V. F. Butuzov, I. V. Nedelko, On the Formation of a Solution with an Internal Layer in a Parabolic System with Different Powers of a Small Parameter, *Differ. Uravn.*, 2004, Volume 40, Number 3, 356–367

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 356–367

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226

О ФОРМИРОВАНИИ РЕШЕНИЯ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С РАЗНЫМИ СТЕПЕНЯМИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

© 2004 г. **В. Ф. Бутузов, И. В. Неделько**

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^6(u_{xx} - u_t) = f(u, v, x, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\varepsilon^2(v_{xx} - v_t) = g(u, v, x, \varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \tag{2}$$

$$u_x(a, t, \varepsilon) = u_x(b, t, \varepsilon) = v_x(a, t, \varepsilon) = v_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, +\infty), \tag{3}$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_0(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v_0(x), \quad x \in \bar{D}, \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $D \equiv (a, b)$, а f и g – дважды непрерывно дифференцируемые функции при $(u, v, x, \varepsilon) \in \bar{I}_u \times \bar{I}_v \times \bar{D} \times [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число, а I_u и I_v – некоторые ограниченные интервалы из R^1.

Степени ε^6 и ε^2 в уравнениях (1) и (2) взяты для удобства, существенно лишь, что эти степени различны.

Введем следующие обозначения: $h(v, x, \varepsilon) = g(\psi(v, x), v, x, \varepsilon)$, $J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} h(v, x, 0)dv$.

Пусть выполнены следующие условия.

A1. Существует функция $\psi(v, x)$ такая, что $\psi(v, x) \subset I_u$, $f(\psi(v, x), v, x, 0) = 0$, $f_u(\psi(v, x), v, x, 0) > 0$ при $(v, x) \in \bar{I}_v \times \bar{D}$.

A2. Существуют функции $\bar{\varphi}(x)$ и $\hat{\varphi}(x)$ из $C^2(\bar{D})$ такие, что $\bar{\varphi}(x) < \hat{\varphi}(x)$, $[\bar{\varphi}(x), \hat{\varphi}(x)] \subset I_v$ при $x \in \bar{D}$, и в области $\Omega = \{(v, x) : \bar{\varphi}(x) \le v \le \hat{\varphi}(x),\ x \in \bar{D}\}$ функция $h(v, x, 0)$ обращается в нуль только на кривых $v = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, причем $\bar{\varphi}(x) < \varphi_1(x) < \varphi_0(x) < \varphi_2(x) < \hat{\varphi}(x)$, $h_v(\varphi_i(x), x, 0) > 0$, $i = 1, 2$; $h_v(\varphi_0(x), x, 0) < 0$, $x \in \bar{D}$.

A3. Пусть существует точка $x^* \in (a, b)$ такая, что $J(x^*) = 0$, $dJ(x^*)/dx < 0$.

При выполнении условий А1–А3 для достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$, $v_s(x, \varepsilon)$ задачи (1)–(3), причем

$$|u_s(x, \varepsilon) - \psi(v_s(x, \varepsilon), x)| = O(\varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \tag{5}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [a, x^*), \\ \varphi_2(x), & x \in (x^*, b]. \end{cases} \tag{6}$$

Этот результат следует из работы [1], где соответствующая задаче (1)–(3) стационарная система рассмотрена в случае двумерной переменной x. Как видно из (6) и (5), по крайней мере компонента решения v обладает внутренним переходным слоем в окрестности точки x^*, и поэтому решение u_s, v_s, следуя терминологии из [2], можно назвать стационарной контрастной структурой типа ступеньки (КСТС). Соответственно этому зависящее от времени решение $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3), которое имеет внутренний переходный слой в окрестности точки x^*, естественно называть нестационарной КСТС.

Заметим, что начальные функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ в задаче (1)–(4) не зависят от ε, поэтому при $t = 0$ решение не имеет внутренних переходных слоев, а значит, нестационарная КСТС в этой задаче может возникнуть лишь по истечении некоторого промежутка времени, за который она должна сформироваться. Очевидно, что формирование решения с внутренним переходным слоем происходит не из любых начальных данных.

В данной работе найдены условия на начальные функции, обеспечивающие (совместно с требованиями A1–A3) существование нестационарной КСТС в задаче (1)–(4). Иначе говоря, получен ответ на вопрос, из каких начальных данных в рассматриваемой задаче формируется решение с внутренним слоем в окрестности точки x^*. Отметим, что ранее аналогичная проблема была решена только для скалярной задачи [3].

Можно сказать, что в настоящей работе результат из [3] с помощью так называемого обобщенного метода дифференциальных неравенств (см. § 2) распространен на систему (1)–(4). Указанный метод может представлять самостоятельный интерес для доказательства существования и оценок решений систем параболических уравнений. Его центральная идея состоит в построении верхнего и нижнего решений рассматриваемой системы таких, что u-компоненты этих решений (в общем случае) зависят не только от x и t, но и от v. Данное обобщение оказывается особенно полезным, когда не удается сконструировать классические верхнее и нижнее решения.

Введем условие

A4. Множество всех точек $x \in \bar{D}$, в которых $J(x) = 0$, состоит из конечного числа отрезков и (или) точек.

Основной результат данной работы (теорема 5, см. § 5) утверждает, что формирование нестационарных КСТС в задаче (1)–(4) происходит из начальных функций, удовлетворяющих следующим условиям.

A5. Функции $u_0(x), v_0(x) \in C^2_B(\bar{D}) \equiv \{w \in C^2(\bar{D}) : w_x(a) = w_x(b) = 0\}$ и $\bar{\varphi}(x) < v_0(x) < \hat{\varphi}(x)$, $x \in \bar{D}$.

A6. Существуют функции $\bar{\psi}(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ из $C^2(\bar{D})$ такие, что справедливы соотношения: $[\bar{\psi}(x), \hat{\psi}(x)] \subset I_u$, $\bar{\psi}(x) < u_0(x) < \hat{\psi}(x)$, $\bar{\psi}(x) < \psi(v_0(x), x) < \hat{\psi}(x)$, $x \in \bar{D}$, $f(u, v_0(x), x, 0) < 0$, $(u, x) \in [\bar{\psi}(x), \psi(v_0(x), x)) \times \bar{D}$, $f(u, v_0(x), x, 0) > 0$, $(u, x) \in (\psi(v_0(x), x), \hat{\psi}(x)] \times \bar{D}$.

A7. Пусть существуют точки $x^{(-)} \in (a, x^*)$ и $x^{(+)} \in (x^*, b)$ такие, что $v_0(x^{(-)}) < \varphi_0(x^{(-)})$ и $v_0(x^{(+)}) > \varphi_0(x^{(+)})$, и, кроме того, $v_0(x) < \varphi_0(x)$ во всех точках $x \in [a, x^*)$, в которых $J(x) \leq 0$, и $v_0(x) > \varphi_0(x)$ во всех точках $x \in (x^*, b]$, в которых $J(x) \geq 0$.

Изложим кратко дальнейшее содержание работы.

В § 2 приведены основные положения обобщенного метода дифференциальных неравенств. Там же содержатся определения регулярного решения задачи (1)–(4) и решения на заданном промежутке времени.

В § 3 проведено исследование поведения решения задачи (1)–(4) для $t \in [0, \varepsilon^4]$. Оказывается, что в конце этого промежутка времени u-компонента решения отличается на величину порядка $O(\varepsilon)$ от корня ψ функции f, взятого на v-компоненте решения, в то время как v-компонента на всем промежутке остается в окрестности порядка $O(\varepsilon^2)$ начальной функции $v_0(x)$.

В § 4 доказано существование единственного решения задачи (1)–(4) на полном промежутке времени $t \geq 0$ и рассмотрено его поведение для $t \geq \varepsilon^4$. Показано, что v-компонента решения сколь угодно близко подходит к $\varphi_1(x)$ для $x \in [a, x^*)$ и к $\varphi_2(x)$ для $x \in (x^*, b]$ при $\varepsilon \to 0$ (что означает наличие внутреннего переходного слоя в окрестности x^*) за время порядка $O(\varepsilon)$, а u-компонента при $t \geq \varepsilon^4$ остается вблизи $\psi(v, x)$.

В § 5 приведен основной результат данной работы (теорема 5). Из него, в частности, следует, что при $t \geq \varepsilon^\mu$, где μ – любое число из $[0, 1)$, решение задачи (1)–(4) равномерно по t удовлетворяет тем же предельным при $\varepsilon \to 0$ соотношениям, что и стационарная КСТС u_s, v_s. Иными словами, нестационарная КСТС в задаче (1)–(4) формируется за время ε^μ.

§ 2. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В данном пункте для краткости записи зависимость функций от ε иногда опускается.

Пусть T – некоторое положительное число, либо $T = \infty$.

Определение 1. Решением задачи (1)–(4) при $t \in [0, T]$ назовем пару функций $u(x, t)$, $v(x, t)$, принадлежащих пространству $C^{1,0}(\bar{D} \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\bar{D} \times (0, T])$, удовлетворяющих уравнениям (1), (2) при $(x,t) \in D \times (0,T]$, краевым условиям (3) при $t \in [0,T]$ и начальным условиям (4).

Решение задачи (1)–(4) при $t \in [0,+\infty]$ условимся называть регулярным решением этой задачи.

Введем следующее условие.

B. Будем говорить, что выполнено условие B, если существуют число $T_0 \in [0,T)$ и функции $\bar{v}(x,t)$, $\hat{v}(x,t)$ из пространства $C^{2,1}(\bar{D} \times [T_0,T])$ такие, что

$$\bar{v}(x,t) < \hat{v}(x,t), \quad [\bar{v}(x,t), \hat{v}(x,t)] \subset I_v, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T],$$

$$\bar{v}_x(a,t) \geq 0 \geq \bar{v}_x(b,t), \quad \hat{v}_x(a,t) \leq 0 \leq \hat{v}_x(b,t), \quad t \in (T_0,T],$$

и, кроме того, существуют функции $\alpha(v,x,t)$, $\beta(v,x,t)$ из пространства $C^2(\Pi)$, где $\Pi = [\bar{v}(x,t), \hat{v}(x,t)] \times \bar{D} \times [T_0,T]$, такие, что $\alpha(v,x,t) < \beta(v,x,t)$, $[\alpha(v,x,t), \beta(v,x,t)] \subset I_u$, $(v,x,t) \in \Pi$, причем выполнены следующие требования:

1) $\forall T' \in (T_0,T]$ и для любых функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$ из пространства $C^{1,0}(\bar{D} \times [0,T']) \cap$ $\cap\, C^{2,1}(\bar{D} \times (0,T'])$, удовлетворяющих условиям

$$v(x,t) \subset I_v, \quad u(x,t) \subset I_u, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0,T_0], \tag{7}$$

$$\bar{v}(x,t) \leq v(x,t) \leq \hat{v}(x,t), \quad \alpha(v(x,t),x,t) \leq u(x,t) \leq \beta(v(x,t),x,t), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T'],$$

$$\varepsilon^2(v_{xx} - v_t) = g(u(x,t), v(x,t), x, \varepsilon), \quad (x,t) \in D \times (0,T'],$$

$$v_x(a,t) = v_x(b,t) = 0, \quad t \in (0,T'], \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \bar{D},$$

выполнены неравенства

$$\varepsilon^6(\partial^2\beta(v(x,t),x,t)/\partial x^2 - \partial\beta(v(x,t),x,t)/\partial t) - f(\beta(v(x,t),x,t), v(x,t), x, \varepsilon) < 0,$$

$$\varepsilon^6(\partial^2\alpha(v(x,t),x,t)/\partial x^2 - \partial\alpha(v(x,t),x,t)/\partial t) - f(\alpha(v(x,t),x,t), v(x,t), x, \varepsilon) > 0,$$

$$(x,t) \in D \times (T_0,T'],$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\beta(v(x,t),x,t)\right|_{x=a} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial}{\partial x}\beta(v(x,t),x,t)\right|_{x=b},$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\alpha(v(x,t),x,t)\right|_{x=a} \geq 0 \geq \left.\frac{\partial}{\partial x}\alpha(v(x,t),x,t)\right|_{x=b}, \quad t \in (T_0,T'];$$

2) существуют функции $G^{(-)}(v,x,t)$ и $G^{(+)}(v,x,t)$ из пространства $C^1(\Pi)$ такие, что выполнены неравенства

$$G^{(-)}(v,x,t) \leq g(u,v,x,\varepsilon) \leq G^{(+)}(v,x,t), \quad (u,v,x,t) \in [\alpha(v,x,t), \beta(v,x,t)] \times \Pi,$$

$$\varepsilon^2(\hat{v}_{xx} - \hat{v}_t) - G^{(-)}(\hat{v},x,t) < 0, \quad \varepsilon^2(\bar{v}_{xx} - \bar{v}_t) - G^{(+)}(\bar{v},x,t) > 0, \quad (x,t) \in D \times (T_0,T].$$

Определение 2. Если выполнено условие B, то функции $\bar{v}(x,t)$, $\alpha(v,x,t)$ и $\hat{v}(x,t)$, $\beta(v,x,t)$ назовем соответственно нижним и верхним решениями задачи (1)–(3) при $t \in [T_0,T]$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие B. Тогда если существует решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0,T]$ и выполнены соотношения (7) и*

$$\bar{v}(x,T_0) < v(x,T_0) < \hat{v}(x,T_0), \quad x \in \bar{D}, \tag{8}$$

$$\alpha(v(x,T_0),x,T_0) < u(x,T_0) < \beta(v(x,T_0),x,T_0), \quad x \in \bar{D}, \tag{9}$$

то справедливы неравенства

$$\bar{v}(x,t) < v(x,t) < \hat{v}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T], \tag{10}$$

$$\alpha(v(x,t),x,t) < u(x,t) < \beta(v(x,t),x,t), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T]. \tag{11}$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $T_1 \in (T_0,T]$ и имеют место неравенства

$$\bar{v}(x,t) \le v(x,t) \le \hat{v}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_1], \tag{12}$$

то выполнены также неравенства (11) для $(x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_1]$. Введем функции $\bar{u}(x,t) = \alpha(v(x,t),x,t)$, $\hat{u}(x,t) = \beta(v(x,t),x,t)$, $(x,t) \in \bar{D}\times[T_0,T_1]$. В силу (9) выполнены неравенства

$$\bar{u}(x,T_0) < u(x,T_0) < \hat{u}(x,T_0), \quad x \in \bar{D}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что если неравенства (11), $(x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_1]$, не выполнены, то существуют $T_2 \in (T_0,T_1]$ и $P \in \bar{D}$ такие, что

$$\bar{u}(x,t) < u(x,t) < \hat{u}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_2), \tag{14}$$

и

$$\text{либо} \quad u(P,T_2) = \bar{u}(P,T_2), \quad \text{либо} \quad u(P,T_2) = \hat{u}(P,T_2). \tag{15}$$

Заметим, что следствием этих соотношений являются нестрогие неравенства (14), а значит, учитывая (7), (12), на основании требования 1) из условия B можно заключить, что

$$\varepsilon^6(\hat{u}_{xx} - \hat{u}_t) - f(\hat{u}, v(x,t), x, \varepsilon) < 0, \quad \varepsilon^6(\bar{u}_{xx} - \bar{u}_t) - f(\bar{u}, v(x,t), x, \varepsilon) > 0, \quad (x,t) \in D \times (T_0,T_2],$$

$$\hat{u}_x(a,t) \le 0 \le \hat{u}_x(b,t), \quad \bar{u}_x(a,t) \ge 0 \ge \bar{u}_x(b,t), \quad t \in (T_0,T_2].$$

В то же время $\varepsilon^6(u_{xx} - u_t) - f(u, v(x,t), x, \varepsilon) = 0$, $(x,t) \in D \times (T_0,T_2]$, $u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$, $t \in (T_0,T_2]$. Отсюда и из (13) очевидным образом следует справедливость неравенств (14) при $(x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_2]$, противоречие которых с (15) и доказывает неравенства (11) для $(x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_1]$.

Докажем теперь неравенства (10). Пусть (10) не выполнено. Тогда в силу (8) существуют $T_3 \in (T_0,T]$ и $P_1 \in \bar{D}$ такие, что

$$\bar{v}(x,t) < v(x,t) < \hat{v}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_3), \tag{16}$$

и либо $v(P_1,T_3) = \bar{v}(P_1,T_3)$, либо $v(P_1,T_3) = \hat{v}(P_1,T_3)$.

Будем считать, что $v(P_1,T_3) = \hat{v}(P_1,T_3)$ (случай $v(P_1,T_3) = \bar{v}(P_1,T_3)$ рассматривается аналогично).

Заметим, что в силу доказанного выше из (16) следует справедливость неравенств (11) для $(x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_3]$, учитывая которые и (16), на основании требования 2) условия B можно заключить, что $\varepsilon^2(v_{xx}-v_t) = g(u(x,t),v,x,\varepsilon) \ge G^{(-)}(v,x,t)$, $\varepsilon^2(\hat{v}_{xx}-\hat{v}_t) < G^{(-)}(\hat{v},x,t)$, $(x,t) \in D \times (T_0,T_3]$. Из этих неравенств, соотношений

$$v_x(a,t) = v_x(b,t) = 0, \quad \hat{v}_x(a,t) \le 0 \le \hat{v}_x(b,t), \quad t \in (T_0,T_3],$$

и неравенств (8) очевидным образом следует, что $\hat{v}(x,t) > v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{D} \times [T_0,T_3]$. Это противоречит предположению, что $v(P_1,T_3) = \hat{v}(P_1,T_3)$, а значит, выполнены неравенства (10). В силу доказанного выше, отсюда следует, что выполнены и неравенства (11). Лемма 1 доказана.

Теперь сформулируем и докажем основной результат данного пункта о существовании решения задачи (1)–(4) при $t \in [0,T]$.

Теорема 1. *Пусть справедливы следующие требования: 1) выполнено условие B; 2) функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$ принадлежат пространству $C^2_B(\bar{D})$; 3) если существует решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0,T_0]$, то оно удовлетворяет соотношениям (7)–(9).*

Тогда существует единственное решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0,T]$ и оно удовлетворяет неравенствам (10), (11).

Доказательство. Пусть существует решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0,T]$. Тогда в силу требования 3) данной теоремы выполнены соотношения (7)–(9), и поэтому в силу леммы 1 справедливы неравенства (10), (11), а значит, $v(x,t) \subset I_v$, $u(x,t) \subset I_u$, $(x,t) \in \bar{D} \times [0,T]$. Отсюда, учитывая ограниченность интервалов I_v, I_u и требование 2) данной теоремы, можно заключить (см., например, [7]), что существует единственное решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0,T]$. В силу сказанного выше оно удовлетворяет неравенствам (10), (11). Теорема 1 доказана.

Замечание. Если $T_0 = 0$, то требование 3) теоремы 1 переходит в следующие условия на начальные функции: $\bar{v}(x,0) < v_0(x) < \hat{v}(x,0)$, $\alpha(v_0(x),x,0) < u_0(x) < \beta(v_0(x),x,0)$, $x \in \bar{D}$.

В дальнейшем при проверке условия В будет полезен следующий результат.

Лемма 2. *Пусть $T' > 0$ и $d > 0$ – некоторые числа, а функция $w(x,t) \in C^{1,0}(\bar{D}\times[0,T'])\cap C^{2,1}(\bar{D} \times (0,T'])$ является решением задачи*

$$d(w_{xx} - w_t) = q(x,t), \quad (x,t) \in D \times (0,T'], \quad w_x(a,t) = w_x(b,t) = 0, \quad t \in (0,T'],$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in \bar{D},$$

где $w_0(x) \in C_B^2(\bar{D})$, $q(x,t) \in C(\Sigma)$, $\Sigma = \bar{D}\times[0,T']$. Тогда справедливо неравенство $\|w\|_{C^1(\Sigma)} \le M_D(\|w_0\|_{C^2(\bar{D})} + d^{-1}\|q\|_{C(\Sigma)} + \|w\|_{C(\Sigma)})$, где постоянная $M_D > 0$ зависит только от D.

Утверждение леммы 2 следует из известных оценок (см., например, [4–6]) норм решений параболических уравнений.

§ 3. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ НАЧАЛЬНОГО МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

Здесь доказывается существование и рассматривается поведение решения задачи (1)–(4) при $t \in [0,\varepsilon^4]$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия А1, А2, А5, А6. Тогда при достаточно малых ε существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0,\varepsilon^4]$, причем*

$$\bar{\psi}(x) - M\varepsilon^2 < u(x,t,\varepsilon) < \hat{\psi}(x) + M\varepsilon^2, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0,\varepsilon^4], \tag{17}$$

$$|v(x,t,\varepsilon) - v_0(x)| < M\varepsilon^2, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0,\varepsilon^4], \tag{18}$$

где $M > 0$ – некоторая постоянная, фиксированная при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Зафиксируем постоянные $M_0 > 0$ и $k > 0$ так, что $|\hat{\psi}_x(a)| + |\hat{\psi}_x(b)| + |\bar{\psi}_x(a)| + |\bar{\psi}_x(b)| < k$ и при достаточно малых ε $|g(u,v,x,\varepsilon)| \le M_0/2$, $(u,v,x) \in \bar{I}_u \times \bar{I}_v \times \bar{D}$. Введем при $x \in \bar{D}$, $t \in [0,\varepsilon^4]$ функции

$$\hat{v}(x,t,\varepsilon) = v_0(x) + M_0\varepsilon^2 \exp(t/\varepsilon^4), \quad \bar{v}(x,t,\varepsilon) = v_0(x) - M_0\varepsilon^2 \exp(t/\varepsilon^4),$$

$$\beta(x,\varepsilon) = \hat{\psi}(x) + \varepsilon^2 P(x,\varepsilon), \quad \alpha(x,\varepsilon) = \bar{\psi}(x) - \varepsilon^2 P(x,\varepsilon),$$

где $P(x,\varepsilon) = \exp(k(a-x)/\varepsilon^2) + \exp(k(x-b)/\varepsilon^2)$. При достаточно малых ε в области своего определения данные функции удовлетворяют соотношениям $\bar{v}(x,t,\varepsilon) < \hat{v}(x,t,\varepsilon)$, $\alpha(x,\varepsilon) < \beta(x,\varepsilon)$, $[\bar{v}(x,t,\varepsilon), \hat{v}(x,t,\varepsilon)] \subset I_v$, $[\alpha(x,\varepsilon), \beta(x,\varepsilon)] \subset I_u$ и, кроме того, $\bar{v}_x(a,t,\varepsilon) = \hat{v}_x(a,t,\varepsilon) = v_0'(a) = 0$, $\bar{v}_x(b,t,\varepsilon) = \hat{v}_x(b,t,\varepsilon) = v_0'(b) = 0$, $t \in [0,\varepsilon^4]$.

Покажем, что при достаточно малых ε функции $\bar{v}(x,t,\varepsilon)$, $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\hat{v}(x,t,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ являются нижним и верхним решениями задачи (1)–(3) при $t \in [0,\varepsilon^4]$.

Заметим, что в данном случае функции α и β удалось выбрать не зависящими от v, и это позволяет проверить выполнение требования 1) условия В по упрощенной схеме.

Пусть $T' \in (0,\varepsilon^4]$, $v(x,t) \in C(\bar{D} \times [0,T'])$ и $\bar{v}(x,t,\varepsilon) \le v(x,t) \le \hat{v}(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \bar{D} \times [0,T']$. Заметим, что следствием последних неравенств и вида функций $\bar{v}$, $\hat{v}$, α, β является соотношение

$$|f(\beta(x,\varepsilon), v(x,t), x, \varepsilon) - f(\hat{\psi}(x), v_0(x), x, 0)| = O(\varepsilon), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0,T'],$$

а в силу условия А6 существует постоянная $M_1 > 0$ такая, что $f(\hat{\psi}(x), v_0(x), x, 0) > M_1$, $x \in \bar{D}$. Поэтому при достаточно малых ε

$$\varepsilon^6(\beta_{xx} - \beta_t) - f(\beta(x,\varepsilon), v(x,t), x, \varepsilon) =$$

$$= O(\varepsilon^4) - f(\hat{\psi}(x), v_0(x), x, 0) - [f(\beta(x,\varepsilon), v(x,t), x, \varepsilon) - f(\hat{\psi}(x), v_0(x), x, 0)] \le$$
$$\le -M_1/2 < 0, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0, T'].$$

Аналогично

$$\varepsilon^6(\alpha_{xx} - \alpha_t) - f(\alpha(x,\varepsilon), v(x,t), x, \varepsilon) > 0, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0, T'].$$

Вместе с тем в силу выбора k при достаточно малых ε имеем $\beta_x(a,\varepsilon) = \hat{\psi}_x(a) - k + O(\varepsilon) < 0 < \beta_x(b,\varepsilon) = \hat{\psi}_x(b) + k + O(\varepsilon)$ и аналогично $\alpha_x(a,\varepsilon) > 0 > \alpha_x(b,\varepsilon)$.

Проверим теперь выполнение требования 2) условия В. Введем функции $G^{(-)} = -M_0/2$, $G^{(+)} = M_0/2$. Заметим, что в силу выбора постоянной M_0 при достаточно малых ε $G^{(-)} \le g(u,v,x,\varepsilon) \le G^{(+)}$, $(u,v,x) \in \bar{I}_u \times \bar{I}_v \times \bar{D}$, и, кроме того,

$$\varepsilon^2(\hat{v}_{xx} - \hat{v}_t) - G^{(-)} = -M_0 \exp(t/\varepsilon^4) + M_0/2 + O(\varepsilon^2) < 0, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^4].$$

Аналогично устанавливается, что при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\varepsilon^2(\bar{v}_{xx} - \bar{v}_t) - G^{(+)} > 0, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^4].$$

Итак, функции $\bar{v}$, α и $\hat{v}$, β удовлетворяют при достаточно малых ε требованиям 1) и 2) условия В для $T_0 = 0$ и $T = \varepsilon^4$ и, следовательно, являются нижним и верхним решениями задачи (1)–(3) при $t \in [0, \varepsilon^4]$.

Нетрудно проверить, что $\bar{v}(x,0,\varepsilon) < v_0(x) < \hat{v}(x,0,\varepsilon)$, $\alpha(x,\varepsilon) < u_0(x) < \beta(x,\varepsilon)$, $x \in \bar{D}$. Таким образом, на основании теоремы 1 (с учетом замечания к этой теореме) можно заключить, что при достаточно малых ε существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0, \varepsilon^4]$ и $\bar{v}(x,t,\varepsilon) < v(x,t,\varepsilon) < \hat{v}(x,t,\varepsilon)$, $\alpha(x,\varepsilon) < u(x,t,\varepsilon) < \beta(x,\varepsilon)$, $(x,t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^4]$. Из последних соотношений и вида функций $\bar{v}$, α, $\hat{v}$, β следуют оценки (17), (18). Лемма 3 доказана.

В следующей лемме уточняется поведение u-компоненты решения.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия А1, А2, А5, А6. Тогда при достаточно малых ε u-компонента решения $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) удовлетворяет соотношению*

$$|u(x,t,\varepsilon) - \psi(v_0(x), x)| < L\varepsilon, \quad t = \varepsilon^4, \quad x \in \bar{D}, \tag{19}$$

где $L > 0$ – некоторая постоянная, фиксированная при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Для удобства введем следующие обозначения:

$$F(u,x,\varepsilon) \equiv f(u, v_0(x), x, \varepsilon), \quad \psi(x) \equiv \psi(v_0(x), x).$$

Заметим, что u-компонента решения $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0, \varepsilon^4]$ является решением следующей задачи:

$$\varepsilon^6(u_{xx} - u_t) = f(u, v(x,t,\varepsilon), x, \varepsilon), \quad (x,t) \in D \times (0, \varepsilon^4], \tag{20}$$

$$u_x(a,t,\varepsilon) = u_x(b,t,\varepsilon) = 0, \quad t \in (0, \varepsilon^4], \tag{21}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = u_0(x), \quad x \in \bar{D}, \tag{22}$$

причем в силу леммы 3

$$|v(x,t,\varepsilon) - v_0(x)| = O(\varepsilon^2), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^4]. \tag{23}$$

Введем функции $\hat{u}(x,t,\varepsilon)=\psi(x)+\hat{Q}(x,t,\varepsilon)+\varepsilon^2P(x,\varepsilon)$, $\bar{u}(x,t,\varepsilon)=\psi(x)+\bar{Q}(x,t,\varepsilon)-\varepsilon^2P(x,\varepsilon)$, $(x,t)\in\bar{D}\times[0,\varepsilon^4]$, где $\hat{Q}(x,t,\varepsilon)=C_1\varepsilon+((t-\varepsilon^4)/\varepsilon^4)(\psi(x)+C_1\varepsilon-\hat{\psi}(x))$, $\bar{Q}(x,t,\varepsilon)=-C_1\varepsilon+ +((t-\varepsilon^4)/\varepsilon^4)(\psi(x)-C_1\varepsilon-\bar{\psi}(x))$, $P(x,\varepsilon)=\exp(k(a-x)/\varepsilon^2)+\exp(k(x-b)/\varepsilon^2)$. Видно, что при любых $C_1>0$, $k>0$ и достаточно малых ε выполнены соотношения

$$\bar{u}(x,t,\varepsilon)<\hat{u}(x,t,\varepsilon),\quad [\bar{u}(x,t,\varepsilon),\hat{u}(x,t,\varepsilon)]\subset I_u,\quad (x,t)\in\bar{D}\times[0,\varepsilon^4], \tag{24}$$

$$\bar{u}(x,0,\varepsilon)<u_0(x)<\hat{u}(x,0,\varepsilon),\quad x\in\bar{D}. \tag{25}$$

Выберем постоянные $C_1>0$ и $k>0$ так, чтобы при достаточно малых ε выполнялись неравенства

$$\varepsilon^6(\hat{u}_{xx}-\hat{u}_t)-f(\hat{u}(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)<0,$$

$$\varepsilon^6(\bar{u}_{xx}-\bar{u}_t)-f(\bar{u}(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)>0,\quad (x,t)\in\bar{D}\times[0,\varepsilon^4], \tag{26}$$

$$\hat{u}_x(a,t,\varepsilon)\le 0\le\hat{u}_x(b,t,\varepsilon),\quad \bar{u}_x(a,t,\varepsilon)\ge 0\ge\bar{u}_x(b,t,\varepsilon),\quad t\in[0,\varepsilon^4]. \tag{27}$$

Обоснуем возможность такого выбора постоянных C_1 и k. Проведем рассуждения для $\hat{u}(x,t,\varepsilon)$ (для $\bar{u}(x,t,\varepsilon)$ обоснование аналогично).

Для этого нам понадобится следующее свойство функции $F(u,x,0)$, вытекающее из условий A1 и A6:

$$F(\psi(x)+\xi,x,0)=m(\xi,x)\xi, \tag{28}$$

где $m(\xi,x)=\int_0^1 F_u(\psi(x)+s\xi,x,0)ds$, причем существует $m_0>0$ такое, что

$$m(\xi,x)\ge m_0,\quad (\xi,x)\in[0,\hat{\psi}(x)-\psi(x)]\times\bar{D}. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь функцию $f(\hat{u}(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)$.

В силу (23)

$$f(\hat{u}(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)=$$

$$=F(\hat{u}(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)+[f(\hat{u}(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)-f(\hat{u}(x,t,\varepsilon),v_0(x),x,\varepsilon)]=$$

$$=F(\hat{u}(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)+O(\varepsilon^2),\quad (x,t)\in\bar{D}\times[0,\varepsilon^4].$$

С другой стороны (см. (28), (29)),

$$F(\hat{u}(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)=F(\psi(x)+\hat{Q}(x,t,\varepsilon),x,0)+[F(\hat{u}(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)-F(\hat{u}(x,t,\varepsilon),x,0)]+$$

$$+[F(\hat{u}(x,t,\varepsilon),x,0)-F(\psi(x)+\hat{Q}(x,t,\varepsilon),x,0)]=$$

$$=m(\hat{Q}(x,t,\varepsilon),x)\hat{Q}(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon)+O(\varepsilon^2)\ge m_0C_1\varepsilon-C_2\varepsilon,\quad (x,t)\in\bar{D}\times[0,\varepsilon^4],$$

где C_2 – некоторая фиксированная при $\varepsilon\to 0$ постоянная.

Из двух последних соотношений можно заключить, что $C_1>0$ можно выбрать так, что при достаточно малых ε $f(\hat{u}(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)\ge m_0C_1\varepsilon/2$, $(x,t)\in\bar{D}\times[0,\varepsilon^4]$. Отсюда следует неравенство

$$\varepsilon^6(\hat{u}_{xx}-\hat{u}_t)-f(\hat{u}(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon)\le -m_0C_1\varepsilon/2+O(\varepsilon^2)<0,\quad (x,t)\in\bar{D}\times[0,\varepsilon^4],$$

т.е. первое неравенство в (26) выполнено.

Для выбора постоянной k рассмотрим при $t\in[0,\varepsilon^4]$ следующие соотношения:

$$\hat{u}_x(a,t,\varepsilon)=\psi_x(a)+((t-\varepsilon^4)/\varepsilon^4)(\psi_x(a)-\hat{\psi}_x(a))-k+O(\varepsilon)\le C_3-k+O(\varepsilon),$$

$$\hat{u}_x(b,t,\varepsilon)=\psi_x(b)+((t-\varepsilon^4)/\varepsilon^4)(\psi_x(b)-\hat{\psi}_x(b))+k+O(\varepsilon)\ge k-C_3+O(\varepsilon).$$

Ясно, что при достаточно большом k из этих соотношений последует первое неравенство (27).

Итак, при достаточно малых ε выполнены соотношения (24)–(27).

Из (20)–(22) и (24)–(27) очевидным образом следует, что $\bar{u}(x,t,\varepsilon) < u(x,t,\varepsilon) < \hat{u}(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \bar{D} \times [0,\varepsilon^4]$. В частности, при $t = \varepsilon^4$ имеем $\psi(x) - C_1\varepsilon - \varepsilon^2 P(x,\varepsilon) < u(x,t,\varepsilon) < \psi(x) + C_1\varepsilon + \varepsilon^2 P(x,\varepsilon)$, $x \in \bar{D}$, откуда при достаточно малых ε вытекает неравенство (19) с $L = 2C_1$. Лемма 4 доказана.

Из лемм 3, 4 вытекает следующий основной результат о существовании и поведении решения задачи (1)–(4) при $t \in [0,\varepsilon^4]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A1, A2, A5, A6. Тогда при достаточно малых ε существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) при $t \in [0,\varepsilon^4]$, причем*

$$\begin{gathered} v(x,t,\varepsilon) \subset I_v, \quad u(x,t,\varepsilon) \subset I_u, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0,\varepsilon^4], \\ |v(x,t,\varepsilon) - v_0(x)| < K\varepsilon^2, \quad |u(x,t,\varepsilon) - \psi(v(x,t,\varepsilon),x)| < K\varepsilon, \quad t = \varepsilon^4, \ x \in \bar{D}, \end{gathered} \tag{30}$$

где $K > 0$ – некоторая постоянная, фиксированная при $\varepsilon \to 0$.

§ 4. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ НА ПОЛНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

4.1. Теорема о существовании решения. Докажем следующий результат о существовании решения задачи (1)–(4) на полном промежутке времени.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A1–A6. Тогда при достаточно малых ε существует единственное регулярное решение задачи (1)–(4), причем*

$$\begin{gathered} \bar{\varphi}(x) - N\varepsilon < v(x,t,\varepsilon) < \hat{\varphi}(x) + N\varepsilon, \\ |\psi(v(x,t,\varepsilon),x) - u(x,t,\varepsilon)| < N\varepsilon, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty), \end{gathered} \tag{31}$$

где $N > 0$ – некоторая постоянная, фиксированная при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Определим функции $\hat{v}(x,\varepsilon) = \hat{\varphi}(x) + \varepsilon R(x,\varepsilon)$, $\bar{v}(x,\varepsilon) = \bar{\varphi}(x) - \varepsilon R(x,\varepsilon)$, $x \in \bar{D}$, где $R(x,\varepsilon) = \exp(k(a-x)/\varepsilon) + \exp(k(x-b)/\varepsilon)$, и функции

$$\beta(v,x,\varepsilon) = \psi(v,x) + C\varepsilon + \varepsilon^2 P(x,\varepsilon), \quad \alpha(v,x,\varepsilon) = \psi(v,x) - C\varepsilon - \varepsilon^2 P(x,\varepsilon), \quad (v,x) \in \bar{I}_v \times \bar{D},$$

где $P(x,\varepsilon) = \exp(k(a-x)/\varepsilon^2) + \exp(k(x-b)/\varepsilon^2)$.

Видно, что при любых $C > 0$, $k > 0$ и при достаточно малых ε данные функции в своих областях определения удовлетворяют соотношениям

$$\bar{v} < \hat{v}, \quad [\bar{v},\hat{v}] \subset I_v, \quad \alpha < \beta, \quad [\alpha,\beta] \subset I_u, \tag{32}$$

и, кроме того, при достаточно большом k

$$\begin{gathered} \hat{v}_x(a,\varepsilon) = \hat{\varphi}_x(a) - k + O(\varepsilon) < 0, \quad \bar{v}_x(a,\varepsilon) = \bar{\varphi}_x(a) + k + O(\varepsilon) > 0, \\ \hat{v}_x(b,\varepsilon) = \hat{\varphi}_x(b) + k + O(\varepsilon) > 0, \quad \bar{v}_x(b,\varepsilon) = \bar{\varphi}_x(b) - k + O(\varepsilon) < 0. \end{gathered}$$

Выберем постоянные $C > 0$ и $k > 0$ таким образом, чтобы при достаточно малых ε функции $\bar{v}$, α и $\hat{v}$, β были нижним и верхним решениями задачи (1)–(3) при $t \in [\varepsilon^4, +\infty]$.

Возможность такого выбора C и k обоснуем на примере функций $\hat{v}, \beta$.

Пусть $T' \in (\varepsilon^4, +\infty)$ и функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$ из пространства $C^{1,0}(\bar{D} \times [0,T']) \cap C^{2,1}(\bar{D} \times (0,T'])$ удовлетворяют условиям

$$v(x,t) \subset I_v, \quad u(x,t) \subset I_u, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [0,\varepsilon^4], \tag{33}$$

$$\bar{v}(x,\varepsilon) \le v(x,t) \le \hat{v}(x,\varepsilon), \quad \alpha(v(x,t),x,\varepsilon) \le u(x,t) \le \beta(v(x,t),x,\varepsilon), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, T'], \tag{34}$$

$$\varepsilon^2(v_{xx} - v_t) = g(u(x,t),v(x,t),x,\varepsilon), \quad (x,t) \in D \times (0,T'], \tag{35}$$

$$v_x(a,t) = v_x(b,t) = 0, \quad t \in (0,T'], \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \bar{D}. \tag{36}$$

Рассмотрим выражение

$$\varepsilon^6(\partial^2\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial x^2 - \partial\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial t) - f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon^6\beta_{xx}(v(x,t),x,\varepsilon) - f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,\varepsilon) + \varepsilon^6\beta_v(v(x,t),x,\varepsilon)(v_{xx}-v_t)+$$
$$+\varepsilon^6\beta_{vv}(v(x,t),x,\varepsilon)v_x^2 + 2\varepsilon^6\beta_{vx}(v(x,t),x,\varepsilon)v_x, \quad (x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T'].$$

Оценим при достаточно малых ε каждое слагаемое этого выражения, используя (32)–(36):

$$\varepsilon^6|\beta_{xx}(v(x,t),x,\varepsilon)| = \varepsilon^6|(\psi_{xx}(v(x,t),x) + (k^2/\varepsilon^2)P(x,\varepsilon))| = O(\varepsilon^4), \quad (x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T'].$$

$$f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,\varepsilon) = f(\psi(v(x,t),x)+C\varepsilon,v(x,t),x,0)+$$
$$+[f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,\varepsilon) - f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,0)]+$$
$$+[f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,0) - f(\psi(v(x,t),x)+C\varepsilon,v(x,t),x,0)] \geq$$
$$\geq \varepsilon n_0 C - \varepsilon C_1 + O(\varepsilon^2), \quad (x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T'],$$

где $C_1 > 0$ – некоторая постоянная, а $n_0 > 0$ выбрано так, что $f_u(\psi(v,x),v,x,0) \geq n_0$, $(v,x)\in\bar{I}_v\times\bar{D}$ (см. условие А1). Выберем $C>0$ столь большим, чтобы при достаточно малых ε выполнялось неравенство $f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,\varepsilon) \geq \varepsilon n_0 C/2$, $(x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T']$.

Рассмотрим слагаемое

$$\varepsilon^6|\beta_v(v(x,t),x,\varepsilon)(v_{xx}-v_t)| =$$
$$= \varepsilon^4|\psi_v(v(x,t),x)||g(u(x,t),v(x,t),x,\varepsilon)| = O(\varepsilon^4), \quad (x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T'].$$

Чтобы оценить слагаемое $\varepsilon^6|\beta_{vv}(v(x,t),x,\varepsilon)|v_x^2 = \varepsilon^6|\psi_{vv}(v(x,t),x,\varepsilon)|v_x^2$, воспользуемся леммой 2, согласно которой $\|v_x\|_{C(\Pi)} \leq M_D(\|v_0\|_{C^2(\bar{D})} + \varepsilon^{-2}\|g(u(x,t),v(x,t),x,\varepsilon)\|_{C(\Pi)} + \|v\|_{C(\Pi)})$, а значит,

$$\|v_x\|_{C(\Pi)} \leq \varepsilon^{-2}M_D C_2, \tag{37}$$

где $\Pi \equiv \bar{D}\times[0,T']$, а $M_D>0$ и $C_2>0$ – некоторые постоянные.

Из (37) следует, что $\varepsilon^6|\beta_{vv}(v(x,t),x,\varepsilon)|v_x^2 = O(\varepsilon^2)$, $(x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T']$, и наконец,

$$2\varepsilon^6|\beta_{vx}(v(x,t),x,\varepsilon)||v_x| = 2\varepsilon^6|\psi_{vx}(v(x,t),x)||v_x| = O(\varepsilon^4), \quad (x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T'].$$

Таким образом, при достаточно малых ε

$$\varepsilon^6(\partial^2\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial x^2 - \partial\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial t) - f(\beta(v(x,t),x,\varepsilon),v(x,t),x,\varepsilon) \leq$$
$$\leq -\varepsilon n_0 C/2 + O(\varepsilon^2) < 0, \quad (x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,T']. \tag{38}$$

Рассмотрим теперь равенства

$$\partial\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial x|_{x=a} = \beta_x(v(a,t),a,\varepsilon) = \psi_x(v(a,t),a) - k + O(\varepsilon),$$
$$\partial\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial x|_{x=b} = \psi_x(v(b,t),b) + k + O(\varepsilon), \quad t\in[\varepsilon^4,T'].$$

Выберем столь большое $k>0$, чтобы при достаточно малых ε были выполнены неравенства

$$\partial\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial x|_{x=a} \leq 0 \leq \partial\beta(v(x,t),x,\varepsilon)/\partial x|_{x=b}, \quad t\in[\varepsilon^4,T']. \tag{39}$$

Далее зафиксируем постоянную $C_3>0$ так, чтобы при достаточно малых ε

$$|g(u,v,x,\varepsilon) - g(\psi(v,x),v,x,\varepsilon)| =$$
$$= \left|\int\limits_0^1 g_u(\psi(v,x)+s(u-\psi(v,x)),v,x,\varepsilon)\,ds\right||u-\psi(v,x)| \leq C_3\varepsilon, \tag{40}$$
$$(u,v,x)\in[\alpha(v,x,\varepsilon),\beta(v,x,\varepsilon)]\times\bar{I}_v\times\bar{D},$$

и введем функции $G^{(-)}(v,x,\varepsilon) = h(v,x,\varepsilon) - C_3\varepsilon$, $G^{(+)}(v,x,\varepsilon) = h(v,x,\varepsilon) + C_3\varepsilon$. Напомним, что $h(v,x,\varepsilon) = g(\psi(v,x),v,x,\varepsilon)$.

Из (40) следует, что

$$G^{(-)}(v,x,\varepsilon) \le g(u,v,x,\varepsilon) \le G^{(+)}(v,x,\varepsilon), \quad (u,v,x) \in [\alpha(v,x,\varepsilon),\beta(v,x,\varepsilon)] \times \bar{I}_v \times \bar{D}. \tag{41}$$

Кроме того, в силу условия A2 существует $n_1 > 0$ такое, что при достаточно малых ε $G^{(-)}(\hat{v}(x,\varepsilon),x,\varepsilon) = h(\hat{\varphi}(x)+\varepsilon R(x,\varepsilon),x,\varepsilon) - C_3\varepsilon \ge n_1$, $x \in \bar{D}$. Поэтому при достаточно малых ε

$$\varepsilon^2(\hat{v}_{xx} - \hat{v}_t) - G^{(-)}(\hat{v},x,\varepsilon) \le -n_1 + O(\varepsilon) < 0, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty). \tag{42}$$

Соотношения (38), (39) и (42) (совместно с (41)) показывают, что при достаточно малых ε функции $\hat{v}$, β являются верхним решением задачи (1)–(3) при $t \in [\varepsilon^4, +\infty]$.

Аналогичным образом, увеличивая при необходимости C и k, можно показать, что при достаточно малых ε функции $\bar{v}$, α являются нижним решением задачи (1)–(3) при $t \in [\varepsilon^4, +\infty]$. При этом используется функция $G^{(+)}(v,x,\varepsilon)$, введенная выше.

В силу теоремы 2 при достаточно малых ε любое регулярное решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) удовлетворяет соотношениям (30).

С другой стороны, в силу требования A5 $\bar{\varphi}(x) < v_0(x) < \hat{\varphi}(x)$, а значит, можно увеличить, если потребуется, C так, что при достаточно малых ε, $t = \varepsilon^4$ и $x \in \bar{D}$ будут выполнены неравенства

$$\bar{v}(x,\varepsilon) < v(x,t,\varepsilon) < \hat{v}(x,\varepsilon), \quad \alpha(v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon) < u(x,t,\varepsilon) < \beta(v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon). \tag{43}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, причем $T_0 = \varepsilon^4$, $T = \infty$. Поэтому можно заключить, что при достаточно малых ε существует единственное регулярное решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) и имеют место неравенства (43) для $(x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty)$. Отсюда непосредственно следует (31). Теорема 3 доказана.

4.2. Вспомогательная задача. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2(v_{xx} - v_t) = H(v,x,\varepsilon), \quad (x,t) \in D \times (\varepsilon^4, +\infty), \tag{44}$$

$$v_x(a,t,\varepsilon) = v_x(b,t,\varepsilon) = 0, \quad t \in (\varepsilon^4, +\infty), \quad v(x,t,\varepsilon) = V_0(x,\varepsilon), \quad t = \varepsilon^4, \quad x \in \bar{D}, \tag{45}$$

$H(v,x,\varepsilon) = h(v,x,\varepsilon) + C\varepsilon$, $V_0(x,\varepsilon) = v_0(x) + C\varepsilon^2$, где C – некоторая постоянная, которая может быть любого знака.

Решение задачи (44), (45) из пространства $C^{1,0}(\bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty)) \cap C^{2,1}(\bar{D} \times (\varepsilon^4, +\infty))$ будем называть регулярным решением этой задачи.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия A1–A7. Тогда при достаточно малых ε существует единственное регулярное решение $v_\varepsilon(x,t)$ задачи (44), (45), причем $v_\varepsilon(x,t) \subset I_v$, $(x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty)$, и для любого $\eta > 0$ и любого $\Delta > 0$, такого, что $[x^* - \Delta, x^* + \Delta] \subset (a,b)$, существует $T_s > 0$ такое, что при достаточно малых ε справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} \varphi_2(x) + \eta > v_\varepsilon(x,t) > \varphi_1(x) - \eta, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon T_s, +\infty), \quad v_\varepsilon(x,t) < \varphi_1(x) + \eta, \\ (x,t) \in [a, x^* - \Delta] \times [\varepsilon T_s, +\infty), \quad v_\varepsilon(x,t) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x,t) \in [x^* + \Delta, b] \times [\varepsilon T_s, +\infty). \end{gathered} \tag{46}$$

Доказательство. Перейдем с помощью замены переменной $\tau = (t - \varepsilon^4)/\varepsilon^2$ от задачи (44), (45) для функции $v(x,t,\varepsilon)$ к задаче

$$\varepsilon^2 w_{xx} - w_\tau = H(w,x,\varepsilon), \quad (x,\tau) \in D \times (0, +\infty), \tag{47}$$

$$w_x(a,\tau,\varepsilon) = w_x(b,\tau,\varepsilon) = 0, \quad \tau \in (0, +\infty), \quad w(x,0,\varepsilon) = V_0(x,\varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \tag{48}$$

для функции $w(x,\tau,\varepsilon) = v(x, \varepsilon^2\tau + \varepsilon^4, \varepsilon)$. Задача такого типа рассмотрена в [3].

В силу леммы 1 из [3] при достаточно малых ε задача (47), (48) имеет единственное регулярное решение $w_\varepsilon(x,\tau)$ и

$$w_\varepsilon(x,\tau) \subset I_v, \quad (x,\tau) \in \bar{D} \times [0,+\infty). \tag{49}$$

Из доказательства теоремы 6 в [3] следует, что для любого $\eta > 0$ и любого $\Delta > 0$, такого, что $[x^* - \Delta, x^* + \Delta] \subset (a,b)$, при достаточно малых ε существует $T_\varepsilon > 0$ такое, что имеют место неравенства

$$\begin{gathered}\varphi_1(x) - \eta < w_\varepsilon(x,\tau) < \varphi_2(x) + \eta, \quad (x,\tau) \in \bar{D} \times [T_\varepsilon, +\infty),\\ w_\varepsilon(x,\tau) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x,\tau) \in [a, x^* - \Delta] \times [T_\varepsilon, +\infty),\\ w_\varepsilon(x,\tau) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x,\tau) \in [x^* + \Delta, b] \times [T_\varepsilon, +\infty),\end{gathered} \tag{50}$$

причем T_ε можно взять в виде $T_\varepsilon = T/\varepsilon$, где $T > 0$ – некоторая постоянная.

Таким образом, можно заключить, что при достаточно малых ε существует единственное регулярное решение $v_\varepsilon(x,t) = w_\varepsilon(x,(t-\varepsilon^4)/\varepsilon^2)$ задачи (44), (45), причем выполнено соотношение (49) для $w_\varepsilon(x,\tau) = v_\varepsilon(x,\varepsilon^2\tau + \varepsilon^4)$, и для любого $\eta > 0$ и любого $\Delta > 0$, такого, что $[x^* - \Delta, x^* + \Delta] \subset (a,b)$, при достаточно малых ε выполнены соотношения (50), в которых $w_\varepsilon(x,\tau) = v_\varepsilon(x,\varepsilon^2\tau + \varepsilon^4)$, а $T_\varepsilon = T/\varepsilon$. Отсюда следует утверждение данной леммы с $T_s = 2T$. Лемма 5 доказана.

4.3. Уточнение поведения v-компоненты решения.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия A1–A7. Тогда для любого $\eta > 0$ и любого $\Delta > 0$, такого, что $[x^* - \Delta, x^* + \Delta] \subset (a,b)$, существует $T_s > 0$ такое, что при достаточно малых ε для v-компоненты регулярного решения $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) справедливы неравенства (46) с заменой $v_\varepsilon(x,t)$ на $v(x,t,\varepsilon)$.*

Доказательство. Выберем постоянную $C > 0$ таким образом, чтобы при достаточно малых ε были выполнены соотношения:

$$h(v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon) - C\varepsilon \le g(u(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon) \le h(v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon) + C\varepsilon, \quad (x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty),$$

$$v_0(x) - C\varepsilon^2 \le v(x,t,\varepsilon) \le v_0(x) + C\varepsilon^2, \quad t = \varepsilon^4,\ x \in \bar{D},$$

где $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ – регулярное решение задачи (1)–(4). Такой выбор C возможен в силу теорем 2, 3.

Рассмотрим следующие задачи:

$$\varepsilon^2(v_{xx}^{(\pm)} - v_t^{(\pm)}) = H^{(\pm)}(v^{(\pm)},x,\varepsilon), \quad (x,t) \in D \times (\varepsilon^4, +\infty),$$

$$v_x^{(\pm)}(a,t,\varepsilon) = v_x^{(\pm)}(b,t,\varepsilon) = 0, \quad t \in (\varepsilon^4, +\infty), \quad v^{(\pm)}(x,t,\varepsilon) = V_0^{(\pm)}(x,\varepsilon), \quad t = \varepsilon^4,\ x \in \bar{D},$$

где $H^{(\pm)}(v,x,\varepsilon) = h(v,x,\varepsilon) \mp C\varepsilon$, $V_0^{(\pm)}(x,\varepsilon) = v_0(x) \pm C\varepsilon^2$.

В силу леммы 5 при достаточно малых ε существуют единственные регулярные решения $v^{(+)}(x,t,\varepsilon)$, $v^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ этих задач, причем $v^{(\pm)}(x,t,\varepsilon) \subset I_v$, $(x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty)$, и для любого $\eta > 0$ и любого $\Delta > 0$, такого, что $[x^* - \Delta, x^* + \Delta] \subset (a,b)$, существуют $T_s^{(+)} > 0$ и $T_s^{(-)} > 0$ такие, что при достаточно малых ε выполнены неравенства (46) с заменой $v_\varepsilon(x,t)$ на $v^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ и $T_s = \max(T_s^{(-)}, T_s^{(+)})$.

Нетрудно показать, что при достаточно малых ε

$$v^{(+)}(x,t,\varepsilon) \ge v(x,t,\varepsilon) \ge v^{(-)}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \bar{D} \times [\varepsilon^4, +\infty). \tag{51}$$

Докажем, например, левое неравенство (51). Действительно, так как при достаточно малых ε

$$\varepsilon^2(v_{xx} - v_t) = g(u(x,t,\varepsilon),v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon) \ge H^{(+)}(v(x,t,\varepsilon),x,\varepsilon), \quad (x,t) \in D \times (\varepsilon^4, +\infty),$$

$$v_x(a,t,\varepsilon) = v_x(b,t,\varepsilon) = 0, \quad t \in (\varepsilon^4, +\infty), \quad v(x,t,\varepsilon) \le V_0^{(+)}(x,\varepsilon), \quad t = \varepsilon^4, \quad x \in \bar{D},$$

то функция $v(x,t,\varepsilon)$ является нижним решением задачи для $v^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ по терминологии, принятой в [4]. Отсюда, согласно результатам работы [4], следует, что выполнено левое неравенство (51). Аналогично доказывается правое неравенство в (51).

Теперь из доказанных выше неравенств следуют требуемые в теореме 4 неравенства. Теорема 4 доказана.

§ 5. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем основной результат данной работы, вытекающий из теорем 3, 4.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия A1–A7. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) при достаточно малых ε существует единственное регулярное решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(4) и $|u(x,t,\varepsilon)-\psi(v(x,t,\varepsilon),x)| = O(\varepsilon)$, $(x,t)\in\bar{D}\times[\varepsilon^4,+\infty)$;

2) для любых $\mu\in[0,1)$ (фиксированного при $\varepsilon\to 0$) и $t\in[0,+\infty)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v(x,t+\varepsilon^\mu,\varepsilon) = \begin{cases}\varphi_1(x), & x\in[a,x^*),\\ \varphi_2(x), & x\in(x^*,b],\end{cases} \tag{52}$$

причем для любого $\Delta>0$, такого, что $[x^*-\Delta, x^*+\Delta]\subset(a,b)$, предельный переход в (52) равномерен по x и t в области $(x,t)\in[a,x^*-\Delta]\times[0,+\infty)\cup[x^*+\Delta,b]\times[0,+\infty)$.

В заключение заметим, что вопрос о предельном переходе нестационарной КСТС u,v к соответствующей стационарной КСТС u_s, v_s (см. § 1) при $t\to\infty$ остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00487).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф., Недељко И.В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 877–899.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
3. *Бутузов В.Ф., Недељко И.В.* // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 5. С. 13–52.
4. *Атапп Н.* // Nonlinear Analysis: Collection of Papers in Honor of Erich Rothe. New York, 1978. P. 1–29.
5. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.
6. *Атапп Н.* // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 65. P. 432–467.
7. *Атапп Н.* // Proc. Roy. Soc. of Edinburgh. 1978. V. 81. P. 35–47.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
14.01.2003 г.