Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 82—83.

УДК 517.946

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Н. Кожевников

В этой заметке рассмотрены эллиптические псевдодифференциальные системы на компактном многообразии без края, у которых собственные значения стремятся к ∞ вдоль конечного числа лучей на комплексной плоскости, исходящих из начала координат. Таким образом, все собственные значения можно разбить на конечное число серий, в зависимости от луча, вдоль которого они стремятся к ∞. Цель настоящей работы — получить главный член асимптотики отдельно для каждой серии собственных значений. Для этого видоизменяется известный метод Карлемана, изложенный, например, в [1], а также используется теория степеней псевдодифференциальных систем, развитая в работе [2]. Актуальность указанной задачи отмечена в § 2 обзора [3].

Пусть Ω — компактное n-мерное C^∞ многообразие без края, а P — эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка $m > 0$, отображающий пространство $C^\infty(\Omega, \mathbf{C}^l)$ в себя. Здесь $C^\infty(\Omega, \mathbf{C}^l)$ — пространство l-мерных комплексных бесконечно гладких вектор-функций, определенных на Ω. В локальных координатах $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с оператором P, как известно, можно связать матрицу-функцию $p(x, \xi)$ размеров l на l, называемую главным символом. При этом $p(x, t\xi) = t^m p(x, \xi)$ при всех $t > 0$ и любых $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$.

Потребуем, чтобы оператор P удовлетворял следующим двум условиям.

Условие 1. Оператор P эллиптичен, т. е. у его главного символа $p(x, \xi)$ нет нулевых собственных значений при $|\xi| = 1$.

Условие 2. Все собственные значения главного символа лежат на конечном числе лучей комплексной плоскости λ, задаваемых уравнениями $\arg\lambda = \varphi_i$, где $i = 1, \ldots, q$ $(q \leqslant l)$, $-\pi \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_q < \pi$.

Обозначим эти собственные значения с учетом кратности через $\tau_{kj}(x, \xi)$, где $\arg\tau_{kj}(x, \xi) = \varphi_k$; $k = 1, \ldots, q$; $j = 1, \ldots, q_j$; $q_1 + \ldots + q_q = l$.

Согласно [2] (следствие 1, стр. 298) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая зависящая от ε константа C_ε, что при всех λ из множества

$$\{\lambda \in \mathbf{C}\colon |\lambda| > C_\varepsilon,\ |\arg\lambda - \varphi_k| > \varepsilon \quad \text{при } k = 1, \ldots, q\}$$

оператор $(P - \lambda I)^{-1}$ существует и даже принадлежит при любом $\delta > 0$ классу $C_{(n/m)+\delta}$ вполне непрерывных операторов, определенному, например, в [4] (глава XI, § 9).

Отсюда непосредственно вытекает возможность разделения всех собственных значений оператора P на q серий $\{\lambda_{1j}\}, \ldots, \{\lambda_{qj}\}$ так, что $|\lambda_{k1}| \leqslant |\lambda_{k2}| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_{kj}| \leqslant \ldots \to +\infty$ и величина $\varepsilon_{kj} = \arg\lambda_{kj} - \varphi_k \to 0$ при $j \to +\infty$. Следовательно, каждое собственное значение оператора P записывается в виде $\lambda_{kj} = |\lambda_{kj}| \exp\{i(\varphi_k + \varepsilon_{kj})\}$.

Теорема. *Если оператор P не имеет точек спектра в замкнутом единичном круге и удовлетворяет условиям* 1 *и* 2, *то асимптотика k-й серии собственных значений, стремящихся к ∞ вдоль луча* $\arg\lambda = \varphi_k$, *выражается следующей формулой*:

$$N_k(t) = \sum_{|\lambda_{kj}| \leqslant t} 1 \sim C_k t^{-n/m} \quad \text{при} \quad t \to +\infty \quad (k = 1, \ldots, q). \tag{1}$$

Здесь

$$C_k = (2\pi)^n \int_\Omega dx \left\{ \sum_{j=1}^{q_j} \int_{|\xi|=1} |\tau_{kj}(x, \xi)|^{-n/m} d\xi \right\} \cdot n^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Положим $\alpha_k = 2\pi/(\varphi_k - \varphi_1)$, $\beta_k = 1/\alpha_k$ $(k = 2, \ldots, q)$ и определим операторы $P_0 = \exp(-i\varphi_1)P$, $P_k = (P_{k-1}^{\alpha_k})^{\beta_k}$, используя определение степеней эллиптических систем из [2] (§ 7). Эти преобразования введены для того, чтобы собственные значения оператора P_q стали равными $|\lambda_{kj}| \exp(i\varepsilon_{kj})$ $(k = 1, \ldots, q;$ $j = 1, 2, \ldots)$. Более того, P_q — это псевдодифференциальный эллиптический оператор, причем собственные значения его главного символа суть $|\tau_{kj}(x, \xi)|$ $(j = 1, \ldots, q_k)$. Рассмотрим теперь оператор

$$R \equiv R(t, k) \equiv [(1 + t)P_q + (1 - t)\exp(-i\varphi_k)P]/2 \quad (t > 0). \tag{3}$$

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

Его собственные значения суть $\mu_{kj} = |\lambda_{kj}| \exp(i\varepsilon_{kj})$ и μ_{sj}, где $\mu_{sj} = |\lambda_{sj}| \{1 + t + (t-1)\exp[i(\varphi_s - \varphi_k + \varepsilon_{kj})]\}/2$ при $s \neq k$ и $j = 1, 2, \ldots, \to +\infty$. Таким образом, преобразование R оператора P разделяет серии собственных значений: именно, k-я серия переводится в «бесконечно малую» угловую окрестность положительной вещественной полуоси, а все собственные значения из других серий умножаются на величину порядка $O(t)$ при $t \to +\infty$.

Положим $\varkappa = [n/m] + 1$ и рассмотрим при $t > 0$ оператор $(R + tI)^{-\varkappa}$. Согласно [3] (глава XI, теорема 19)

$$\operatorname{tr}(R + tI)^{-\varkappa} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_{kj} + t)^{-\varkappa} + \sum_{s \neq k} \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_{sj} + t)^{-\varkappa}.$$

Из (3) вытекает, что $\left|\sum\sum (\mu_{sj} + t)^{-\varkappa}\right| \leqslant \text{const} \cdot t^{-\varkappa}$ при больших $t > 0$ и что $\sum (\mu_{kj} + t)^{-\varkappa} \Big/ \sum (|\lambda_{kj}| + t)^{-\varkappa} \to 1$ при $t \to +\infty$. С другой стороны, если $r(x, \xi, t)$ — главный символ оператора R, то нетрудно показать, что при $t \to \infty$

$$\operatorname{tr}(R + tI)^{-\varkappa}/(2\pi)^{-n} \int_{\Omega} dx \int_{\mathbf{R}^n} \operatorname{tr}[r(x, \xi, t) + t]^{-\varkappa} d\xi \to 1,$$

$$\int_{\Omega} dx \int_{\mathbf{R}^n} \operatorname{tr}[r(x, \xi, t) + t]^{-\varkappa} d\xi \Bigg/ \sum_{j=1}^{q_j} dx \int_{|\xi|=1} |\tau_{kj}(x, \xi)|^{-n/m} d\xi \cdot \widetilde{C}_{\varkappa} t^{(n/m)-\varkappa} \to 1,$$

где $\widetilde{C}_{\varkappa} = \{(\varkappa - 1)!\}^{-1} \Gamma((n/m) + 1) \Gamma(\varkappa - (n/m)) \cdot n^{-1}$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} (|\lambda_{kj}| + t)^{-\varkappa}/(2\pi)^{-n} \int_{\Omega} dx \left\{ \sum_{j=1}^{q_j} \int_{|\xi|=1} |\tau_{kj}(x, \xi)|^{-n/m} d\xi \right\} \cdot \widetilde{C}_{\varkappa} t^{(n/m)-\varkappa} \to 1,$$

и, применяя тауберову теорему Харди—Литлвуда ([1], стр. 427), получим формулы (1) и (2). Теорема доказана.

Замечание. Используя результаты работ [5] и [6], аналогично можно находить асимптотику различных серий собственных значений и для систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу. В этом случае в формуле (1) вместо $t^{-n/m}$ будет стоять $t^{-n/\mu}$, где μ — один из диагональных порядков системы Дуглиса—Ниренберга, причем μ зависит от номера соответствующей серии собственных значений.

Автор приносит благодарность А. Г. Костюченко за обсуждение работы.

Московский авиационный институт

Поступило в редакцию 15 ноября 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Mizohata S., J. Math. Kyoto Univ. 4—5 (1965), 399—428. 2. Seeley R., Complex powers of an elliptic operator, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, Chicago 10 (1968), 288—307. 3. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., Сб. «Итоги науки и техники. Математический анализ» 14 (1977), М., ВИНИТИ, 5—58. 4. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, Спектральная теорема, М., «Мир», 1966. 5. Кожевников А. Н., ДАН СССР 200, № 6 (1971), 1273—1276. 6. Кожевников А. Н., Матем. сб. 92 (1973), 60—88.