Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 5

ФИЗИКА

Э. Р. ВЕЛИБЕКОВ

МЕТОД ОБОБЩЕННОГО САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 12 I 1963)

Первые варианты микроскопической теории сверхпроводимости учитывали простейшее s-взаимодействие в виде прямоугольной ямы вблизи поверхности Ферми. В рамках этого приближения был получен спектр элементарных возбуждений, отделенный щелью от основного состояния. Как было впервые показано Н. Н. Боголюбовым, при этом, наряду с элементарными возбуждениями, в сверхпроводящих системах существуют также коллективные возбуждения, которые в случае нейтральной системы носят характер продольных квазиакустических волн, переходящих при включении кулоновского взаимодействия в обычные плазменные возбуждения ([1], [2]). В дальнейшем коллективные возбуждения исследовались для двухчастичного взаимодействия, разложенного по сферическим гармоникам ([3], [4]). При этом для s-взаимодействия были подтверждены упомянутые результаты. Для высших гармоник при условии отрицательности соответствующей постоянной взаимодействия были обнаружены коллективные возбуждения, обладающие моментом, равным моменту обусловливающего их взаимодействия.

В настоящей статье рассматриваются коллективные возбуждения на основе уравнений, полученных Н. Н. Боголюбовым в приближении обобщенного самосогласованного поля ([2]). Рассмотрим эти уравнения:

$$E\theta_q(p) = [\Omega(p-q) + \Omega(p)]\,\vartheta_q(p) + \frac{1}{V}\sum \vartheta_q(p')\,[J_q(p,p')\,a_q(p)\,a_q(p') + G_q(p,p')\,b_q(p)\,b_q(p')]; \tag{1}$$

$$E\vartheta_q(p) = [\Omega(p-q) + \Omega(p)]\,\theta_q(p) + \frac{1}{V}\sum \theta_q(p')\,[J_q(p,p')\,d_q(p)\,d_q(p') + I_q(p,p')\,c_q(p)\,c_q(p')], \tag{2}$$

где

$$a_q(p) = u_p u_{p-q} - v_p v_{p-q}, \qquad b_q(p) = u_p v_{p-q} + u_{p-q} v_p,$$
$$c_q(p) = u_p v_{p-q} - u_{p-q} v_p, \qquad d_q(p) = u_p u_{p-q} + v_p v_{p-q},$$
$$J_q(p,p') = J(p, -p+q; -p'+q, p'),$$
$$I(p,p') = J(p, p'-q; p', p-q) - J(p, p'-q; p-q, p') - J(p, -p'; -p'+q, p-q),$$
$$G_q(p,p') = J(p, p'-q; p', p-q) - J(p, p'-q; p-q, p') + J(p, -p'; -p'+q, p-q),$$
$$u_p = \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\Omega}\right)\right]^{1/2}, \qquad v_p = \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi}{\Omega}\right)\right]^{1/2},$$

ξ — энергия частицы, отсчитываемая от поверхности Ферми, $\Omega = \sqrt{\xi^2 + c^2}$, c — щель в спектре элементарных возбуждений. Заметим, что ядра J и I регулярны, а особенности в уравнениях (1) и (2), появляющиеся при наличии кулоновского взаимодействия, связаны с ядром G. Действительно, в радиально-симметричном случае $G_q(p,p') \to 2J(q) - J(p-p')$ и, поскольку $J(p-p')$ регулярно, особенность в ядре G_q при $q \to 0$ связана с кулоновским взаимодействием $J(q) = 4\pi e^2/q^2$.

Рассмотрим уравнения (1) и (2) для взаимодействия вида

$$\sum_{l=0}^{\infty} J_l(p,p') \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)^* Y_{lm}(\theta,\Phi), \tag{3}$$

где ϑ, φ и θ, Φ — углы векторов p', p соответственно в системе координат, в которой вектор q направлен вдоль оси z. Будем считать $J_l(p,p') = J_l$

постоянной и отличной от нуля при $-\omega \leqslant \xi \leqslant \omega$. Взаимодействие вида (3) позволяет алгебраизировать интегральные уравнения (1) и (2). Отделив в (1) кулоновское взаимодействие, введем новые переменные

$$X_{LM}(q) = \frac{1}{V}\sum_{p'} \theta_q(p') J_L Y_{LM}(\vartheta, \varphi)^* d_q(p'),$$

$$Z_{LM}(q) = \frac{1}{V}\sum_{p'} \theta_q(p') J_L Y_{LM}(\vartheta, \varphi)^* c_q(p'),$$

$$W_{LM}(q) = \frac{1}{V}\sum_{p'} \vartheta_q(p') J_L Y_{LM}(\vartheta, \varphi)^* a_q(p')$$

$$U_{LM}(q) = \frac{1}{V}\sum_{p'} \vartheta_q(p') J_L Y_{LM}(\vartheta, \varphi)^* b_q(p').$$

В переменных X, Z, W, U вместо уравнений (1) и (2) получим следующие четыре алгебраических уравнения

$$X_{LM}(q) = J_L \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \int [X_{lm}(q) P_{[\ ]d^2} - Z_{lm}(q) P_{[\ ]cd} + W_{lm}(q) P_{Ead} -$$
$$- U_{lm}(q) P_{Ebd}] Y_{lm}(\theta, \Phi) Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega + 2J_L K(q) \int P_{Ebd} Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega; \quad (4)$$

$$Z_{LM}(q) = J_L \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \int [X_{lm}(q) P_{[\ ]cd} - Z_{lm}(q) P_{[\ ]c^2} +$$
$$+ W_{lm}(q) P_{Eac} - U_{lm}(q) P_{Ebc}] Y_{lm}(\theta, \Phi) Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega +$$
$$+ 2J_L K(q) \int P_{Ebc} Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega; \quad (5)$$

$$W_{LM}(q) = J_L \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \int [X_{lm}(q) P_{Ead} - Z_{lm}(q) P_{Eac} + W_{lm}(q) P_{[\ ]a^2} -$$
$$- U_{lm}(q) P_{[\ ]ab}] Y_{lm}(\theta, \Phi) Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega + 2J_L K(q) \int P_{[\ ]ab} Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega; \quad (6)$$

$$U_{LM}(q) = J_L \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \int [X_{lm}(q) P_{Ebd} - Z_{lm}(q) P_{Ebc} +$$
$$+ W_{lm}(q) P_{[\ ]ab} - U_{lm}(q) P_{[\ ]b^2}] Y_{lm}(\theta, \Phi) Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega +$$
$$+ 2J_L K(q) \int P_{[\ ]b^2} Y_{LM}(\theta, \Phi)^* d\omega, \quad (7)$$

где

$$P\ldots = \frac{1}{8\pi^3}\int \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\{E^2 - [\Omega(p-q) + \Omega(p)]^2\}} p^2 dp,$$

$$K(q) = J(q)\frac{1}{V}\sum \vartheta_q(p') b_p(p') = J(q)\frac{\sqrt{4\pi}\, U_{00}}{J_0},$$

а [ ] в индексе у P означает $\Omega(p-q) + \Omega(p)$.

Из уравнений (4) — (7) нетрудно видеть, что кулоновское взаимодействие исчезает для $M \neq 0$, так как величины $P\ldots$ могут содержать зависимость только от угла θ. По той же причине величины X, Z, W, U входят в уравнения (4) — (7) с одинаковыми M. В случае $L \neq 0$ мы имеем, вообще говоря, систему зацепляющихся алгебраических уравнений для X, Z, W, U с различными L. Особенно прост случай $q = 0$. При этом величины P не содержат угловой зависимости и уравнения (4) — (7) связывают величины X, Z, W, U с одинаковыми L. Поскольку $c_0 = 0$, то $Z_{00} = 0$, и уравнение (5) тождественно обращается в нуль. Таким образом, можно получить следующую систему трех уравнений:

$$X_{LM} = J_L P^0_{2\Omega} X_{LM} - J_L P^0_{Ec/\Omega} U_{LM} + J_L P^0_{E\xi/\Omega} W_{LM} + 2J_L P^0_{Ec/\Omega} K(0)\,\delta_{L0}\delta_{M0}; \quad (8)$$

$$U_{LM} = J_L P^0_{Ec/\Omega} X_{LM} - J_L P^0_{2c^2/\Omega} U_{LM} + J_L P^0_{2\xi c/\Omega} W_{LM} + 2J_L P^0_{2c^2/\Omega} K(0)\,\delta_{L0}\delta_{M0}; \quad (9)$$

$$W_{LM} = J_L P^0_{E\xi/\Omega} X_{LM} - J_L P^0_{2\xi c/\Omega} U_{LM} + J_L P^0_{2\xi^2/\Omega} W_{LM} + 2J_L P^0_{2\xi c/\Omega} K(0)\,\delta_{L1}\delta_{M0}, \quad (10)$$

где индекс нуль у величины P указывает, что они взяты для $q = 0$. Так как $P^0_{E\xi/\Omega} = P^0_{c\xi/\Omega} = 0$, то уравнение (10) отщепляется от (8) и (9). Случай $L = 0$ может быть рассмотрен на основании уравнений (1) и (2) как в [2]. В случае $L \neq 0$ члены, содержащие кулоновское взаимодействие, выпадают из уравнений (8) — (10). Таким образом, энергия коллективных возбуждений для случая $L \neq 0$, $q = 0$ определяется из условий

$$(1 - J_L P^0_{2\Omega})(1 + J_L P^0_{2c^2/\Omega}) + (J_L P^0_{Ec/\Omega})^2 = 0; \tag{11}$$

$$1 - J_L P^0_{2\xi^2/\Omega} = 0. \tag{12}$$

В случае $\nu = E/2c \leqslant 1$ условия (11) и (12) принимают вид

$$\left(\frac{1}{g_L} + \frac{\arcsin\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\right)\left(\frac{1}{g_L} - \frac{1}{g_0} - \frac{\nu\arcsin\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\right) + \frac{(\arcsin\nu)^2}{1-\nu^2} = 0; \tag{13}$$

$$\frac{1}{\nu}\sqrt{1-\nu^2}\arcsin\nu = \frac{1}{g_0} - \frac{1}{g_L}. \tag{14}$$

Уравнение (13) приводит к наличию коллективных возбуждений также и при $g_L < 0$, т. е. к существованию, наряду с коллективными возбуждениями типа частица — частица, возбуждений типа частица — дырка. Уравнение (14) не имеет действительных корней при $g_0 > g_L$.

В случаях малых q величины $P\ldots$ можно разложить по степеням $|q|$; при этом выделяются члены, не зависящие от θ и зависящие от $\cos\theta$ и $\cos^2\theta$. Выражая $\cos\theta$ и $\cos^2\theta$ через сферические функции и обозначая индексами 0, 1, 2 соответствующую зависимость величины $P\ldots$ от $|q|$, из уравнений (4) — (7) получим

$$X_{LM} = J_L\Big\{\Big(P^0_{[\;]d^2} + \frac{1}{3}P^2_{[\;]d^2}\Big)X_{LM} - \Big(P^0_{Ebd} + \frac{1}{3}P^2_{Ebd}\Big)U_{LM} +$$
$$+ 2\sqrt{4\pi}K(q)\Big[\Big(P^0_{Ebd} + \frac{1}{3}P^2_{Ebd}\Big)\delta_{L0}\delta_{M0} + \frac{2}{3\sqrt{5}}P^2_{Ebd}\delta_{L2}\delta_{M0}\Big] +$$
$$+ \sum_{lm}\sum_{j=|l-2|}^{l+2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}}(l2m0\,|\,jm)(l200\,|\,j0)(P^2_{[\;]d^2}X_{lm} - P^2_{Ebd}U_{lm})\,\delta_{jL}\delta_{mM} +$$
$$+ \sum_{lm}\sum_{j=|l-1|}^{l+1}\sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}}(l1m0\,|\,jm)(l100\,|\,j0)(P^1_{Ead}W_{lm} - P^1_{[\;]cd}Z_{lm})\,\delta_{jL}\delta_{mM}\Big\}; \tag{15}$$

$$Z_{LM} = J_L\Big\{-\frac{1}{3}P^2_{[\;]c^2}Z_{LM} + \frac{1}{3}P^2_{Eac}W_{LM} + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}P^1_{Ebc}K(q)\,\delta_{L1}\delta_{M0} +$$
$$+ \sum_{lm}\sum_{j=|l-2|}^{l+2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}}(l2m0\,|\,jm)(l200\,|\,j0)(P^2_{Eac}W_{lm} - P^2_{[\;]c^2}Z_{lm})\,\delta_{jL}\delta_{mM} +$$
$$+ \sum_{lm}\sum_{j=|l-1|}^{l+1}\sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}}(l1m0\,|\,jm)(l100\,|\,j0)(P^1_{[\;]cd}X_{lm} - P^1_{Ebc}U_{lm})\,\delta_{jL}\delta_{mM}\Big\}; \tag{16}$$

$$W_{LM} = J_L\Big\{\Big(P^0_{[\;]a^2} + \frac{1}{3}P^2_{[\;]a^2}\Big)W_{LM} - \frac{1}{3}P^2_{Eac}Z_{LM} +$$
$$+ 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}P^1_{[\;]ab}K(q)\,\delta_{L1}\delta_{M0} +$$
$$+ \sum_{lm}\sum_{j=|l-2|}^{l+2}\frac{2}{3}\sum\sqrt{\frac{2l+1}{2f+1}}(l2m0\,|\,jm)(l200\,|\,j0)(P^2_{[\;]a^2}W_{lm} - P^2_{Eac}Z_{lm})\,\delta_{jL}\delta_{mM} +$$
$$+ \sum_{lm}\sum_{j=|l-1|}^{l+1}\sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}}(l1m0\,|\,jm)(l100\,|\,j0)(P^1_{Ead}X_{lm} - P^1_{[\;]ab}U_{lL})\,\delta_{jm}\delta_{mM}\Big\}; \tag{17}$$

$$U_{LM} = J_L\Big\{\Big(P^0_{Ebd} + \frac{1}{3}P^2_{Ebd}\Big)X_{LM} - \Big(P^0_{[\;]b^2} + \frac{1}{3}P^2_{[\;]b^2}\Big)U_{LM} +$$
$$+ 2\sqrt{4\pi}K(q)\Big[\Big(P^0_{[\;]b^2} + \frac{1}{3}P^2_{[\;]b^2}\Big)\delta_{L0}\delta_{M0} + \frac{2}{3\sqrt{5}}P^2_{Ibd}\delta_{L2}\delta_{M0}\Big] +$$

$$+\sum_{lm}\sum_{j=|l-2|}^{l+2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}}\,(l2m0\,|\,jm)\,(l200\,|\,j0)\,(P^2_{Ebd}X_{lm}-P^2_{[\;]b^2}U_{lm})\,\delta_{jL}\delta_{mM}+$$

$$+\sum_{lm}\sum_{j=|l-1|}^{l-1}\sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}}\,(l1m0\,|\,jm)\,(l100\,|\,j0)\,(P^1_{[\;]ab}W_{lm}-P^1_{Ebc}Z_{lm})\,\delta_{jL}\delta_{mM}\Big\}. \qquad (18)$$

Рассмотрим случай, когда в разложении потенциала (3) отличны от нуля только s- и p-сферические гармоники. Тогда из уравнений (15) — (18) следует, что $X_{1,\pm1}$-, $U_{1,\pm1}$ и $Z_{1,\pm1}$-, $W_{1,\pm1}$-возбуждения попарно расщепляются. Их энергии соответственно определяются из условий

$$\left[J_1\left(P^0_{[\;]d^2}+\frac{1}{5}P^2_{[\;]d^2}\right)-1\right]\left[J_1\left(P^0_{[\;]b^2}+\frac{1}{5}P^2_{[\;]b^2}\right)+1\right]=J_1^2\left(P^0_{Ebd}+\frac{1}{5}P^2_{Ebd}\right)^2; \qquad (19)$$

$$\left(1+\frac{1}{5}P^2_{[\;]c^2}J_1\right)\left[\left(P^0_{[\;]d^2}+\frac{1}{5}P^2_{[\;]a^2}\right)J_1-1\right]=\frac{1}{25}J_1^2\,(P^2_{Eac})^2. \qquad (20)$$

Поскольку расчет ведется с точностью до $|q|^2$, то правой частью (20) можно пренебречь. При этом уравнение (20) распадется на два условия, одно из которых совпадает с уравнением, полученным в ([3]) для нефизических возбуждений. Нетрудно видеть, что результат ([3]) для реальных возбуждений можно получить как одно из условий, вытекающих из (19) при некорректном в приведенном рассмотрении пренебрежении ее правой частью.

В случае $L=1$, $M=0$ моды типа 1, 0; 0, 0 оказываются связанными. При этом X_{10}-, U_{10}-, Z_{00}-, W_{00}- возбуждения отщепляются от X_{00}-, U_{00}-, Z_{10}-, W_{10}- модов, причем для первых возбуждений кулоновское взаимодействие выпадает. Приведем условие, определяющее энергии возбуждений X_{10}, U_{10}, Z_{00}, W_{00}:

$$\begin{vmatrix} J_1\left(P^0_{[\;]d^2}+\frac{3}{5}P^2_{[\;]d^2}\right)-1 & -\left(P^0_{Ebd}+\frac{3}{5}P^2_{Ebd}\right)J_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}J_1P^1_{Ead} & -\frac{1}{\sqrt{3}}J_1P^1_{[\;]cd} \\ -J_1\left(P^0_{Ebd}+\frac{3}{5}P^2_{E_1bd}\right) & J_1\left(P^0_{[\;]b^2}+\frac{3}{5}P^2_{[\;]b^2}\right)+1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}J_1P^1_{[\;]ab} & \frac{1}{\sqrt{3}}J_1P^1_{Ebc} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}J_0P^1_{[\;]cd} & \frac{1}{\sqrt{3}}P^1_{Ebc}J_0 & -\frac{1}{3}J_0P^2_{Eac} & 1+\frac{1}{3}J_0P^2_{[\;]c^2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}J_0P^1_{Ead} & \frac{1}{\sqrt{3}}J_0P^1_{[\;]ab} & 1-J_0\left(P^0_{[\;]a^2}+\frac{1}{3}P^2_{[\;]a^2}\right) & \frac{1}{3}J_0P^2_{Eac} \end{vmatrix}=0 \qquad (21)$$

Результат работы ([3]) для 1,0-возбуждений соответствует $1=J_1\left(P^0_{[\;]d^2}+\frac{3}{5}P^2_{[\;]d^2}\right)$. Уравнения для X_{00}, U_{00}, Z_{10}, W_{10} можно применить для определения возбуждений с $L=0$, используя определение $K(q)$ через U_{00}.

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе.

Поступило
12 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Широков, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд. АН СССР, 1958. [2] Н. Н. Боголюбов, УФН, 67, 549 (1959). [3] A. Bardasis, J. R. Schrieffer, Phys. Rew., 121, 1050 (1961). [4] В. Г. Вакс, В. М. Галицкий, А. И. Ларкин, ЖЭТФ, 41, 1655 (1961).