\tau + B}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\tau - \gamma_{1n}^2}{2} / \sin \frac{\tau - \gamma_{kn}^1}{2} \right|,$$

причем  $\frac{\gamma-\tau}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma-\tau}{2} = u \left( \frac{\gamma-\tau}{2} \right)$  — непрерывная по обеим переменным функция,  $\eta_{1n}\gamma + \eta_{2n} = \theta_n(\gamma)$ .

В силу (16) на множестве  $E$  при фиксированном сколь угодно малом  $\delta > 0$

$$I_{mn}^j(e^{i\tau}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I_m(e^{i\tau})$$

$$\frac{A\tau + B}{2} \ln \left| \sin \frac{\tau - \gamma_{1n}}{2} / \sin \frac{\tau - \gamma_{kn}}{2} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{A\tau + B}{2} \ln \left| \sin \frac{\tau - \gamma_1}{2} / \sin \frac{\tau - \gamma_k}{2} \right|.$$

Для первого интеграла в  $\operatorname{Im} I_n^3(e^{i\tau})$  имеем, используя (16), (17) и непрерывность функции  $u \left( \frac{\gamma-\tau}{2} \right)$ , равномерную сходимость

$$\frac{A}{\pi} \int_{\frac{1}{\gamma_k}}^{\frac{2}{\gamma_1}} \eta_{1n} u \left( \frac{\tau - \eta_{1n}\gamma - \eta_{2n}}{2} \right) d\gamma \quad \text{к} \quad \frac{A}{\pi} \int_{\frac{1}{\gamma_{kn}}}^{\frac{2}{\gamma_{1n}}} u \left( \frac{\tau - \gamma}{2} \right) d\gamma$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом,  $\{z_n(e^{i\tau})\}$  равномерно ограничена и равномерно непрерывна на множестве  $E$ , тогда по теореме Арцела [18, с. 103] можно выделить равномерно сходящуюся последовательность  $\{z_{n_k}(e^{i\tau})\}$ . Благодаря справедливости равенства (13) и непрерывности  $z(e^{i\tau})$  на множестве  $E$  получаем, что для любой сходящейся подпоследовательности пределом является  $z(e^{i\tau})$ . Отсюда следует выполнимость предельного равенства (23), что и требовалось.

Для исследования устойчивости решения задачи II дополнительно к условиям  $v_1) - v_4)$ , (5) для функций  $f^j(x)$ ,  $f_n^j(x)$ ,  $j=1, 2$ ,  $n=1, 2, \dots$  на  $(-\infty, +\infty)$  достаточно предположить, что функции  $x = x(\sigma)$ ,  $x = x_n(\sigma)$ , обратные к  $\sigma = \sigma(x)$ ,  $\sigma = \sigma_n(x)$ , имеют в окрестности  $\sigma_1 = 0$ ,  $l$ ,  $\sigma_2 = l^*$ ,  $\sigma_{1n} = 0$ ,  $l_n$ ,  $\sigma_{2n} = l_n^*$  разложения:

$$x(\sigma) = (\sigma - \sigma_\mu)^{-r_\mu - 1} \Omega_\mu(\sigma),$$

$$x_n(\sigma) = (\sigma - \sigma_{\mu n})^{-r_{\mu n} - 1} \Omega_{\mu n}(\sigma), \quad \mu = 1, 2,$$

$$\text{с } \Omega_\mu(\sigma) \in H(K, \lambda), \quad \Omega_{\mu n}(\sigma) \in H(K(n), \lambda(n))$$

$$K(n) \leq K^* < \infty, \quad \lambda(n) \geq \lambda > 0.$$

Тогда подобно доказательству теоремы 4 при использовании равенства (9) из [12] получим устойчивость решения задачи II в смысле определения 2, в котором

$$E = \bigcup_{m=0}^k \bigcup_{j=1, 2}^j [\gamma_m + \delta, \gamma_{m+1} - \delta], \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_{k+1} = \gamma_0 = \pi, \quad \gamma_{k+1} = 2\pi.$$

Заметим, что предельный случай задачи 1, когда  $a_m = b_m$ , соответствует результатам работы [2].

Авторы благодарят профессора Л. А. Аксентьева за ценные замечания при обсуждении результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казан. ун-та, 1965.
2. Кузнецова Л. Н. О единственности и устойчивости решений обратных краевых задач. — Труды семинара по краевым задачам. Изд-во Казан. ун-та, вып. 11, 1974, с. 131—137.
3. Авхадиев Р. Г. Неединственность решения обратных краевых задач, приводящихся к основным. — Труды семинара по краевым задачам, вып. 13. Изд-во Казан. ун-та, 1976, с. 3—12.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1973.
5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1966.
6. Аксентьев Л. А. Применение принципа аргумента к исследованию условий однолистности, I. — „Изв. вузов. Математика“, 1968, № 12, с. 3—15.
7. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. I. 1:2 (1952), p. 169—185.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., „Мир“, 1965.
9. Нужин М. Т. Отдельные случаи обратных краевых задач. — Уч. зап. КГУ, 1953, т. 113, кн. 10, с. 3—8.
10. Гахов Ф. Д., Мельник И. М. Особые точки контура в обратной краевой задаче теории аналитических функций. — „Украинск. мат. журн.“, 1959, т. 11, № 1, с. 25—37.
11. Lichtenstein L. Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken. — „Journal für reine und angewandte Math“, Bd. 140, 1911, S. 100—109.
12. Салимов Р. Б. К вычислению сингулярных интегралов с ядром Гильберта. — „Изв. вузов, Математика.“, 1968, № 12, с. 93—96.
13. Кузнецова Л. Н. Единственность и устойчивость решений обратных краевых задач для аналитических функций. Автореферат канд. дис. Казань, 1975.
14. Warschawski S. E. Über einige Konvergenzsätze aus der Theorie der konformen Abbildung. Gött. Nachrichten, Math. — Phys. Klasse, 1930, S. 344—369.
15. Тумаркин Г. Ц. Об условиях сходимости граничных значений последовательности аналитических функций. — „ДАН СССР“, 1952, т. 83, № 5, с. 655—658.
16. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., ГИТТЛ, 1950.
17. Warschawski S. E. On differentiability at the boundary in conformal mapping. — „Amer. Math. Soc. Proceedings“, 12, 1961, p. 614—620.
18. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., „Наука“, 1972.

*Должено на семинаре 2 февраля 1976 г.*