В. И. Матов, Функции экстремума конечных семейств выпуклых однородных функций, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 1, 51–62

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 51—62

УДК 531.014

ФУНКЦИИ ЭКСТРЕМУМА КОНЕЧНЫХ СЕМЕЙСТВ ВЫПУКЛЫХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Матов

Конечное семейство выпуклых однородных функций на $\mathbf{R}^n$ называется положительным, если в любой отличной от нуля точке хотя бы одна из функций семейства положительна. Такое семейство называется строго минимальным, если для любой его функции существует точка, в которой все остальные функции семейства отрицательны.

Основным результатом настоящей работы является теорема $TF(n, m)$, утверждающая, что для положительного строго минимального семейства $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}\}$ функция минимума $\min\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m+1}\}$ гомеоморфизмом пространства $\mathbf{R}^n$ приводится к виду $|x_1| + \ldots + |x_{n-m}| - |x_{n-m+1}| - \ldots - |x_n|$ (здесь $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\mathbf{R}^n$).

Одним из непосредственных следствий этой теоремы является теорема $T(n, m)$, устанавливающая, что при $1 \leqslant m \leqslant n$ объединение $m+1$ выпуклых открытых подмножеств $(n-1)$-мерной сферы, каждые m из которых имеют непустое пересечение, а пересечение всех $m+1$ множеств пусто, гомеоморфно прямому произведению $(m-1)$-мерной сферы и $(n-m)$-мерного диска. Эта теорема обобщает соответствующий результат Кли [1, с. 47]: если $m+1$ выпуклых подмножеств $\mathbf{R}^n$ удовлетворяют условиям теоремы $T(n, m)$, то существует аффинная плоскость коразмерности m, не пересекающая их объединение и такая, что каждая аффинная полуплоскость коразмерности $m-1$, ограниченная этой плоскостью, пересекает это объединение.

При $n = m$ удовлетворяющие условиям теоремы $T(n, m)$ множества покрывают всю $(n-1)$-мерную сферу. Следствием этого частного случая является известная теорема Хелли [1]: семейство выпуклых подмножеств пространства $\mathbf{R}^n$, каждые $n+1$ из которых имеют непустое пересечение, имеет общую для всех подмножеств семейства точку.

Семейства выпуклых функций, удовлетворяющие условиям теоремы $TF(n, m)$, естественным образом возникают в задачах, связанных с топологически морсовскими функциями, например, при исследовании топологических особенностей функций экстремума (максимума и минимакса) общих семейств гладких функций [4]. Кроме того, такие семейства возникают в теории игр [5; 6].

Автор благодарен В. И. Арнольду, А. Г. Кушниренко и Е. М. Горелику за полезные обсуждения.

§ 1. Определения и формулировки теорем

Пусть $CH(n)$ — пространство непрерывных выпуклых однородных функций на $\mathbf{R}^n$. (Функция φ однородна, если $\varphi(tx) = t\varphi(x)$ при всех $t \geqslant 0$.) Мы будем рассматривать конечные семейства функций из $CH(n)$; при этом семейство Φ будем называть *семейством порядка m или m-семейством*, если оно содержит m функций.

С каждым конечным семейством Φ связаны две *функции экстремума* $\max \Phi$, $\min \Phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где

$$(\max \Phi)(x) = \max \{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\},$$

$$(\min \Phi)(x) = \min \{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\},$$

первая из которых называется функцией максимума, а вторая — функцией минимума. Обе функции экстремума однородны, причем $\max \Phi \in CH(n)$. Функция $\min \Phi$ в общем случае не выпукла.

Определение. *Семейство Φ назовем положительным (неотрицательным), если для любой точки $x \neq 0$ существует функция $\varphi \in \Phi$, для которой $\varphi(x) > 0$ ($\varphi(x) \geqslant 0$). Положительное семейство назовем строго минимальным, если любое его подсемейство не является неотрицательным.*

Если семейство Φ положительно, то $(\max \Phi)(x) > 0$ при $x \neq 0$ и наоборот. Заметим, что $\varphi(0) = 0$ для всех $\varphi \in CH(n)$.

Определение. *Две однородные функции $f, g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ назовем однородно топологически эквивалентными, если существует однородный гомеоморфизм $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такой, что $f = g \circ F$.*

Легко доказать, что функция максимума $\max \Phi$ положительного семейства Φ однородно топологически эквивалентна функции $|x_1| + \ldots + |x_n|$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\mathbf{R}^n$.

Теорема $TF(n, m)$. *Пусть Φ — положительное строго минимальное $(m+1)$-семейство. Тогда $0 \leqslant m \leqslant n$ и функция минимума $\min \Phi$ семейства Φ однородно топологически эквивалентна функции $|x_1| + \ldots + |x_{n-m}| - |x_{n-m+1}| - \ldots - |x_n|$.*

Пусть S^{n-1} — единичная сфера пространства $\mathbf{R}^n$. Для $1 \leqslant m \leqslant n$ положим

$$E_m^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid |x_1| + \ldots + |x_{n-m}| - |x_{n-m+1}| - \ldots - |x_n| < 0\}.$$

Открытое в S^{n-1} множество E_m^n гомеоморфно $S^{m-1} \times \operatorname{int} B^{n-m}$, где B^k — единичный замкнутый шар пространства $\mathbf{R}^k$. В частности, $E_n^n = S^{n-1}$.

Следствием теоремы $TF(n, m)$ является следующее утверждение.

Теорема $T(n, m)$. *Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$ и $U_1, \ldots, U_{m+1}$ — открытые выпуклые подмножества сферы S^{n-1}, удовлетворяющие условиям:*

1) $\bigcap\limits_{j \neq i} U_j \neq \varnothing$ *для каждого* $i = 1, \ldots, m+1$;

2) $\overline{U}_1 \cap \ldots \cap \overline{U}_m \cap \overline{U}_{m+1} \neq \varnothing$ (*чертой обозначено замыкание*).

Тогда существует гомеоморфизм $G\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ такой, что $G(U_1 \cup \ldots \cup U_{m+1}) = E_m^n$.

Для доказательства теоремы $T(n, m)$ достаточно рассмотреть положительное строго минимальное семейство $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}\}$, где

$$\varphi_i(x) = \sup \{\xi(x) \mid \xi \in U_i^*, \ \|\xi\| = 1\},$$

а U_i^* — это множество линейных функционалов из $(\mathbf{R}^n)^*$, отрицательных на U_i.

Из теоремы $T(n, n)$ вытекает теорема Хелли.

Определение. *Конечное семейство назовем знакопеременным, если существуют точки, в которых все функции семейства отрицательны.*

Название объясняется тем, что в случае знакопеременного семейства Φ выпуклая функция $\max \Phi$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если Φ — знакопеременное конечное семейство, то его функции экстремума $\max \Phi$ и $\min \Phi$ однородно топологически эквивалентны линейной функции.*

На множестве всех m-семейств введем метрику ρ, положив

$$\rho(\Phi^1, \Phi^2) = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \max_{x\in S^{n-1}} |\varphi_j^1(x) - \varphi_j^2(x)|,$$

где $\Phi^i = \{\varphi_1^i, \ldots, \varphi_m^i\}$, $i = 1, 2$.

Следующая легко доказываемая теорема утверждает, что семейством общего положения является положительное либо знакопеременное семейство.

Теорема. *Множество положительных m-семейств и множество знакопеременных m-семейств открыты. Объединение этих множеств всюду плотно в пространстве всех m-семейств.*

Следующие два параграфа посвящены доказательству теоремы $TF(n, m)$. При этом теорема Хелли используется только для доказательства неравенства $m \leqslant n$, и поэтому справедливость теоремы $T(n, m)$ устанавливается без использования теоремы Хелли.

§ 2. Доказательство теоремы $TF(n, m)$

Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}\}$, где $\varphi_i \in CH(n)$ — положительное строго минимальное семейство.

2.1. Докажем, что $m \leqslant n$. Для $i = 1, \ldots, m+1$ положим

$$K_i = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi_i(x) < 0\}.$$

Так как $\varphi_i \in CH(n)$, то K_i — открытый выпуклый конус. В силу строгой минимальности Φ для каждого $i = 1, \ldots, m+1$ семейство $\Phi \setminus \{\varphi_i\}$ не является неотрицательным, следовательно,

$$\bigcap_{j\neq i} K_j \neq \varnothing.$$

Если $m > n$, то в силу теоремы Хелли $K_1 \cap \ldots \cap K_{m+1} \neq \varnothing$. Следовательно, существует точка $x \in \mathbf{R}^n$ такая, что $\varphi_i(x) < 0$ при всех $i = 1, \ldots, m+1$. Последнее противоречит положительности семейства Φ.

2.2. Доказательство второго утверждения теоремы $TF(n, m)$ значительно сложнее. Мы проведем это доказательство по индукции, шагом которой будет переход от утверждения $TF(n-1, m-1)$ к утверждению $TF(n, m)$.

2.2.1. Так как $0 \leqslant m \leqslant n$, то в качестве основания индукции необходимо доказать утверждения $TF(1, 1)$ и $TF(k, 0)$, где $k \geqslant 1$.

Утверждение $TF(1, 1)$ очевидно. Действительно, в этом случае $(\min \Phi)(t) = \min\{\alpha t, \beta t\}$, где $\alpha\cdot\beta < 0$ и $t \in \mathbf{R}$; функция $\min \Phi$ однородно топологически эквивалентна функции $-|t|$.

В случае утверждения $TF(k, 0)$ имеем $\Phi = \{\varphi\}$, где $\varphi\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ — выпуклая однородная функция с точкой минимума в нуле. Следовательно, функция $\min \Phi = \varphi$ однородно топологически эквивалентна функции $|x_1| + \ldots + |x_k|$.

2.2.2. Предположим, что теорема $TF(n-1, m-1)$ справедлива.

Для доказательства утверждения $TF(n, m)$ нам понадобится следующая подготовительная теорема, доказательству которой будет посвящен § 3.

Подготовительная теорема. *Если $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}\}$ — положительное строго минимальное семейство функций из $CH(n)$, то существуют функция $\varphi'_{m+1} \in CH(n)$ и вектор $v \in \mathbf{R}^n$ такие, что*

1) *$\Phi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi'_{m+1}\}$ — положительное строго минимальное семейство;*

2) *функции минимума $\min \Phi$ и $\min \Phi'$ однородно топологически эквивалентны;*

3) $\varphi_1(v) < 0, \ldots, \varphi_m(v) < 0$, $\varphi'_{m+1}(-v) < 0$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}\}$ — положительное строго минимальное семейство. В силу подготовительной теоремы можно считать, что после подходящего линейного преобразования $\mathbf{R}^n$ выполнены неравенства

$$\varphi_1(e) < 0, \ldots, \varphi_m(e) < 0, \ \varphi_{m+1}(-e) < 0,$$

где e — это n-й координатный орт $\mathbf{R}^n$.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in CH(n)$ и $\varphi(v) < 0$. Тогда для любой точки $x \in \mathbf{R}^n$ функция $\varphi_x \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определенная формулой*

$$\varphi_x(t) = \varphi(x - tv),$$

выпукла, строго монотонно возрастает и

$$\varphi_x(t) \to -\infty \text{ при } t \to -\infty, \quad \varphi_x(t) \to +\infty \text{ при } t \to +\infty.$$

Доказательство. Функция φ_x выпукла, так как выпукла функция φ. Далее, пусть $\varphi(v) = \delta$, где $\delta < 0$. В силу однородности при $t < 0$ имеем

$$\varphi_x(t) = (-t)\cdot\varphi(-x/t + v).$$

Так как при $t \to -\infty$ $\varphi(-x/t + v) \to \delta$, то $\varphi_x(t) \to -\infty$. Отсюда и из выпуклости функции φ_x вытекают остальные утверждения леммы 1.

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим естественное расслоение $p \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$, где $p(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Каждый слой расслоения p канонически изоморфен $\mathbf{R}^1$ с координатой x_n.

В силу леммы 1 имеем:

а) *для любого $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ функции $\varphi_1 \mid p^{-1}(y), \ldots, \varphi_m \mid p^{-1}(y)$ строго монотонно убывают по x_n, а функция $\varphi_{m+1} \mid p^{-1}(y)$ строго монотонно возрастает по x_n, причем эти функции неограничены при $x_n \to -\infty$ и $x_n \to +\infty$.*

Далее, $\max(\varphi_i, \varphi_{m+1}) \in CH(n)$ для каждого $i = 1, \ldots, m$. Из а) следует:

б) *при всех $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ и $i = 1, \ldots, m$ функция $\max(\varphi_i, \varphi_{m+1}) \mid p^{-1}(y)$ имеет единственную точку минимума; эта точка совпадает с единственной в слое $p^{-1}(y)$ точкой, в которой значения функций φ_i и φ_{m+1} равны.*

Лемма 2. *Если ограничение функции $\varphi \in CH(n)$ на каждый слой расслоения p имеет точку минимума, то функция $\psi \colon \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$, где $\psi(y) = \min\{\varphi(x) \mid p(x) = y\}$, лежит в $CH(n-1)$.*

Доказательство. Докажем выпуклость ψ (однородность и непрерывность ψ очевидны). Пусть $y^1, y^2 \in \mathbf{R}^{n-1}$ и $\alpha \in [0, 1]$. Далее, пусть $\psi(y^i) = \varphi(x^i)$, где $p(x^i) = y^i$ $(i = 1, 2)$. Тогда в силу определения ψ, линейности p и выпуклости φ имеем

$$\psi(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) \leqslant \varphi(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leqslant \alpha\varphi(x^1) + (1-\alpha)\varphi(x^2) = \alpha\psi(y^1) + (1-\alpha)\psi(y^2).$$

Лемма 2 доказана.

Для каждого $i = 1, \ldots, m$ определим функцию $\psi_i \colon \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ формулой

$$\psi_i(y) = \min\{\max(\varphi_i, \varphi_{m+1})(x) \mid p(x) = y\}.$$

В силу леммы 2 $\psi_i \in CH(n-1)$.

Лемма 3. *Семейство $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ положительно и строго минимально.*

Доказательство. Докажем положительность. Пусть $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ и $a_1, \ldots, a_m$ — точки слоя $p^{-1}(y)$ такие, что

$$\psi_i(y) = \max(\varphi_i, \varphi_{m+1})(a_i).$$

Без ограничения общности можно считать, что у точки a_1 n-я координата не меньше, чем у остальных точек a_i. Тогда для всех $i = 1, \ldots, m$

$$\varphi_{m+1}(a_i) = \varphi_i(a_i) \geqslant \varphi_i(a_1).$$

Так как семейство Φ положительно, существует номер $k \in \{1, \ldots, m\}$, для которого $\varphi_k(a_1) > 0$. Следовательно, $\psi_k(y) > 0$.

Докажем строгую минимальность семейства Ψ. Пусть $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда в силу строгой минимальности семейства Φ существует точка $x \in \mathbf{R}^n$ такая, что $\varphi_j(x) < 0$ при $j = 1, \ldots, m+1$, $j \neq i$. Следовательно, $\max(\varphi_j, \varphi_{m+1})(x) < 0$ при $j \neq i$ и тем самым $\psi_j(p(x)) < 0$. Таким образом, семейство $\Psi \setminus \{\psi_i\}$ не неотрицательно.

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим функцию минимума $\min \Psi$. Пусть $y \in \mathbf{R}^{n-1}$. Тогда условием «для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$ $\min(\psi_1, \ldots, \psi_m)(y) = \max(\varphi_i, \varphi_{m+1})(x)$» точка x в слое $p^{-1}(y)$ определена однозначно. (Действительно, функция $\varphi_{m+1} \mid p^{-1}(y)$ строго монотонна, а равенство $\psi_i(y) = \max(\varphi_i, \varphi_{m+1})(x)$ эквивалентно равенству $\varphi_i(x) = \varphi_{m+1}(x)$.)

Обозначим определенную таким способом точку через $\operatorname{lift}(y)$.

Перечислим свойства отображения $\operatorname{lift}\colon \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, вытекающие непосредственно из его определения:

в) lift — *это сечение расслоения* p;

г) $(\min \Psi)(y) = \varphi_{m+1}(\operatorname{lift}(y))$ *для всех* $y \in \mathbf{R}^{n-1}$.

Лемма 4. *Отображение* lift *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ и Y — открытая ограниченная окрестность точки y. Из непрерывности функций φ_i ($i = 1, \ldots, m+1$) следует существование компакта X в $\mathbf{R}^n$ такого, что для всех $i = 1, \ldots, m$ и всех $y' \in Y$

$$\psi_i(y') = \min\{\max(\varphi_i, \varphi_{m+1})(x) \mid x \in X,\ p(x) = y'\}.$$

Пусть $x = \operatorname{lift}(y)$ и $\{y_\nu\}$ — последовательность точек из Y, сходящаяся к y. Положим $x_\nu = \operatorname{lift}(y_\nu)$ и докажем, что если x' — предельная точка последовательности $\{x_\nu\}$, то $x' = x$. Так как $x, x_\nu \in X$ и X — компакт, то отсюда будет следовать непрерывность lift.

Из непрерывности функции $\min \Psi$ имеем $(\min \Psi)(y_\nu) \to (\min \Psi)(y)$. Поэтому в силу свойства г) $\varphi_{m+1}(x) = \varphi_{m+1}(x')$. Так как функция $\varphi_{m+1} \mid p^{-1}(y)$ монотонна и $p(x) = p(x') = y$, то $x = x'$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для любого* $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ *и всех* $i = 1, \ldots, m$ *имеет место неравенство*

$$\varphi_i(\operatorname{lift}(y)) \geqslant \varphi_{m+1}(\operatorname{lift}(y))$$

(*при этом хотя бы для одного* i *равенство достигается*).

Доказательство. Пусть $\psi_i(y) = \max(\varphi_i, \varphi_{m+1})(a_i)$, где $p(a_i) = y$. Так как $\psi_i(y) \geqslant (\min \Psi)(y)$, то

$$\varphi_i(a_i) = \varphi_{m+1}(a_i) \geqslant (\min \Psi)(y) = \varphi_{m+1}(\operatorname{lift}(y)).$$

Теперь неравенство леммы вытекает из строго монотонного возрастания и убывания функций φ_{m+1} и φ_i соответственно.

Лемма 5 доказана.

Из свойства б) и леммы 5 вытекает свойство:

д) $(\min \Psi)(y) = (\min \Phi)(\operatorname{lift}(y))$ *для всех* $y \in \mathbf{R}^{n-1}$.

Лемма 6. *Если* $x = \operatorname{lift}(y)$, *то функции*

$$t \mapsto (\min \Phi)(x + te), \quad t \mapsto (\min \Phi)(x - te)$$

строго монотонно убывают при $t \geqslant 0$ *и неограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойств а), г) и леммы 5 следует, что при $t \geqslant 0$

$$(\min \Phi)(x + te) = \min(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)(x + te),$$
$$(\min \Phi)(x - te) = \varphi_{m+1}(x - te).$$

Отсюда и из а) вытекает утверждение леммы.

Лемма 6 доказана.

Рассмотрим отображение $H_1\colon \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, заданное формулой $H_1(y, t) = \operatorname{lift}(y) + te$. Из свойства в) и леммы 4 следует, что отображение H_1 — гомеоморфизм. Имеем

$$(\min \Phi) \circ H_1(y, t) = (\min \Phi)(\operatorname{lift}(y) + te).$$

Из леммы 6 вытекает существование расслоенного гомеоморфизма $H_2\colon \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ над тождественным отображением базы $\mathbf{R}^{n-1}$ такого, что

$$(\min \Phi) \circ H_1 \circ H_2(y, t) = (\min \Phi)(\operatorname{lift}(y)) - |t|$$

и в силу свойства д)

$$(\min \Phi) \circ H_1 \circ H_2(y, t) = (\min \Psi)(y) - |t|.$$

Согласно теореме $TF(n-1, m-1)$ существует гомеоморфизм $G\colon \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^{n-1}$ такой, что

$$(\min \Psi) \circ G(y) = |y_1| + \ldots + |y_{n-m}| - |y_{n-m+1}| - \ldots - |y_{n-1}|,$$

где $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Положив $H_3(y, t) = (G(y), t)$ и $H = H_1 \circ H_2 \circ H_3$, получим

$$(\min \Phi) \circ H(y, y_n) = |y_1| + \ldots + |y_{n-m}| - |y_{n-m+1}| - \ldots - |y_n|.$$

Следующая лемма завершает доказательство теоремы $TF(n, m)$.

Л е м м а 7. *Если $f, g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — однородные функции и $H\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — гомеоморфизм такой, что $f = g \circ H$, то функции f и g однородно топологически эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $F(x) = \|x\| \cdot H(x/\|x\|)$ при $x \neq 0$ и $F(0) = 0$. Тогда из однородности f и g имеем $f = g \circ F$.

Лемма 7 и теорема $TF(n, m)$ доказаны.

§ 3. Доказательство подготовительной теоремы

Для доказательства подготовительной теоремы нам понадобится ряд вспомогательных лемм.

Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$\bar{A}$ — замыкание множества $A \subset \mathbf{R}^n$;

$\operatorname{conv} A$ — выпуклая оболочка множества $A \subset \mathbf{R}^n$;

$\overline{\operatorname{conv}} A$ — замыкание выпуклой оболочки множества $A \subset \mathbf{R}^n$;

$\operatorname{cone} A = \{t \cdot a \mid t > 0,\ a \in A\}$ — конус над $A \subset \mathbf{R}^n$;

$\{\xi = \tau\}$ — аффинная гиперплоскость точек, в которых линейный функционал $\xi \in (\mathbf{R}^n)^*$ принимает значение τ.

3.1. Взаимное расположение пары выпуклых конусов.

Л е м м а 8. *Пусть A и B — два открытых выпуклых конуса с общей вершиной 0 в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющие условиям:*

8.1) $\bar{A} \cap \bar{B} = 0$;

8.2) $(-A) \cap B = \varnothing$.

Тогда существует линейный функционал $\xi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и вектор $a \in -A$ такие, что $\xi(a) = 1$ и выполнены условия:

8.3) $A^0 = A \cap \{\xi = 0\} \neq \varnothing$;

8.4) *множество $B_+ = B \cap \{\xi = 1\}$ непусто, ограничено и $\bar{B}_+ \subset a + A^0$;*

8.5) $\bar{A} \cap \operatorname{cone} \overline{\operatorname{conv}} \{a, B_+\} = 0$.

Доказательство. В силу условий 8.1 и 8.2 и теоремы отделимости [3, с. 124] существуют два линейных функционала $\xi_0, \xi_1 \in (\mathbf{R}^n)^*$ такие, что

$$\xi_0(\bar{A} \setminus 0) < 0, \ \xi_0(\bar{B} \setminus 0) > 0,$$

$$\xi_1(-A \setminus 0) < 0, \ \xi_1(B \setminus 0) > 0.$$

Для $\lambda \in [0, 1]$ положим $\xi_\lambda = (1 - \lambda)\xi_0 + \lambda\xi_1$. Из приведенных выше неравенств вытекает, что при $0 \leqslant \lambda < 1$ $\xi_\lambda(\bar{B} \setminus 0) > 0$.

Так как $\xi_0(A \setminus 0) < 0$ и $\xi_1(A \setminus 0) > 0$, то существует число $\bar{\lambda} \in [0, 1)$ такое, что $A \cap \{\xi_\lambda = 0\} \neq \varnothing$. Положим $\xi = \xi_{\bar{\lambda}}$. Условие 8.3 тем самым выполнено.

Так как $\bar{B}$ — замкнутый конус и $\xi(\bar{B} \setminus 0) > 0$, то множество $B_+ = B \cap \{\xi = 1\}$ непусто и ограничено. Пусть $y \in B_+$ и $x \in A^0 = A \cap \{\xi = 0\}$. Положим $a_t = y - tx$. При всех достаточно больших $t > 0$ точка a_t лежит в $-A$. Действительно, $-(y/t) + x \to x$ при $t \to +\infty$ и в силу открытости A $a_t/t \in -A$ при достаточно больших t, а так как A — конус, то $a_t \in -A$. Далее, $\xi(a_t) = \xi(y) = 1$.

Пусть $D = \{u \mid \xi(u) = 0, \|u\| \leqslant d\}$, где $d = \operatorname{diam} B_+$. Так как A^0 — открытый конус в гиперплоскости $\{\xi = 0\}$ и $x \in A^0$, то при всех достаточно больших t $tx + D \subset A^0$ и тем самым $B_+ \subset a_t + A^0$. Положив $a = a_t$ для достаточно большого t, мы удовлетворим условию 8.4.

Условие 8.5 выполнено в силу неравенств $\xi_0(\bar{A} \setminus 0) < 0$, $\xi_0(\bar{B} \setminus 0) > 0$, $\xi_0(a) > 0$ (так как $a \in -A$).

Лемма 8 доказана.

3.2. Одноточечные расширения выпуклых функций.

Определение. *Надграфиком* epi f *функции* $f\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ *называется подмножество*

$$\{(x, \mu) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \mid f(x) \leqslant \mu\} \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}.$$

Согласно [2, с. 39] функция f выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик — выпуклое множество.

Лемма 9. *Пусть* $f\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ — *выпуклая достигающая своего минимума* $\bar{\mu}$ *на ограниченном множестве точек функция. Тогда, если* $a \in \mathbf{R}^k$, $\alpha \in \mathbf{R}$ *и* $\bar{\mu} < \alpha \leqslant f(a)$, *то множество* $\overline{\operatorname{conv}}\,\{(a, \alpha), \operatorname{epi} f\}$ *является надграфиком некоторой выпуклой функции* $\hat{f}$.

Определение. *Функцию* $\hat{f}$ *будем называть одноточечным или* (a, α)-*расширением функции* f.

Доказательство леммы 9. Множество $X = \overline{\operatorname{conv}}\,\{(a, \alpha), \operatorname{epi} f\}$ выпукло. Для того чтобы доказать, что оно является надграфиком функции, достаточно показать, что для любого $x \in \mathbf{R}^k$ определено

$$\hat{f}(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in X\}$$

и при всех $\mu \geqslant \hat{f}(x)$ точка (x, μ) лежит в X.

Зафиксируем $y \in \mathbf{R}^k$. Множество $\{(y, \mu) \in X\}$ непусто, так как $(y, f(y)) \in X$. Далее, так как $\alpha > \bar{\mu}$ и $f(x) \geqslant \bar{\mu}$ при всех $x \in \mathbf{R}^k$, то X лежит в полупространстве $\{(x, \mu) \mid \mu \geqslant \bar{\mu}\}$. Отсюда и из замкнутости X следует существование $\min\{\mu \mid (y, \mu) \in X\}$.

Пусть теперь $\mu \geqslant \hat{f}(y)$. Выберем $\mu' \geqslant \max(f(y), \mu)$. Тогда $(y, \mu') \in \operatorname{epi} f$. Так как X — выпуклое множество, а точка (y, μ) лежит на отрезке с концами $(y, \hat{f}(y))$ и (y, μ') в X, то $(y, \mu) \in X$.

Лемма 9 доказана.

Следующие несколько лемм устанавливают свойства одноточечных расширений.

Для функции $f: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ через $L_f(s)$ будем обозначать множество $\{x \in \mathbf{R}^k \mid f(x) \leqslant s\}$.

Лемма 10. *Пусть $\hat{f}$ — (a, α)-расширение выпуклой функции $f: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$. Тогда выполнены следующие условия:*

10.1) *точки минимума и минимальные значения функций f и $\hat{f}$ совпадают;*

10.2) $f(x) - (f(a) - \alpha) \leqslant \hat{f}(x) \leqslant f(x)$ *для всех* $x \in \mathbf{R}^k$;

10.3) *если* $\hat{f}(x) < \alpha$, *то существуют* $y \in \mathbf{R}^k$ *и* $\tau \in [0, 1]$ *такие, что* $x = \tau a + (1 - \tau) y$ *и* $\hat{f}(x) = \tau \cdot a + (1 - \tau) f(y)$;

10.4) *если* $t < \alpha$, *то* $L_{\hat{f}}(t) \subset \operatorname{conv}\{a, L_f(t)\}$.

Доказательство. Условие 10.1 и неравенство $\hat{f}(x) \leqslant f(x)$ очевидны.

Так как $\operatorname{epi} f$ — выпуклое множество, то

$$\operatorname{epi} \hat{f} = \overline{\bigcup_{z \in \operatorname{epi} f} [(a, \alpha), z]}. \tag{10.5}$$

Пусть $(x, \mu) = \tau(a, \alpha) + (1 - \tau)(y, f(y))$, где $\tau \in [0, 1]$. Тогда $\mu = \tau(\alpha - f(a)) + \tau f(a) + (1 - \tau) f(y)$. Так как $x = \tau a + (1 - \tau) y$, то в силу выпуклости функции f $\mu \geqslant \tau(\alpha - f(a)) + f(x)$ и первое неравенство из 10.2 вытекает из неравенства $\alpha \leqslant f(a)$.

Докажем 10.3. В силу (10.5) существуют последовательности $\{y_i\}$, $\{\tau_i\}$, где $y_i \in \mathbf{R}^k$, $\tau_i \in [0, 1]$, такие, что $\{x_i\} \to x$, $\{\mu_i\} \to \hat{f}(x)$, где

$$x_i = \tau_i a + (1 - \tau_i) y_i, \quad \mu_i = \tau_i \alpha + (1 - \tau_i) f(y_i). \tag{10.6}$$

Последовательность $\{\tau_i\}$ сходится (если это не так, то перейдем к подпоследовательности). Если $f(y_i) > \alpha$, то $\mu_i \geqslant \alpha$. Таким образом, из неравенства $\hat{f}(x) < \alpha$ следует ограниченность последовательности $\{f(y_i)\}$ сверху. Так как выпуклая функция f достигает своего минимума, то отсюда вытекает ограниченность последовательности $\{y_i\}$, и можно считать, что она сходится. Перейдя к пределу в (10.6), получим 10.3.

Условие 10.4 очевидным образом вытекает из 10.3.

Лемма 10 доказана.

Пусть в $\mathbf{R}^k$ фиксирована точка a. Тогда для функций $g: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ и точки $z \neq a$ через g_z обозначим функцию $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, заданную формулой

$$g_z(t) = g(a + tv),$$

где $v = (z - a)/\|z - a\|$, $t \geqslant 0$.

Лемма 11. *Пусть $\hat{f}$ — (a, α)-расширение функции f. Тогда для любого $s < \alpha$ и $z \in L_f(s)$ выполнены условия:*

11.1) *точки минимума и минимальные значения выпуклых функций f_z и $\hat{f}_z$ совпадают;*

11.2) *если $\bar{t}$ — ближайшая к нулю точка минимума функций f_z и $\hat{f}_z$, то $f_z(t) = \hat{f}_z(t)$ для всех $t \geqslant \bar{t}$ таких, что $\hat{f}_z(t) < \alpha$.*

Доказательство. Так как f достигает своего минимального значения на ограниченном множестве точек, то тем же свойством обладают f_z и $\hat{f}_z$.

В силу 10.2 $f_z(t) \geqslant \hat{f}_z(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}_+$. Следовательно, чтобы установить 11.1, достаточно доказать, что в точках минимума функции $\hat{f}_z$ значения функций f_z и $\hat{f}_z$ совпадают.

Пусть t_0 — точка минимума функции $\hat{f}_z$. Так как луч $a + tv$ пересекает $L_f(s)$, то $\hat{f}_z(t_0) \leqslant s < \alpha$. В силу 10.3 существуют числа $t_1 \geqslant t_0$ и $\tau \in [0, 1]$ такие, что

$$t_0 = (1 - \tau) t_1 \text{ и } \hat{f}_z(t_0) = \tau \cdot \alpha + (1 - \tau) f_z(t_1).$$

Если $\tau > 0$, то из неравенства $\hat{f}_z(t_0) < \alpha$ следует неравенство $f_z(t_1) < \hat{f}_z(t_0)$ и тем самым $\hat{f}_z(t_1) < \hat{f}_z(t_0)$, что противоречит минимальности значения $\hat{f}_z(t_0)$. Следовательно, $\tau = 0$ и $\hat{f}_z(t_0) = f_z(t_0)$.

Функции f_z и $\hat{f}_z$ выпуклы, следовательно, при $t \geqslant \bar{t}$ эти функции не убывают. Пусть $t \geqslant \bar{t}$ и $\hat{f}_z(t) < \alpha$. Тогда в силу 10.3 существуют числа $t' \geqslant t$ и $\tau \in [0, 1]$ такие, что

$$t = (1-\tau)t' \text{ и } \hat{f}_z(t) = \tau\cdot\alpha + (1-\tau)f_z(t').$$

Если $\tau > 0$, то из неравенства $\hat{f}_z(t) < \alpha$ следует неравенство $f_z(t') < \hat{f}_z(t)$, что противоречит неравенствам $\hat{f}_z(t) \leqslant f_z(t) \leqslant f_z(t')$. Поэтому $\tau = 0$ и тем самым $t = t'$ и $\hat{f}_z(t) = f_z(t)$.

Лемма 11 доказана.

Следующая лемма играет ключевую роль в доказательстве подготовительной теоремы.

Лемма 12. *Пусть $\hat{f}$ — (a, α)-расширение функции $f\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ и $g\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция такая, что для любого $z \in L_f(\alpha)$ функция g_z строго монотонно убывает при $t \geqslant 0$. Пусть, далее, $h = \min(f, g)$ и $\hat{h} = \min(\hat{f}, g)$. Тогда для любого ε из интервала $(0, \alpha)$ существует гомеоморфизм $F\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$, удовлетворяющий условиям:*

12.1) *F тождествен вне ограниченного множества;*

12.2) *$F(L_h(\alpha-\varepsilon)) = L_{\hat{h}}(\alpha-\varepsilon)$;*

12.3) *на $L_h(\alpha-\varepsilon)$ имеет место равенство $h = \hat{h}\circ F$.*

Доказательство. Заметим, что для любого $x \in \mathbf{R}^k$ $\hat{h}(x) \leqslant h(x)$, так как в силу 10.2 $\hat{f}(x) \leqslant f(x)$.

Если U — подмножество $\mathbf{R}^k$, то через K_aU будем обозначать конус $\{a + t(u-a) \mid u \in U,\ t > 0\}$.

Выберем число s в интервале $(\alpha-\varepsilon, \alpha)$ и рассмотрим конус $K_aL_f(s)$. Для $z \in L_f(s)$ через v_z обозначим $(z-a)/\|z-a\|$, а через $\bar{t}_z$ — ближайшую к нулю точку минимума функции f_z. Положим $F(x) = x$, если либо $x \bar{\in} K_aL_f(s)$, либо $x = a + tv_z$ при $z \in L_f(s)$ и $t \geqslant \bar{t}_z$. Так как $f_z(\bar{t}_z) \leqslant s$, то $F(x) = x$ вне $\operatorname{conv}\{a, L_f(s)\}$ и в силу ограниченности множества $L_f(s)$ условие 12.1 удовлетворено.

Для каждого $z \in L_f(s)$ рассмотрим отрезок $\Delta_z = [a, a + \bar{t}_z v_z]$. Из леммы 11, выпуклости функций f и $\hat{f}$ и монотонности g_z вытекает:

12.4) функции h_z и $\hat{h}_z$ строго монотонно убывают на отрезке $[0, \bar{t}_z]$;

12.5) $h_z(\bar{t}_z) = \hat{h}_z(\bar{t}_z) \leqslant \alpha - \varepsilon$.

Так как $\hat{f}(a) = \alpha$ и $f(a) \geqslant \alpha$, то

12.6) либо $h_z(0) > \hat{h}_z(0) = \alpha$, либо $h_z(0) = \hat{h}_z(0)$.

Отсюда следует, что для любой точки $x \in \Delta_z$ такой, что $h(x) \leqslant \alpha - \varepsilon$, существует единственная точка $\hat{x} \in [a, x]$ такая, что $h(x) = \hat{h}(\hat{x})$. Положим $F(x) = \hat{x}$.

Таким образом, отображение F определено на $\Delta_z \cap L_h(\alpha-\varepsilon)$. В силу свойств 12.4 — 12.6 функций h и $\hat{h}$ имеем:

12.7) $F(\Delta_z \cap L_h(\alpha-\varepsilon)) = F(\Delta_z \cap L_{\hat{h}}(\alpha-\varepsilon))$;

12.8) $h = \hat{h}\circ F$ на $\Delta_z \cap L_h(\alpha-\varepsilon)$.

Если множество $\Delta_z \setminus L_h(\alpha-\varepsilon)$ непусто, то в силу монотонности h_z это множество есть полуинтервал $[a, b_z)$, где $h(b_z) = \alpha - \varepsilon$. Пусть F линейно переводит $[a, b_z)$ в $[a, F(b_z))$.

Отображение F определено теперь на всем пространстве. Докажем, что F — гомеоморфизм.

Для любого $v \in S^{k-1}$ отображение F переводит луч $a + tv$ $(t \geqslant 0)$ в себя, причем функция $t \mapsto \| F(a + tv) - a \|$ строго монотонно возрастает и неограничена. Следовательно, если отображение F непрерывно, то оно — гомеоморфизм.

По построению ограничение отображения F на $K_a L_f(s)$ непрерывно. Пусть $z \in \partial K_a L_f(s)$ и $z \neq a$. Тогда минимальные значения f и $\hat{f}$ на луче $a + tv_z$ равны s. Поэтому, если $h(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < s$ для $x \in \Delta_z$, то $h(x) = \hat{h}(x) = g(x)$ и тем самым $F(x) = x$. В частности, $F(b_z) = b_z$. Отсюда вытекает тождественность F на границе $K_a L_f(s)$, и так как F тождественно вне $K_a L_f(s)$, то F всюду непрерывно.

Пусть $A = \operatorname{conv}\{a, L_f(s)\}$. Из 12.7 и 12.8 вытекает:

12.9) $F(A \cap L_h(\alpha - \varepsilon)) = A \cap L_{\hat{h}}(\alpha - \varepsilon)$;

12.10) на $\Delta \cap L_h(\alpha - \varepsilon)$ $h = \hat{h} \circ F$.

Если же $x \in \mathbf{R}^k \setminus A$, то в силу 10.2 и 10.4 $f(x) \geqslant \hat{f}(x) \geqslant s$; поэтому $h(x) \leqslant \alpha - \varepsilon$ только в том случае, если $h(x) = \hat{h}(x) = g(x)$. Так как при этом $F(x) = x$, то условия 12.2 и 12.3 удовлетворены.

Лемма 12 доказана.

3.3. Продолжение выпуклой функции с аффинной гиперплоскости на все пространство.

Лемма 13. *Пусть* $\xi \in (\mathbf{R}^n)^*$ — *ненулевой функционал и* q: $\{\xi = 1\} \to \mathbf{R}$ — *выпуклая функция, достигающая своего минимума* μ *на ограниченном множестве точек. Тогда для любого* $\beta > \mu$ *и любого компакта* $R \subset \{\xi = 1\}$, *содержащего* $L_q(\beta)$, *существует функция* $Q \in CH(n)$ *такая, что*

13.1) *функция* Q *положительна на* $\{\xi \leqslant 0\} \setminus \{0\}$;

13.2) $q \mid R = Q \mid R$;

13.3) $L_Q(\beta) \cap \{\xi = 1\} \subset R$.

Доказательство. Заметим, что из выпуклости функции q и ограниченности множества ее точек минимума вытекает ограниченность множества $L_q(\beta)$ для любого $\beta > \mu$.

Функция P: $\{\xi > 0\} \to \mathbf{R}$, определенная формулой

$$P(x) = \xi(x)\, q(x/\xi(x)) - (\mu - 1)\, \xi(x),$$

однородна, выпукла и принимает положительные значения.

Пусть $b \in R$, а число s таково, что

13.4) $s > \max\{P(x) \mid x \in R\} > 0$. Тогда множество $L_P(s)$ ограничено, а из выпуклости и положительности функции P вытекает включение

$$\operatorname{cone} R \cap \{\xi \leqslant 1\} \subset \operatorname{int} L_P(s).$$

Так как R — компакт, то существует число $\varepsilon < 0$ такое, что $\varepsilon(\mu - 1) + 1 > 0$ и

$$(\varepsilon b + \operatorname{cone} R) \cap \{\xi = 1\} \subset L_P(s).$$

Следовательно, объединение

13.5) $C = ((\varepsilon b + \operatorname{cone} R) \cap \{\xi \leqslant 1\}) \cup ((\varepsilon b + \operatorname{cone} R) \cap L_P(s))$ является выпуклым ограниченным множеством, причем $0 \in \operatorname{int} C$.

Функция T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, определенная формулой

$$T(x) = s \cdot \inf\{t > 0 \mid (x/t) \in C\},$$

лежит в $CH(n)$, так как надграфик T — это выпуклый конус $\operatorname{cone}\{(x, s) \mid x \in \bar{C}\}$ в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Из 13.4, 13.5 и включения $L_q(\beta) \subset R$ следует, что функция $Q = T + (\mu - 1)\xi$ удовлетворяет условиям 13.2 и 13.3. В силу 13.4 $s > \beta - \mu + 1$, и так как $\beta > \mu$, то из неравенства $\varepsilon(\mu - 1) + 1 > 0$ следует, что $Q(x) > 0$ для любого $x \in \partial C \cap \{\xi \leqslant 0\}$, что в свою очередь влечет 13.1.

Лемма 13 доказана.

3.4. Вывод подготовительной теоремы из лемм.

Как и выше, обозначим множество $\{x \mid \varphi_i(x) < 0\}$ через K_i. Так как $\varphi_i \in CH(n)$, то K_i — выпуклый открытый конус. Положим $K = \operatorname{int}(\overline{K}_1 \cap \ldots \cap \overline{K}_m)$. Семейство $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}\}$ строго минимально, поэтому $K \neq \varnothing$.

Если $(-K) \cap K_{m+1} \neq \varnothing$, то положим $\varphi'_{m+1} = \varphi_{m+1}$.

Пусть теперь $(-K) \cap K_{m+1} = \varnothing$. Так как семейство Φ положительно, то $\overline{K} \cap \overline{K}_{m+1} = 0$. Применив лемму 8 к случаю $A = K$, $B = K_{m+1}$, получим функционал $\xi \in (\mathbf{R}^n)^*$ и вектор $a \in -K$ такие, что $\xi(a) = 1$ и

а) $K^0 = K \cap \{\xi = 0\}$ — *открытый в* $\{\xi = 0\}$ *конус*;

б) *множество* $V = K_{m+1} \cap \{\xi = 1\}$ *непусто и ограничено*;

в) $\overline{V} \subset a + K^0$;

г) *конус* cone conv $\{a, \overline{V}\}$ *не пересекает* $\overline{K}_1 \cap \ldots \cap \overline{K}_m$.

Обозначим для краткости $\{\xi = 1\}$ через M.

Положим $f = \varphi_{m+1} \mid M$. В силу б) выпуклая функция f достигает своего минимума, причем последний отрицателен.

Так как $(-K) \cap K_{m+1} = \varnothing$, конусы $-K$ и K_{m+1} открыты и $a \in -K$, то $a \overline{\in} \overline{K}_{m+1}$, и поэтому $f(a) > 0$. В силу включения в) и включения $a \in -K$ существует число $\alpha > 0$ такое, что

д) $L_f(\alpha) \subset a + K^0$

и (a, α)*-расширение* $\hat{f}$ *функции* f *обладает свойством*

е) $\{x \mid f(x) < 0\} \cap (-K) \neq \varnothing$.

Положим $g = \min(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \mid M$. В силу включения д) и леммы 1 для каждого $z \in L_f(\alpha)$ функция g_z: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, где $g_z(t) = g(a + t(z - a)/\|z - a\|)$, строго монотонно убывает. Из леммы 12 для случая $\varepsilon = \alpha/2$ вытекает существование гомеоморфизма F: $M \to M$ такого, что

ж) *гомеоморфизм* F *тождествен вне компактного множества* $R \subset M$, *содержащего* $L_f(\alpha/2)$ *и* $L_{\hat{f}}(\alpha/2)$;

з) $F(L_h(\alpha/2)) = L_{\hat{h}}(\alpha/2)$, *где* $h = \min(f, g)$, $\hat{h} = \min(\hat{f}, g)$ *и на* $L_h(\alpha/2)$ $h = \hat{h} \circ F$.

В силу леммы 13 существует функция $\varphi'_{m+1} \in CH(n)$ такая, что

к) *функция* φ'_{m+1} *положительна на* $\{\xi \leqslant 0\} \setminus \{0\}$;

л) $\varphi'_{m+1} \mid R = \hat{f} \mid R$;

м) $\varphi'_{m+1}(x) > \alpha/2$ *для любого* $x \in M \setminus R$.

Положим $\Phi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi'_{m+1}\}$ и $\varphi = (\min \Phi) \mid M$, $\varphi' = (\min \Phi') \mid M$. Так как $\hat{f}(x) < f(x)$ при всех $x \in M$, то из м) следует, что при $t < \alpha/2$ функции φ, φ' и g могут принимать значение t в точке из $M \setminus R$ только одновременно. Теперь из ж), з) и л) вытекает:

н) $F(L_\varphi(\alpha/2)) = L_{\varphi'}(\alpha/2)$ *и на* $L_\varphi(\alpha/2)$ $\varphi = \varphi' \circ F$.

Продолжим гомеоморфизм F на $\mathbf{R}^n$ по формуле

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \xi(x) \leqslant 0, \\ \xi(x) \cdot F(x/\xi(x)), & \text{если } \xi(x) > 0, \end{cases}$$

из которой в силу ж) следует, что F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — однородный гомеоморфизм.

Так как $L_f(\alpha/2) \subset L_{\hat{f}}(\alpha/2) \subset R$, то в силу л) и м) функции φ_{m+1} и φ'_{m+1} на $S^{n-1} \setminus \operatorname{cone} R$ ограничены снизу некоторым положительным числом μ. Следовательно, если $t \leqslant \mu$, то функции $\min \Phi$, $\min \Phi'$ и $\min(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ могут принимать значение t в точке $S^{n-1} \setminus \operatorname{cone} R$ только одновременно. Вследствие ж) гомеоморфизм F тождествен на $\mathbf{R}^n \setminus \operatorname{cone} R$, и поэтому

о) *для всех* $t \leqslant \mu$ *и всех* $x \in S^{n-1} \setminus \operatorname{cone} R$ $(\min \Phi)(x) = t$ *тогда и только тогда, когда* $(\min \Phi') \circ F(x) = t$.

Так как $R \subset M$, $\varphi = (\min \Phi) \mid M$, $\varphi' = (\min \Phi') \mid M$, то из н) и о) следует, что функции $(\min \Phi) \mid S^{n-1}$ и $(\min \Phi') \circ F \mid S^{n-1}$ имеют одно и то же множество нулей, а сами функции совпадают в окрестности этого множества. Отсюда и из однородности функций $\min \Phi$ и $(\min \Phi') \circ F$ следует, что однородное отображение

$$x \mapsto \frac{(\min \Phi)(x)}{(\min \Phi') \circ F(x)} \cdot x,$$

переводящее $\min \Phi$ в $(\min \Phi') \circ F$, является гомеоморфизмом. Таким образом, функции $\min \Phi$ и $\min \Phi'$ однородно топологически эквивалентны.

Пусть $K'_{m+1} = \{x \mid \varphi'_{m+1}(x) < 0\}$. Из 10.4) и г) вытекает $\overline{K}_1 \cap \ldots \cap \overline{K}_m \cap \overline{K}'_{m+1} = 0$. Следовательно, семейство Φ' положительно. Строгая минимальность семейства Φ' вытекает из строгой минимальности семейства Φ и включения $K_{m+1} \subset K'_{m+1}$. Далее, из е) вытекает существование вектора $v \in \mathbf{R}^n$, для которого $\varphi_1(v) < 0, \ldots, \varphi_m(v) < 0$, $\varphi'_{m+1}(-v) < 0$. $\square$ Подготовительная теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данцер Л.*, *Грюнбаум Б.*, *Кли В.* Теорема Хелли. М.: Мир, 1968.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. *Алексеев В. М.*, *Тихомиров В. М.*, *Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
4. *Матов В. И.* Топологическая классификация ростков функций максимума и минимакса семейств функций общего положения // УМН.— 1982. Т. 37, вып. 4. — С. 167—168.
5. *Bohnenblust H. F.*, *Karlin S.*, *Shapley L. S.* Games with continuous, convex pay-off // Ann. of Math. Studies. Princeton.— 1950. № 24.— P. 181—192.
6. *Karlin S.*, *Shapley L. S.* Some applications of a theorem on convex functions // Ann. of Math.— 1950. V. 52, № 2.— P. 148—153.

Научный совет АН СССР
по комплексной проблеме «Кибернетика»

Поступило в редакцию
18 февраля 1986 г.