

Общероссийский математический портал

В. Д. Серова, Связь контактных слабых разрывов с параметрами вихрей, возникающих на начальной стадии газовой струи, *ТВТ*, 2001, том 39, выпуск 6, 939–943

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

18 марта 2025 г., 13:45:40



УДК 621.43.011:533

СВЯЗЬ КОНТАКТНЫХ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ С ПАРАМЕТРАМИ ВИХРЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ГАЗОВОЙ СТРУИ

© 2001 г. В. Д. Серова

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 21.02.2001 г.

Рассматривается задача об образовании контактной поверхности слабого разрыва на начальной стадии формирования газовой струи с последующей трансформацией ее в вихри. Доказанная автором ранее теорема, позволяющая определять завихренность в точках этих поверхностей, и следствие из этой теоремы, устанавливающее связь кривизны поверхности слабого контактного разрыва с завихренностью частицы жидкости, находящейся в данной точке, а также с касательной к поверхности составляющей скорости этой частицы жидкости, использованы автором статьи для определения параметров вихрей, возникающих из контактной поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Как было установлено экспериментально, на начальной стадии газовой струи возникают вихревые структуры, которые оказывают значительное влияние на формирование струи [1]. На основе анализа результатов данной работы можно сделать вывод о связи этих вихревых структур с поверхностями слабого контактного разрыва, из которых они могут при определенных условиях возникать. Кроме того, поведение слабых контактных поверхностей разрыва, проблемы их устойчивости представляют значительный самостоятельный интерес для гидромехаников, так как эти вопросы оставались долгое время недостаточно изученными.

В [2] была проведена систематизация слабых разрывов (т.е. разрывов производных газодинамических функций) уравнений газовой динамики и указано различие в поведении двух типов слабых разрывов. Появился ряд работ, посвященных исследованию системы уравнений газовой динамики и, в частности, контактными слабым разрывам [3, 4]. К этим поверхностям разрыва стали проявлять интерес экспериментаторы, которым при тонкой настройке приборов удалось эти поверхности визуализировать [5]. В [6] были получены условия, которые должны выполняться на поверхностях слабого контактного разрыва, и уравнения переноса скачка вдоль бихарактеристик, которые значительно упрощаются в практически используемых в газовой динамике приближениях. Этот факт позволил решить одну важную задачу [7, 8], которая была исследована экспериментально в [5].

В [6] была рассмотрена система уравнений газовой динамики в осесимметричном случае, что

не ограничивало общности исследований, но позволило упростить задачу и сделать результаты наглядными. Были найдены, как уже отмечалось выше, уравнения переноса скачков производных газодинамических функций. В [6] приводится система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которой должны удовлетворять косинусы углов между нормалью к поверхности слабого контактного разрыва и осями координат. В работе [9] эта система уравнений была приведена к удобному для анализа виду и было получено соотношение, связывающее изменение во времени угла между нормалью к поверхности слабого контактного разрыва и осью координат с распределением скоростей движения этой поверхности вдоль линии l пересечения поверхности разрыва с координатной плоскостью (x, r)

$$d\varphi/dt = \partial v_n / \partial l. \quad (1)$$

Здесь $\partial/\partial l = -\xi\partial/\partial r + \eta\partial/\partial x$, $\varphi = \arcsin \xi$; ξ и η — направляющие косинусы нормали к поверхности разрыва; $v_x = v_x \xi + v_r \eta$, причем v_x , v_r — проекции скоростей частиц поверхности разрыва.

В работе [9] были сформулированы теорема и следствие из нее, позволяющие найти завихренность в частицах контактной поверхности слабого разрыва и кривизну геодезической линии этой поверхности l .

Теорема. Если нестационарное осесимметричное движение поверхности слабого контактного разрыва в невязкой сжимаемой жидкости таково, что скорость v_n движения ее частиц в направлении нормали вдоль линии l пересечения этой поверхности с координатной плоскостью постоянна, то тогда и только тогда возможно безвихревое движение частиц контактной поверхности слабого разрыва. При ненулевом значении произ-

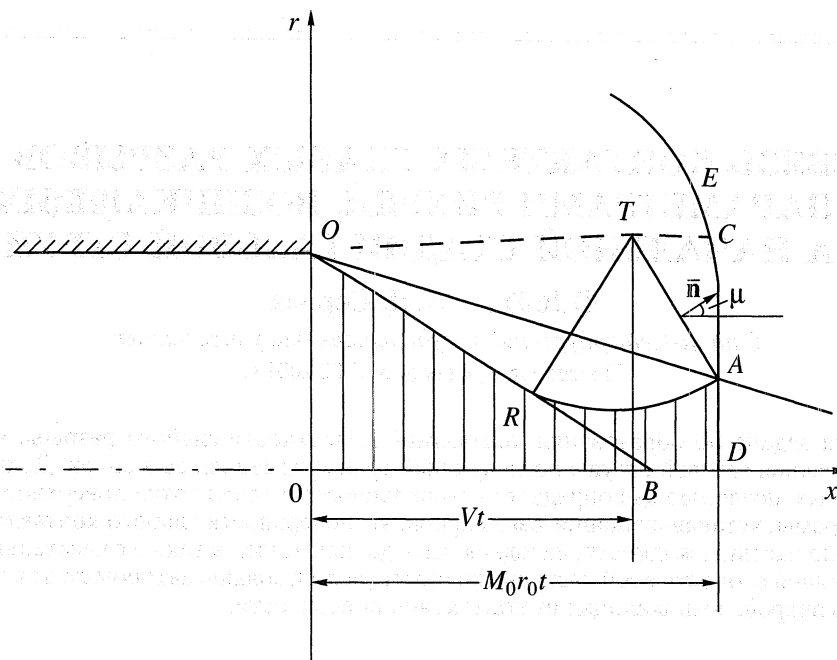


Схема течения на начальной стадии формирования сверхзвуковой струи.

водной от нормальной скорости v_n по направлению l движение частиц контактной поверхности носит вихревой характер с завихренностью, равной удвоенному значению производной $\partial v_n / \partial l$ в соответствующей точке поверхности.

Линия l является для поверхности контактного слабого разрыва геодезической линией, так как в силу осевой симметрии нормаль к этой линии совпадает с нормалью к поверхности. Поэтому было сформулировано следующее из теоремы следствие: кривизна геодезической линии l поверхности слабого контактного разрыва в каждый момент времени в данной точке равна половине отношения завихренности потока в этой точке к величине проекции скорости частицы на касательное направление к геодезической линии в этой же точке.

Согласно этому следствию для кривизны k_l геодезической линии имеем следующее выражение:

$$k_l = \left(\frac{\partial v_n}{\partial l} \right) / v_\tau = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{v_\tau}, \quad (2)$$

в котором v_τ – касательная составляющая скорости частиц поверхности слабого контактного разрыва в плоскости (x, r) , а Ω – завихренность потока в этой точке поверхности.

Приложение теории и анализ полученных результатов. В качестве приложения развитой в [9] теории в настоящей работе рассмотрена задача о возникновении (с последующей трансформацией в вихри) контактной поверхности слабого разрыва на начальной стадии формирования газовой струи. Схема волновых процессов при истечении газа из круглой трубы со сверхзвуковой скоро-

стью представлена на рисунке. В работе [10] был исследован случай выхода ударной волны из трубы, однако в схеме течения отсутствовала контактная поверхность и это влияло на достоверность описания течения за ударной волной.

В данной работе, как и в [10], рассматриваются лишь те времена, когда звуковая волна разрежения AR еще не достигла оси симметрии. Контактная поверхность слабого разрыва TA отделяет возмущенное прохождением звуковой волны RA течение с переменной энтропией за ударной волной CAT от области $OTAR$, где энтропийные возмущения практически отсутствуют. Поскольку зависимость энтропии от времени и координат в указанных областях различна, то должна быть поверхность слабого разрыва, которая отделяет области с разным заданием энтропии в потоке [7].

Центр звуковых возмущений T , возникающий на кромке трубы, сносится потоком со скоростью \bar{v} . Можно принять, что траектория точки, являющейся центром звуковых возмущений T в любой момент времени $t = t_1$, параллельна оси x . Через t . T должна проходить контактная поверхность слабого разрыва AT , так как t . T является особой точкой решения исходной системы квазилинейных уравнений. Поскольку t . T , с одной стороны, есть фиктивный центр возмущений (центральная точка источника), а с другой стороны, эта точка должна принадлежать особой поверхности (контактной поверхности разрыва), факт прохождения через нее AT очевиден.

Вдоль линии AT , являющейся образующей поверхности слабого контактного разрыва, скоро-

сти этой поверхности могут быть различны. Скорость в т. *A*, например, совпадает с нормальной к *AT* составляющей скорости невозмущенного потока за прямой ударной волной, а скорость в т. *T* может при этом значительно отличаться от скорости контактной поверхности в т. *A*.

Найти решение поставленной выше задачи аналитическими методами в точной постановке не представляется возможным. Поэтому в данной работе с помощью достаточно грубых упрощений и предположений, использованных для оценки возможного решения, постараемся оценить скорости потока в т. *A* и *T*. В дальнейшем эти оценки будут использованы для определения в нулевом приближении производной dv_n/dl в точках контактной поверхности слабого разрыва *AT*.

Для простоты вычислений примем, что скорость потока в т. *T* направлена по нормали к линии *AT* и одновременно к дифрагированной части ударной волны в т. *E* ее пересечения с этой нормалью.

Попытаемся оценить завихренность в частях контактной поверхности слабого разрыва и кривизну ее геодезической линии *AT* на основании результатов, приведенных выше. Для этого воспользуемся полученными в работах [10, 11] зависимостями для определения скоростей движения поверхности контактного слабого разрыва в т. *T* и *A*.

В [10], следуя работе [11], записаны условия на характеристиках 1-го и 2-го семейства в области расширения потока, ограниченной первой характеристикой *OA*.

Характеристики второго семейства, исходящие из т. *O*, имеют следующее описание [10]:

$$dr = \frac{s-f}{1+sf} dx, \tag{3}$$

$$ds - \frac{1+s^2}{f} \frac{dM_0}{M_0} - \frac{sf(1+s^2)}{s-f} \frac{dr}{r} = 0,$$

где $s = \operatorname{tg} \theta$; θ – угол нормали к ударной волне с осью *x*; f – функция M_0 из [10]; $M_0 = U/c_0$ – число Маха на ударной волне; U – скорость распространения ударной волны; c_0 – скорость звука перед ударной волной [10].

Если считать, что фиктивный центр возмущений (т. *T*) движется почти параллельно оси *x*, то на характеристике второго семейства, близкой к этой траектории, можно принять $dr \approx 0$.

В этом случае вместо (3) имеем

$$s = f, \quad \frac{f ds}{1+s^2} = \frac{dM_0}{M_0}. \tag{4}$$

Подставив s вместо f в левую часть дифференциального уравнения (4), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{1+s^2} = \frac{dM_0}{M_0}. \tag{5}$$

Решение этого уравнения легко найти:

$$M_0 \cos \theta = M_0^* \cos \theta^*, \tag{6}$$

где $M_0^* \cos \theta^*$ может быть определено, например, в тот момент времени, когда на характеристике $r = R_0$ известно значение числа Маха M_0^* и угол наклона нормали к ударной волне θ^* (R_0 – радиус трубы).

Это решение может быть использовано при отыскании скорости контактной поверхности в т. *T*, что будет сделано ниже. А сначала попробуем оценить скорость этой поверхности в т. *A*.

Поскольку в т. *A* контактной поверхности, лежащей одновременно и на ударной волне, скорость газа равна скорости за прямолинейной ударной волной, то она может быть выражена через скорость ударной волны. В работе [12] число Маха M_1 в потоке за прямой ударной волной, отнесенное к скорости звука c_1 за ударной волной, при $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ выражается через число Маха невозмущенной ударной волны M_0 следующим образом:

$$M_1 = \frac{5(M_0^2 - 1)}{\sqrt{[7M_0^2 - 1][M_0^2 + 5]}}, \tag{7}$$

причем M_0 отнесено к скорости звука c_0 в невозмущенном потоке перед ударной волной.

Тогда из соотношения (7) может быть известна скорость потока, а тем самым и скорость контактной поверхности в т. *A*, если знать угол между нормалью к контактной поверхности и осью x $\mu = \pi/2 - \varphi$ в каждый момент времени. Таким образом будем иметь $M_A = M_1 \sin \varphi$, где через M_A обозначено число Маха при движении контактной поверхности в т. *A*, а φ – угол между нормалью к поверхности слабого контактного разрыва и осью *r*. В рамках предположения, что фиктивный центр возмущений *T* движется почти параллельно оси *x*, можно, следуя работам [7, 8], предположить, что $\sin \varphi = \sqrt{1 - (M_0^1 - M_1)^2}$, где M_1 и M_0^1 имеют тот же смысл, что и в формуле (7), но M_0^1 отнесено к скорости звука c_1 в потоке за ударной волной (как и M_1).

Обратимся к определению скорости контактной поверхности в т. *T*. Поскольку в работе [10] был осуществлен как бы квазистационарный подход, то относиться к найденному в настоящей работе решению (6) следует с осторожностью,

тем более что не всегда ясно, где взять известное решение $M_0^* \cos \theta^*$. Поэтому можно поступить следующим образом, чтобы оценить скорость поверхности в т. T .

Предположим, что локальное число Маха в потоке за искривленной ударной волной M_1 может быть представлено той же зависимостью (7), где вместо числа Маха невозмущенной волны M_0 берется число Маха дифрагирующей части ударной волны M , а направление скорости потока совпадает с нормалью к соответствующей части ударной волны. Тогда число Маха потока в т. T можно выразить следующим образом:

$$M_T = \frac{5(M^2 - 1)}{\sqrt{[7M^2 - 1][M^2 + 5]}}. \quad (8)$$

В выражении (8) число Маха ударной волны M в точке E может быть определено через скорость M_0 невозмущенной волны с помощью результатов работы [11] или приближенно получено из соотношения (6), если удастся определить число Маха ударной волны в т. C .

В формуле (8) число Маха M отнесено к скорости звука в невозмущенном потоке c_0 , а M_T – к скорости звука за ударной волной. При сравнении скоростей в т. A и T необходимо учитывать, вообще говоря, отличие скоростей звука за ударной волной в т. T и A . Однако ради простоты вычислений будем считать их равными.

Следовательно, можно приближенно определить отношение скоростей движения контактной поверхности слабого разрыва AT в т. T и A так:

$$\frac{v_{nT}}{v_{nA}} = \frac{(M^2 - 1)\sqrt{(7M_0^2 - 1)(M_0^2 + 5)}}{\sin \phi (M_0^2 - 1)\sqrt{(7M^2 - 1)(M^2 + 5)}}, \quad (9)$$

где значение $\sin \phi$ определено ранее.

Чтобы сделать более наглядным отношение скоростей (9) (угол θ , который составляет нормаль к ударной волне с осью x , меняется со временем), можно обратиться к результатам работы [11]. В [11] были обработаны данные расчетов в диапазоне $M_0 = 1.6-20$ для различных моментов выхода ударной волны, позволяющие определить скорость движения дифрагированной части ударной волны M в зависимости от скорости невозмущенной волны M_0 .

Приведя в соответствие безразмерные величины, можно записать для момента времени, когда волна разрежения AR доходит до оси x , зависимость M от M_0 для сечения $r = R_0$

$$M^2 = 0.6M_0^2 + 0.4. \quad (10)$$

Используя выражения (9), (10) и выражение для $\sin \phi$, для отношения скоростей в т. T и A в указанный момент времени получаем

$$\begin{aligned} \frac{(v_n)_T}{(v_n)_A} &= \\ &= \sqrt{\frac{1 + 34/(7M_0^2) - 5/(7M_0^4)}{1 - (M_0^1 - M_1)^2(1 + 66/(7M_0^2) + 27/(7M_0^4))}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если считать, что вдоль образующей AT поверхности слабого контактного разрыва изменение скоростей от т. T к т. A происходит линейно, то можно приближенно найти значение производной на этой линии

$$\frac{\partial v_n}{\partial l} \approx \frac{v_{nA} - v_{nT}}{\Delta l}$$

и тогда, если положить $(v_n)_T \approx K(v_n)_A$, где коэффициент K определяется из выражения (11), получим

$$\frac{\partial v_n}{\partial l} \approx \frac{(v_n)_A(1 - K)}{\Delta l}. \quad (12)$$

Поскольку коэффициент K из (12) был найден в (11) для момента времени, когда волна разрежения AR доходит до оси x (формула (10)), то, положив $\Delta l = R_0$, имеем

$$\frac{\partial v_n}{\partial l} \approx \frac{M_A c_1 (1 - K)}{R_0}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial l} &\approx \frac{c_1 M_1}{R_0} \sqrt{1 - (M_0^1 - M_1)^2} - \\ &- \frac{1 + 34/(7M_0^2) - 5/(7M_0^4)}{\sqrt{1 + 66/(7M_0^2) + 27/(7M_0^4)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если определить M_1 из (7) и иметь в виду

$$\frac{c_1^2}{c_0^2} = \frac{(7M_0^2 - 1)(M_0^2 + 5)}{36M_0^2}$$

из [12], то при $M_0 = 2$, $c_0 = 360$ м/с, $R_0 = 0.09$ м, $\gamma = 1.4$ значение производной из (13) составит $\partial v_n / \partial l \approx 0.05 c_0 / R_0$ или $\partial v_n / \partial l \approx 2000$ 1/с.

Отсюда по теореме, приведенной выше, завихренность в точках поверхности слабого контактного разрыва AT будет равной удвоенному значению $\partial v_n / \partial l$. При тех же величинах c_0 и R_0 , которые были использованы, имеем $\Omega \approx 4000$ 1/с. Вычислим теперь возможное значение радиуса кривизны геодезической линии AT в т. A , если при тех же параметрах $v_{\tau A} \approx M_1 c_1 \cos \phi$ или $v_{\tau A} = 5c_0 / 4\sqrt{3} \approx 260$ м/с. В соответствии со следствием из теоремы имеем

значение кривизны в т. А $k_{IA} = 1/2 \frac{\Omega}{v_{\tau A}}$ и при тех же параметрах потока получаем радиус кривизны в этой точке $R_A \approx 0.13$ м.

Если рассматривать радиус кривизны линии АТ в т. Т, то при тех допущениях, которые были сделаны выше относительно совпадения направления скорости потока за дифрагированной ударной волной с направлением нормали к контактной поверхности разрыва, может оказаться $v_{\tau T} \approx 0$. И тогда следует ожидать появления крупномасштабного вихря в окрестности т. Т, что часто наблюдается в экспериментах [13] и в расчетах [14].

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.М. Бабичу за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Угрюмов Е.А., Цветков А.И. Формирование структуры сверхзвуковой струи // Уч. зап. ЛГУ. Газодинамика и теплообмен. 1987. № 9. С. 55.
2. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
3. Boillet G. Sur la croissance des ondes simples et l'instabilité de chocs caractéristiques des systèmes hyperboliques avec application à la discontinuité de contact d'un fluide // Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences. série A. Paris. V. № 284. 1977. S. 1481.
4. Русанов В.В. Характеристики общих уравнений газовой динамики // ЖВМиМФ. 1963. Т. 3. № 3. С. 508.
5. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977. 271 с.
6. Серова В.Д. Распространение слабых контактных разрывов вдоль бихарактеристик уравнений газовой динамики // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон. 1988. Вып. 1. № 1. С. 42.
7. Серова В.Д. Взаимодействие сильной ударной волны с малой неоднородностью на оси круглой трубы // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон. 1991. Вып. 2. № 8. С. 104.
8. Серова В.Д. Возможность существования слабых контактных разрывов в круглой ударной трубе // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 173.
9. Серова В.Д. Форма поверхностей слабого контактного разрыва в газовой динамике и возникновение вихрей // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 1. С. 49.
10. Гриб А.А., Исаков В.А. К задаче об истечении ударной волны из трубы в свободное пространство // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон. 1981. Вып. 3. № 13. С. 75.
11. Ефимов А.С. О распространении ударных волн в свободное пространство // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 163.
12. Хэншелл Б.Д. Некоторые аспекты использования ударных труб в аэродинамических исследованиях. В сб.: Ударные трубы / Под ред. Рахматуллина Х.А., Семенова С.С. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 699 с.
13. Голуб В.В., Шульмейстер А.М. Стартовые ударные волны и вихревые структуры, возникающие при формировании струи // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 146.
14. Серова В.Д. Опыт применения метода Годунова с подвижными и неподвижными сетками к расчету начальной стадии формирования струи. Л., 1975. 50 с. – Деп. в ВИНТИ. 25.02.75. № 1914-75.