

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ф. Воропаева, Г. Г. Черных, Внутренние волны, генерируемые безымпульсным турбулентным следом в линейно стратифицированной жидкости, *Матем. моделирование*, 1998, том 10, номер 6, 75–89

<https://www.mathnet.ru/mm1293>

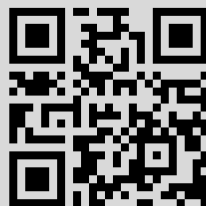
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

28 апреля 2025 г., 21:45:12



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 532.59

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ БЕЗЫМПУЛЬСНЫМ ТУРБУЛЕНТНЫМ СЛЕДОМ В ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© О.Ф. Воропаева, Г.Г. Черных

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00736) и СО РАН (Интеграционный проект № 43 "Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости")

Построена численная модель динамики безымпурсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие распространение генерируемых следом внутренних волн.

INTERNAL WAVES
GENERATED BY MOMENTUMLESS TURBULENT WAKE
IN LINEARLY STRATIFIED FLUID

O.F. Voropaeva, G.G. Chernykh

Institute of Computational Technologies
Siberian Division of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Numerical model of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified fluid has been constructed. Some computational results are presented which illustrate the transformation of wake generated internal waves.

1. Введение. Течение, возникающее в турбулентном следе за телом, движущимся в стратифицированной жидкости, весьма своеобразно. При сравнительно слабой стратификации турбулентный след вначале развивается практически так же, как и в однородной жидкости, и расширяется симметрично. Однако вертикальной турбулентной диффузии препятствуют архимедовы силы, поэтому на больших расстояниях от тела след приобретает сплюснутую форму и, наконец, совсем перестает расти в вертикальном направлении. Из-за турбулентного перемешивания плотность жидкости в пределах следа распределена более равномерно, чем вне его. Архимедовы силы стремятся восстановить прежнее невозмущенное состояние устойчивой стратификации. В результате в плоскости, перпендикулярной оси следа, возникают конвективные течения, приводящие к активному образованию внутренних волн в окружающей жидкости.

Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за самодвижущимися телами в линейно стратифицированной среде, рассматривались в [1-4] (в них

можно найти более полную библиографию). Факт генерации следами внутренних волн в стратифицированной жидкости отмечался в [1]. Экспериментальный анализ волновой картины осуществлен в [2–4]; там же представлены асимптотические оценки внутренних волн. Обзор ряда экспериментальных работ и модельных асимптотических оценок содержится в [5].

В [6–14] внутренние волны изучались с применением схематизированной плоской модели, в которой след заменялся локализованной областью возмущений гидродинамических полей. Турбулентность при этом не учитывалась.

Изучению динамики внутренних волн, генерируемых плоскими локализованными областями турбулизованной жидкости в линейно стратифицированной среде, посвящены работы [2,15–18], причем в [15–18] выполнено численное моделирование. В [16] показано, что при достаточно больших временах вырождения процесс расщепляется на волновой и диффузионный. При значениях времени, больших одного периода Вьяйсяля-Брента, динамика внутренних волн практически не зависит от процесса вырождения турбулентности. С использованием результатов расчетов задачи в полной постановке И.В. Стуровой [17] построена простая аналитическая модель волновой картины для больших значений времени вырождения.

Анализируя цитированную литературу, можно отметить следующее. Динамика внутренних волн, генерируемых локальным возмущением поля плотности в линейно стратифицированной среде, детально изучена численными и аналитическими методами. Имеются подробные численные расчеты внутренних волн, генерируемых при эволюции зоны турбулентного смешения. Вместе с тем отсутствуют результаты систематического численного моделирования внутренних волн, генерируемых турбулентным следом за самодвижущимся телом (лишь некоторые аспекты динамики волн представлены в [19]). В настоящей работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

2. Постановка задачи. Основные уравнения. Система уравнений, описывающая течение в дальнем турбулентном следе за осесимметричным телом вращения в стратифицированной среде, включает в себя осредненные уравнения движения, неразрывности и несжимаемости :

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} + V \frac{\partial U_d}{\partial y} + W \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle, \quad (1)$$

$$U_\infty \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U_\infty \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'w' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle - g \frac{\langle \rho_1 \rangle}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} U_\infty \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} + W \frac{d\rho_s}{dz} = \\ = -\frac{\partial}{\partial y} \langle v'\rho' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'\rho' \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Система координат связана с движущимся телом так, что скорость его движения равна $-U_\infty$; ось z направлена вертикально вверх, против силы тяжести. В уравнениях (1)–(5) приняты следующие обозначения: U, V, W – компоненты скорости осредненного движения в направлении осей x, y, z ; $U_d = U_\infty - U$ – дефект осредненной продольной компоненты скорости; p_1 – отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией $\rho_s(z)$; g – ускорение силы тяжести; $\langle \rho_1 \rangle$ – осредненный дефект плотности, $\rho_1 = \rho - \rho_s$, где $\rho_s = \rho_s(z)$ – плотность невозмущенной жидкости, $\rho_0 = \rho_s(0)$; штрихом обозначены пульсационные составляющие; $\langle \rangle$ – знак осреднения. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры; стратификация предполагается устойчивой ($d\rho_s/dz \leq 0$) и слабой, используется приближение Обербека-Буссинеска. В уравнениях (1)–(5) отброшены в предположении малости члены с молекулярной вязкостью (диффузией) и слагаемое $-(1/\rho_0)\partial \langle p_1 \rangle / \partial x$ в (1).

Так же как и в [20], слагаемое $\partial U / \partial x$ в уравнении (5) отброшено как малое. Это предположение основывается на том, что в случае однородной жидкости, когда $g = 0$ и $V = W = 0$, система уравнений (1)–(5) эквивалентна классической системе уравнений дальнего турбулентного следа. В стратифицированной среде динамика следа характеризуется наличием генерируемого им конвективного течения. Вырождение компонент скорости V, W происходит значительно медленнее, чем вырождение U_d , что подтверждается численными экспериментами [19]. Кроме того, расчеты с использованием трехмерного условия несжимаемости и его двумерного аналога (5) дают близкие результаты [21]. Применение (5) значительно упрощает численный алгоритм.

Модель турбулентности. Система уравнений (1)–(5) незамкнута; для ее замыкания привлекается модифицированная $e \sim \varepsilon$ -модель турбулентности. В этой модели неизвестные величины рейнольдсовых напряжений $\langle u_i^2 \rangle$ ($i = j = 1, 2, 3$), $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'w' \rangle$ и потоков $\langle u_i \rho' \rangle$ ($i = 1, 2, 3$) определяются из алгебраических аппроксимаций [22] (здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование):

$$\frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - C_2}{C_1} \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right) + \frac{1 - C_3}{C_1} \left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right), \quad (6)$$

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad G_{ij} = \frac{1}{\rho_0} (\langle u_i' \rho' \rangle g_j + \langle u_j' \rho' \rangle g_i),$$

$$\vec{g} = (0, 0, -g), \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad U_3 = W, \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii},$$

$$- \langle u' \rho' \rangle = \frac{e}{C_{1T} \varepsilon} \left\{ \langle u' w' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - C_{2T}) \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right\},$$

$$- \langle v' \rho' \rangle = \frac{\langle v'^2 \rangle e}{C_{1T} \varepsilon} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \quad (7)$$

$$- \langle w' \rho' \rangle = \frac{e}{C_{1T} \varepsilon} \left\{ \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \frac{1 - C_{2T}}{\rho_0} g \langle \rho'^2 \rangle \right\}. \quad (8)$$

Величина дисперсии турбулентных флуктуаций плотности $\langle \rho'^2 \rangle$ аппроксимируется известным локально-равновесным алгебраическим соотношением [20,22]:

$$\langle \rho'^2 \rangle = - \frac{2}{C_T} \frac{e}{\varepsilon} \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}. \quad (9)$$

Наконец, для определения энергии турбулентности e , скорости диссипации ε и касательного реинольдсова напряжения $\langle v'w' \rangle$ воспользуемся соответствующими дифференциальными уравнениями переноса:

$$U_\infty \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} + W \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{\varepsilon z} \frac{\partial e}{\partial z} + P + G - \varepsilon, \quad (10)$$

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{\varepsilon z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (11)$$

$$U_\infty \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{\varepsilon z} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} + (1 - C_2) P_{23} + (1 - C_3) G_{23} - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle v'w' \rangle, \quad (12)$$

$$P_{23} = - \left\{ \langle v'^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial y} + \langle w'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial z} \right\}.$$

Действуя по аналогии с [20], определим коэффициенты турбулентной вязкости из соотношений (6):

$$K_{\varepsilon y} = \frac{1 - C_2}{C_1} \frac{e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon}, \quad K_{\varepsilon y} = K_{\varepsilon y} / \sigma,$$

$$K_{\varepsilon z} = \frac{(1 - C_2) e \langle w'^2 \rangle - \frac{(1 - C_3)(1 - C_{2T})}{C_{1T}} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon} \langle w' \rho' \rangle}{C_1 \varepsilon \left(1 - \frac{(1 - C_3) g e^2}{C_1 C_{1T} \rho_0 \varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)}, \quad K_{\varepsilon z} = K_{\varepsilon z} / \sigma,$$

так что

$$- \langle u'v' \rangle = K_{\varepsilon y} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad - \langle u'w' \rangle = K_{\varepsilon z} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Для нахождения компонент вектора потоков $\langle v' \rho' \rangle$, $\langle w' \rho' \rangle$ воспользуемся следствием соотношений локально-равновесного приближения (7)–(9):

$$- \langle v' \rho' \rangle = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \quad - \langle w' \rho' \rangle = K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z},$$

$$K_{\rho y} = \frac{\langle v'^2 \rangle e}{C_{1T} \varepsilon}, \quad K_{\rho z} = \frac{e \langle w'^2 \rangle}{C_{1T} \varepsilon \left(1 - 2 \frac{g}{\rho_0} \frac{1 - C_{2T}}{C_{1T} C_T} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)}.$$

В соотношениях и уравнениях (6)–(15) величины $C_1 = 2.2$, $C_2 = 0.55$, $C_3 = 0.55$, $C_{1T} = 3.2$, $C_{2T} = 0.5$, $C_T = 1.25$, $C_{\varepsilon 1} = 1.45$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$, $C_s = 0.25$, $\sigma = 1.3$ – эмпирические постоянные [22,23].

Выбор именно этой модели турбулентности обусловлен ее близостью к стандартной $e \sim \varepsilon$ -модели турбулентности и возможностью учесть анизотропию характеристик турбулентности в следе в стратифицированной жидкости.

Граничные и начальные условия. Маршевая переменная x в уравнениях (1)–(5), (10)–(12) играет роль времени. На расстоянии x_0 от тела задаются следующие начальные условия:

$$e(x_0, y, z) = \Phi_1(r), \quad \varepsilon(x_0, y, z) = \Phi_2(r), \quad U_d(x_0, y, z) = \Phi_3(r),$$

$$r^2 = y^2 + z^2, \quad 0 \leq r \leq \infty;$$

$$\langle \rho_1 \rangle = V = W = \langle v'w' \rangle = 0, \quad -\infty < z < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad x = x_0.$$

Здесь $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$, $\Phi_3(r)$ – колоколообразные функции, согласующиеся с экспериментальными данными об эволюции безымпульсного турбулентного следа в однородной жидкости. Поскольку рассматривается безымпульсный турбулентный след, функция Φ_3 удовлетворяет условию

$$\iint_{-\infty}^{\infty} U_d(x, y, z) dy dz = \iint_{-\infty}^{\infty} U_d(x_0, y, z) dy dz = 0.$$

При $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ставились условия невозмущенного потока:

$$V = W = \langle \rho_1 \rangle = e = \varepsilon = \langle v'w' \rangle = 0, \quad x \geq x_0.$$

При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие $r \rightarrow \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника.

В данной работе рассматривается случай линейного распределения плотности $\rho_s(z) = \rho_0(1 - az)$, так что из соображений симметрии решение отыскивается лишь в первом квадранте плоскости (y, z) . Граничные условия на осях симметрии принимаются следующими:

$$\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} = V = \langle v'w' \rangle = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U_d}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad z \geq 0;$$

$$\langle \rho_1 \rangle = W = \langle v'w' \rangle = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad y \geq 0.$$

Обезразмеривание. В качестве масштабов длины и скорости используются диаметр тела D и скорость набегающего потока U_∞ . Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$x^* = x/D, \quad y^* = y/D, \quad z^* = z/D,$$

$$U_i^* = U_i/U_\infty, \quad \langle u'_i u'_j \rangle^* = \langle u'_i u'_j \rangle / U_\infty^2, \quad e^* = e/U_\infty^2,$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon D/U_\infty^3, \quad \langle \rho \rangle^* = \langle \rho \rangle / aD\rho_0; \quad a = -(1/\rho_0) d\rho_s/dz, \quad z = 0.$$

При этом в обезразмеренных уравнениях вместо g появляется величина $4\pi^2/F_d^2$, где F_d – плотностное число Фруда, определяемое равенством

$$F_d = \frac{U_\infty T}{D}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}}.$$

Для удобства интерпретации результатов расчетов ниже используется время t , связанное с расстоянием от тела соотношением: $t = x/U_\infty$, $t^* = t/T = xD/(U_\infty DT) = x^*/F_d$, T – период Вейсяля-Брента.

3. Численный алгоритм. Система уравнений (2), (3), (5) записывается в переменных функция тока ψ и завихренность ω ($\omega = \partial V/\partial z - \partial W/\partial y$, $V = \partial\psi/\partial z$, $W = -\partial\psi/\partial y$):

$$U_\infty \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} + W \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle v'w' \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle v'w' \rangle - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \omega. \quad (14)$$

Вводятся также новые независимые переменные:

$$x' = x, \quad \xi = \chi_1(y), \quad \eta = \chi_2(z) \quad (15)$$

$$(x = x', \quad y = \varphi_1(\xi), \quad z = \varphi_2(\eta)).$$

Якобиан преобразования J определяется следующим образом:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', \xi, \eta)} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} = y_\xi z_\eta.$$

Данное простое преобразование координат позволяет перейти от неравномерной сетки, гущающейся в окрестности турбулентного следа, к равномерной на плоскости (ξ, η) . Шаг сетки в направлении оси x выбирался переменным.

Уравнения математической модели переписываются в новой системе координат. В качестве примера приведем уравнение (10) в переменных (ξ, η) :

$$U_\infty (Je)_x + (\psi_\eta e)_\xi - (\psi_\xi e)_\eta = \left(\frac{z_\eta}{y_\xi} K_{ey} e_\xi \right)_\xi + \left(\frac{y_\xi}{z_\eta} K_{ez} e_\eta \right)_\eta + JP + JG - J\varepsilon. \quad (16)$$

В этом разделе индексами x, ξ, η обозначены частные производные по указанным переменным.

Для удобства изложения введем, как и в [25], операции численного дифференцирования по переменной ξ :

$$f_\xi = f_{\xi,ij} = (f_{i+1j} - f_{ij})/\Delta\xi, \quad f_{\bar{\xi}} = f_{\bar{\xi},ij} = (f_{ij} - f_{i-1j})/\Delta\xi,$$

$$f_{\hat{\xi}} = f_{\hat{\xi},ij} = (f_{i+1j} - f_{i-1j})/(2\Delta\xi), \quad f_{\hat{\xi}\hat{\xi}} = f_{\hat{\xi}\hat{\xi},ij} = (f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j})/\Delta\xi^2.$$

Операции дифференцирования по переменной η определяются аналогично.

Конечно-разностный алгоритм основан на применении методов расщепления по пространственным переменным [24,25]. Алгоритм сводится к последовательному выполнению на каждом временном слое следующих этапов:

- 1) отыскание завихренности из уравнения (13);
- 2) определение значений функции тока из уравнения (14) с использованием классической итерационной схемы, стабилизирующей поправки [24,25];
- 3) решение уравнения (1) для дефекта продольной компоненты скорости U_d и уравнения неразрывности (4);
- 4) интегрирование уравнений переноса касательного напряжения $\langle v'w' \rangle$, энергии турбулентности e , скорости диссипации ε ;
- 5) расчет $\langle u_i'^2 \rangle$, $\langle u_i' \rho' \rangle$, $\langle \rho'^2 \rangle$ из алгебраических соотношений (6)-(9).

Вычисленные на очередном этапе алгоритма переменные участвуют в определении неизвестных на последующих этапах. Реализованная таким образом идея "блочного" аналога метода Зейделя существенно упрощает процедуру расчетов.

Для решения уравнения переноса завихренности применяется схема предиктор-корректор с предиктором в виде схемы расщепления, в которой конвективные слагаемые аппроксимируются направленными разностями:

$$U_{\infty} \frac{\omega_{ij}^{n+1/4} - \omega_{ij}^n}{\Delta x^{n+1/2}} + 0.5 \left[(d_{ij}^n - |d_{ij}^n|) \omega_{\xi,ij}^{n+1/4} + (d_{ij}^n + |d_{ij}^n|) \omega_{\xi,ij}^{n+1/4} \right] = b_{ij}^n,$$

$$U_{\infty} \frac{\omega_{ij}^{n+1/2} - \omega_{ij}^{n+1/4}}{\Delta x^{n+1/2}} + 0.5 \left[(f_{ij}^n - |f_{ij}^n|) \omega_{\eta,ij}^{n+1/2} + (f_{ij}^n + |f_{ij}^n|) \omega_{\eta,ij}^{n+1/2} \right] = 0,$$

$$U_{\infty} J_{ij} \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n}{\Delta x^{n+1}} + [\psi_{\eta} \omega]_{\xi,ij}^{n+1/2} - [\psi_{\xi} \omega]_{\eta,ij}^{n+1/2} = q_{ij}^n.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$d_{ij}^n = \psi_{\eta,ij}^n / J_{ij}, \quad J_{ij} = y_{\xi,i} z_{\eta,j},$$

$$b_{ij}^n = \frac{1}{y_{\xi,i}} \frac{g}{\rho_0} < \rho_1 >_{\xi,ij}^n + \frac{1}{2y_{\xi,i}} \left[\left(\frac{1}{y_{\xi,i}} < v'w' >_{\xi} \right)_{\xi,ij}^n + \left(\frac{1}{y_{\xi,i}} < v'w' >_{\xi} \right)_{\xi,ij}^n \right] + \\ + \frac{1}{2z_{\eta,j}} \left[\left(\frac{1}{z_{\eta,j}} < v'w' >_{\eta} \right)_{\eta,ij}^n + \left(\frac{1}{z_{\eta,j}} < v'w' >_{\eta} \right)_{\eta,ij}^n \right] - \\ - \frac{1}{2J_{ij}} \left[\left(< v'^2 > - < w'^2 > \right)_{\eta\xi,ij}^n + \left(< v'^2 > - < w'^2 > \right)_{\eta\xi,ij}^n \right], \quad q_{ij}^n = J_{ij} b_{ij}^n.$$

Индексы n , $n + 1/2$, $n + 1$ относятся к временным слоям t^n , $t^{n+1/2}$, t^{n+1} ; индекс $n + 1/4$ соответствует дробному шагу.

Интегрирование других дифференциальных уравнений математической модели проводится по схеме расщепления с центрально-разностными аппроксимациями конвективных членов. В качестве примера приведем схему расщепления для уравнения (16):

$$U_{\infty} J_{ij} \frac{e_{ij}^{n+1/2} - e_{ij}^n}{\Delta x^{n+1}} + (\psi_{\eta}^{n+1} e^{n+1/2})_{\xi,ij} = \\ = 0.5 \left[\left(\frac{z_{\eta,j}}{y_{\xi,i}} K_{ey}^n e_{\xi}^{n+1/2} \right)_{\xi,ij} + \left(\frac{z_{\eta,j}}{y_{\xi,i}} K_{ey}^n e_{\xi}^{n+1/2} \right)_{\xi,ij} \right] + J_{ij} (P + G)_{ij}^n,$$

$$U_{\infty} J_{ij} \frac{e_{ij}^{n+1} - e_{ij}^{n+1/2}}{\Delta x^{n+1}} - (\psi_{\xi}^{n+1} e^{n+1})_{\eta,ij} = \\ = 0.5 \left[\left(\frac{y_{\xi,i}}{z_{\eta,j}} K_{ez}^n e_{\eta}^{n+1} \right)_{\eta,ij} + \left(\frac{y_{\xi,i}}{z_{\eta,j}} K_{ez}^n e_{\eta}^{n+1} \right)_{\eta,ij} \right] - J_{ij} \varepsilon_{ij}^n,$$

$$P_{ij}^n = < u'v' >_{ij}^n \frac{(U_d)_{\xi,ij}^{n+1}}{y_{\xi,i}} + < u'w' >_{ij}^n \frac{(U_d)_{\eta,ij}^{n+1}}{z_{\eta,j}}, \quad G_{ij}^n = -\frac{g}{\rho_0} < w'\rho' >_{ij}^n.$$

Конечно-разностные уравнения решаются поочередно с применением скалярных прогонок.

4. Тестирование численной модели. Для проверки работоспособности математической модели проведены численные эксперименты, в которых результаты расчетов, выполненных для ряда значений плотностного числа Фруда на последовательности сеток, сопоставлялись с опубликованными в [20,26] экспериментальными данными Линя и Пао о выражении безымпulsiveного турбулентного следа в линейно-стратифицированной среде.

Начальные условия при $x = x_0 = 6D$ задавались в виде функций [20], согласованных с данными экспериментов Линя, Пао в случае однородной жидкости ($g = 0$):

$$\begin{aligned} e(x_0, y, z) &= E_0 \exp(-4r^2/D^2), \quad E_0 = e(x_0, 0, 0), \\ \varepsilon(x_0, y, z) &= \sqrt{12}E_0^{3/2} \exp(-6r^2/D^2), \\ U_d(x_0, y, z) &= U_0(1 - 8r^2/D^2) \exp(-8r^2/D^2), \quad U_0 = U_d(x_0, 0, 0). \end{aligned} \quad (17)$$

Как и в [20], число Фруда полагалось равным $F_d=31$. Конечно-разностные сетки содержали 81×81 (сетка 1), а также 161×161 (сетка 2) ячеек; расчетная область представляла собой прямоугольник размером $10D \times 8D$. Узлы сетки 1 распределялись следующим образом:

$$\begin{aligned} y_i &= i\Delta y, \quad i = 0, \dots, 30; \quad y_i = y_{i-1}q_y, \quad i = 31, \dots, 80, \quad q_y = 1.024; \\ z_j &= j\Delta z, \quad j = 0, \dots, 30; \\ z_j &= z_{j-1}q_z, \quad j = 31, \dots, 80, \quad q_z = 1.02 \quad (\Delta y = \Delta z = 0.1D). \end{aligned}$$

Шаги Δx^n изменялись от $0.005D$ до $0.5D$ по формуле арифметической прогрессии с разностью $0.005D$. Сетка 2 выстраивалась по аналогии с сеткой 1: в квадрате $3D \times 3D$ она была равномерной с шагами $\Delta y = \Delta z = 0.05D$, остальные узлы располагались по закону геометрической прогрессии. Шаги Δx^n вдвое мельче, чем у сетки 1.

На рис.1 показано изменение в зависимости от расстояния от тела осевого значения энергии турбулентности $e_0(x) = e(x, 0, 0)$, а на рис.2 – дефекта продольной компоненты скорости $U_{d0}(x) = U_d(x, 0, 0)$ на оси следа. Численные расчеты выполнялись на сетках 1 и 2. Видно, что данные, полученные на двух сетках, близки (их отличие составляет не более 2%) и достаточно хорошо согласуются с экспериментами Линя и Пао. Проводились также вычисления на сетке, аналогичной сетке 1, с числом ячеек 81×81 и в полтора раза большими размерами расчетной области ($15D \times 12D$, сетка 3). Эти данные отличаются от полученных на сетке 1 на 1–3%. В частности, обезразмеренные максимальные значения модуля функции тока равны $1.698 \cdot 10^{-3}$ и $1.656 \cdot 10^{-3}$ ($t/T = 0.5$), $5.1929 \cdot 10^{-4}$ и $5.1933 \cdot 10^{-4}$ ($t/T = 2$) на сетках 1 и 3 соответственно.

Рис.3 иллюстрирует поведение вертикального размера следа $H = 2L_z(t) \times \times D(c_D F_d)^{-1/4}$ ($c_D = 0.22$), где L_z определяется из соотношения: $e(t, 0, L_z) = 0.01e(t, 0, 0)$. Для сопоставления с результатами экспериментов [26] в качестве начальных данных бралось автомодельное решение задачи в случае однородной жидкости, согласованное с экспериментами. Расчеты проводились для двух значений плотностного числа Фруда – $F_d = 103$ и $F_d = 314$. Как видно, численные эксперименты демонстрируют хорошую работоспособность представленной численной модели.

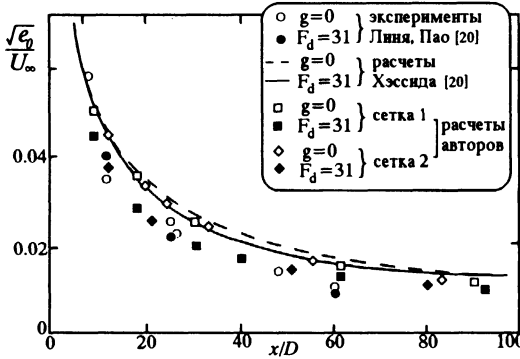


Рис. 1.

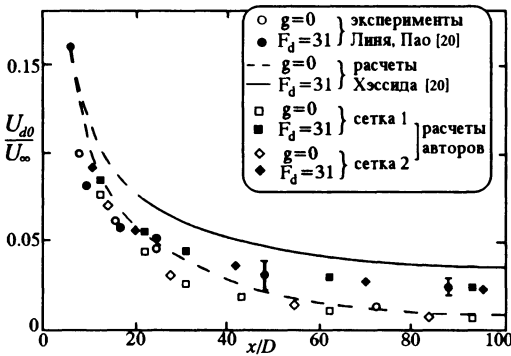


Рис. 2.

5. Основные результаты. С целью изучения характеристик внутренних волн, генерируемых турбулентным следом в линейно стратифицированной среде, выполнялись расчеты для плотностного числа Фруда $F_d = 280$. Это соответствует условиям одного из экспериментов Линя и Пао [20]. Поскольку в случае линейной стратификации среды при достаточно больших значениях числа Фруда имеет место подобие (по плотностному числу Фруда) основных характеристик течения в следе [16], то представленные в этом разделе результаты анализа внутренних волн могут быть перенесены на случай любого достаточно большого числа Фруда.

Начальные данные по-прежнему задавались при $x = x_0 = 6D$ в виде функций (17). Размеры расчетной области составляли $40D \times 25D$. Основные вычисления были проведены на сетке 101×81 (сетка 4), узлы которой в плоскости (y, z) распределялись следующим образом:

$$y_i = i\Delta y, \quad i = 0, \dots, 40; \quad y_i = y_{i-1}q_y, \quad i = 41, \dots, 100, \quad q_y = 1.04;$$

$$z_j = j\Delta z, \quad j = 0, \dots, 30;$$

$$z_j = z_{j-1}q_z, \quad j = 31, \dots, 80, \quad q_z = 1.043 \quad (\Delta y = \Delta z = 0.1D).$$

Величина Δx^n изменялась от $0.1D$ до $2D$ по формуле арифметической прогрессии с разностью $0.05D$.

На рис.4 представлены изолинии энергии турбулентности $e/e_0(t) = \text{const}$, которые изображают сечение турбулентного следа (в первом квадранте плоскости

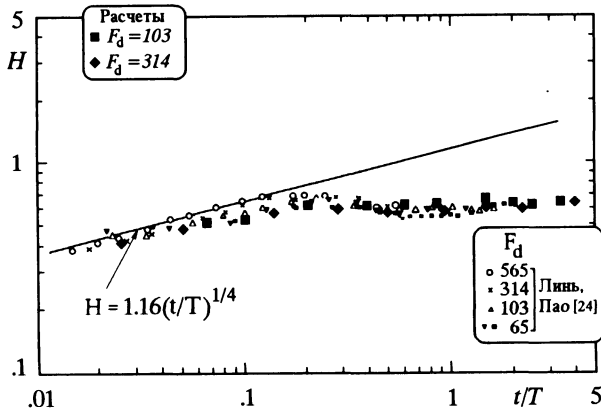


Рис. 3.

(y, z) при $t/T = 2$; уровни 1-10 соответствуют значениям 0.025, 0.1 и далее до 0.9 с шагом 0.1.

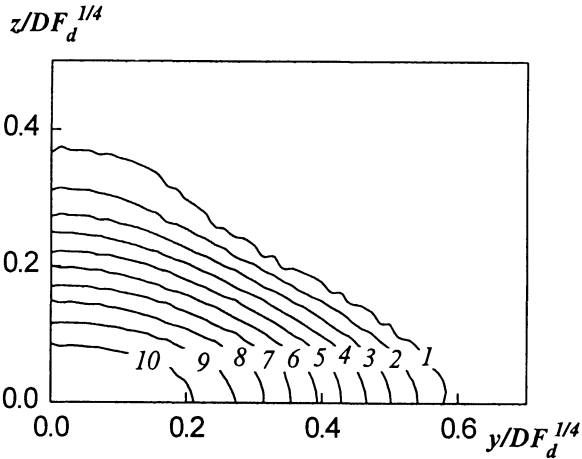


Рис. 4.

На рис.5 динамика турбулентного следа характеризуется изменением во времени величин суммарных энергий турбулентности $\tilde{E}_t(t) = F_d E_t^*(t)$ и внутренних волн $\tilde{P}_t(t) = F_d P_t^*(t)$, где

$$E_t^*(t) = \iint_0^\infty e^* dy^* dz^*, \quad P_t^*(t) = \iint_0^\infty \left(\frac{V^{*2} + W^{*2}}{2} + \frac{4\pi^2}{F_d^2} \langle \rho_1 \rangle^* z^* \right) dy^* dz^*.$$

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что лишь небольшая часть энергии турбулентности переходит в энергию внутренних волн. Роль начального распределения $\langle \rho_1 \rangle$ для достаточно больших чисел Фруда незначительна (как и в модельной задаче о динамике локализованной области турбулизованной жидкости [15]).

Внутренние волны, генерируемые безимпульсным турбулентным следом в линейно стратифицированной среде, иллюстрируют рис.6-8 ($t/T = 2$). На рис.6

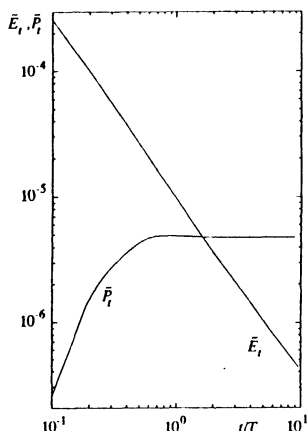


Рис. 5.

приведены линии тока $F_d^{0.5} \psi / U_\infty D = \text{const}$; уровни изменяются от -0.004 до 0.004 с интервалом 0.001 . Здесь, а также на рис. 8, 9 затененными изображены области отрицательных значений рассматриваемых функций. Дефект плотности $R_d = \langle \rho_1 \rangle (t_*, y, z_*) / \alpha D \rho_0 F_d^{0.25} (t_* = 2T)$ в сечениях плоскостью $z = z_*$: $z_*/DF_d^{0.25} = 0.025; 0.12; 0.25; 0.5$ представлен на рис.7а-г соответственно; непомеченные линии отвечают расчетной области с размерами $40D \times 25D$, линии с маркерами – $20D \times 15D$. Как видно, сопоставляемые данные достаточно близки, что свидетельствует о слабой зависимости $\langle \rho_1 \rangle$ от сеток и размеров расчетной области, выбранных в ходе численных экспериментов. Изолинии $\partial \langle \rho_1 \rangle / \partial y = \text{const}$ показаны на рис.8; значения урвней изменяются от -0.12 до 0.08 с интервалом 0.02 . Границы между светлыми и затененными областями – линии постоянной фазы – отвечают гребням ($n = 1; 3$) и впадинам ($n = 2; 4$) внутренних волн (число гребней и впадин растет с ростом времени).

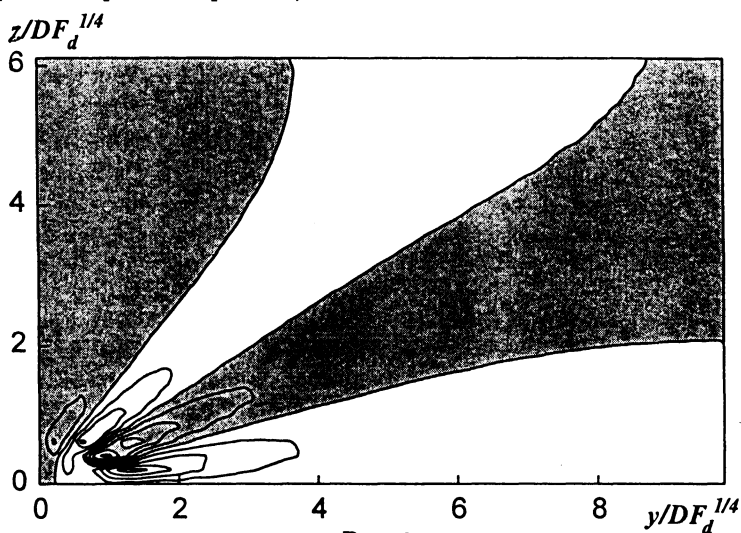


Рис. 6.

Фазовая картина внутренних волн при $t/T = 0.81$, представляющая собой изолинии $\partial \langle \rho_1 \rangle / \partial y = 0$, изображена на рис.9а. Соответствующая теневая кар-

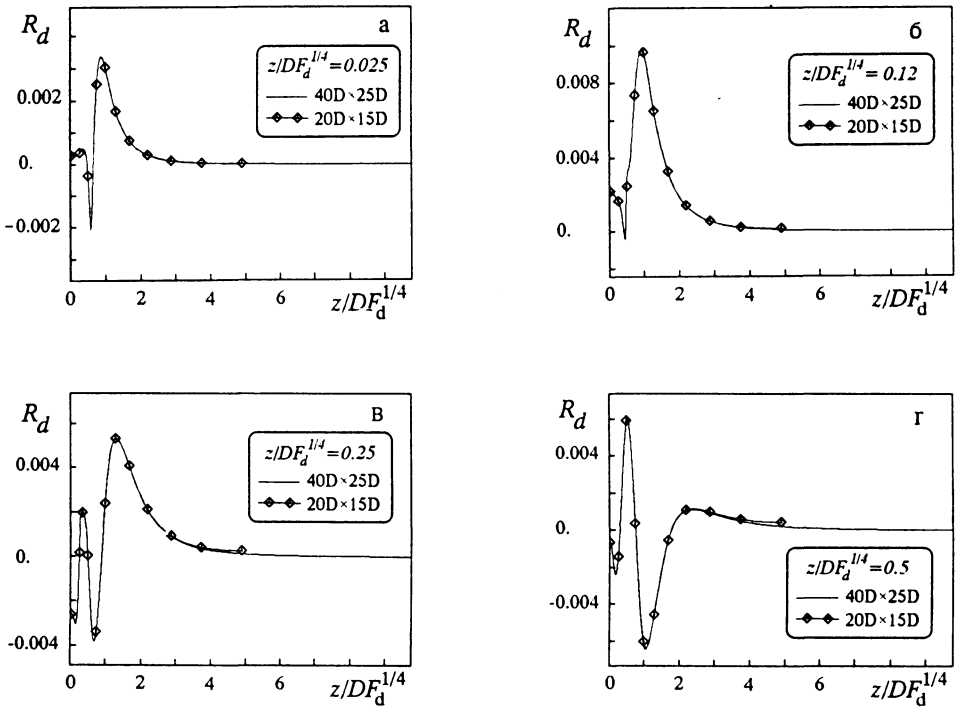


Рис. 7.

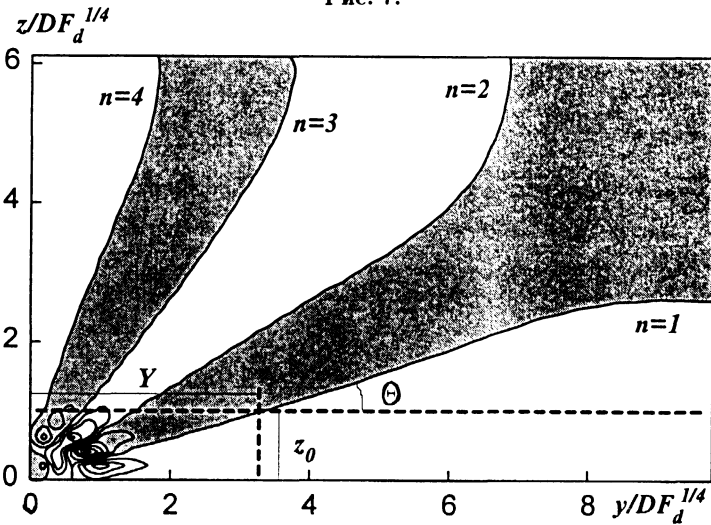


Рис. 8.

тинка, полученная в лабораторном эксперименте [4], приведена на рис.9б. В центре рис.9а,б – турбулентный след. Сравнение этих рисунков указывает на хорошее качественное согласование расчетных и экспериментальных данных.

На рис.10а,б содержатся результаты более детального анализа внутренних

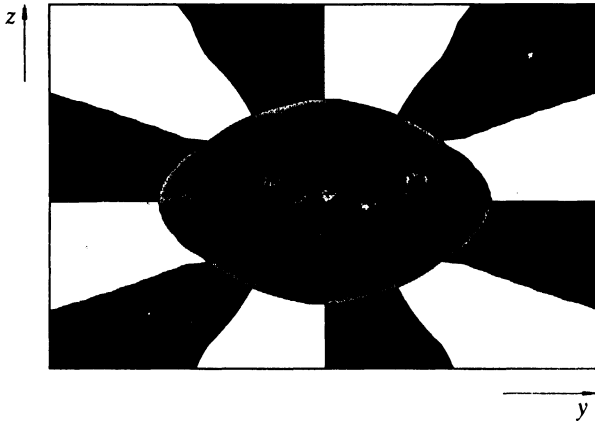


Рис. 9а.

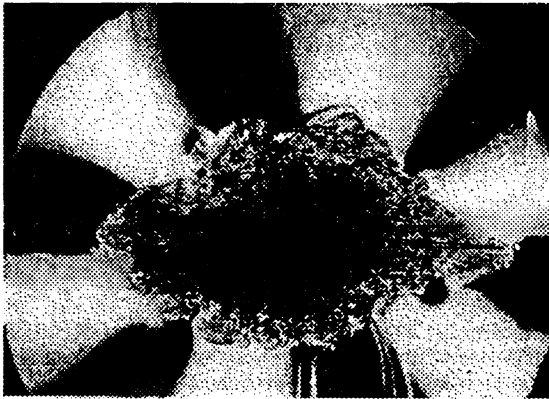


Рис.9б.

волн. Зависимость угла наклона Θ линий постоянной фазы $\partial < \rho_1 > / \partial y = 0$ от безразмерной координаты $Y(t)/z_0$ демонстрирует рис. 10а (для примера на рис.8 показана величина Y при $n = 1$). Изменение во времени значения Y для различных гребней и впадин внутренних волн приведено на рис.10б. Здесь $z_*/DF_d^{0,25} = z_0 = 1$ – характерное сечение, выше которого на рассмотренном интервале значений x/D линии постоянной фазы (в достаточно большой области первого квадранта плоскости (y, z)) представляют собой прямые линии, и угол наклона может быть определен с необходимой точностью; знаками +, o, x помечены гребни, а знаками o, •, ◁ – впадины. Сплошные линии на этих рисунках отвечают соотношениям

$$Y/z_0 = \text{ctg}\Theta, \quad Y/z_0 = \sqrt{\left(\frac{t}{\pi T_*(n-0,5)}\right)^2 - 1}, \quad T_* = 1/\sqrt{ag}, \quad (18)$$

которые получены из решения линеаризованной задачи о динамике внутренних

волн, индуцируемых мгновенным точечным источником возмущений поля плотности, помещенным в начало координат [10]. Эти равенства справедливы для внутренних волн вида

$$\langle \rho_1 \rangle / (aD\rho_0) \sim \sin(zt/T_* \sqrt{y^2 + z^2}).$$

Из сопоставлений, выполненных на рис.10а,б, следует, что формулы (18) могут быть использованы для оценки ряда характеристик внутренних волн, генерируемых безыпульсным турбулентным следом в линейно стратифицированной среде.

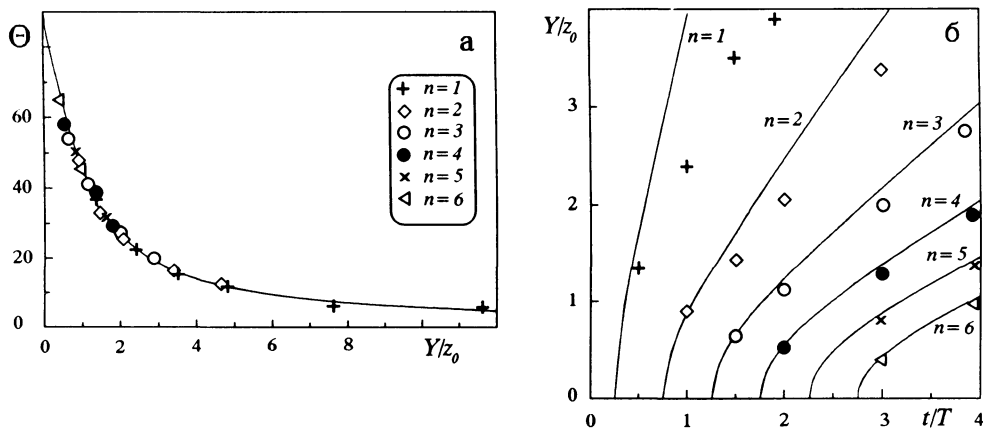


Рис. 10.

Итак, основные результаты работы сводятся к следующему. Построена численная модель динамики безыпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде. Представлены результаты расчетов характеристик внутренних волн, генерируемых турбулентным следом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schooley A.H., Stewart R.W. Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with vertical density gradient. // *J. Fluid Mech.*, 1964, v.15, pt.1, p.83-96.
2. Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости импульсным гидродинамически линейным источником (двумерная задача). // Теория дифракции и распространения волн: Краткие тексты докл. VII Всесоюз. симпозиума по дифракции и распространению волн. — Ростов - на - Дону, 1977, т.3, с.186-189.
3. Gilreath H.E., Brandt A. Experiments on the generation of internal waves in a stratified fluid. // *AIAA J.*, 1985, v.23, p.693-700.
4. Chashechkin Yu.D. Internal waves, vortices and turbulence in a wake past a bluff body in a continuously stratified liquid. // Preprints of the Fourth Int. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, France, June 29 - July 2, 1994. — Grenoble: Grenoble Inst. of Mech., 1994, v.2, sess. B4, № 29, 8p.
5. B. Voisin. Rayonnement des ondes internes de gravite. Application aux corps en mouvement. Universite Pierre et Marie Curie, 1991. Ph. Doctor Thesis, 281p.
6. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in a density stratified medium. // *J. Fluid Mech.*, 1969, v.35, pt.3, p.531-541.

7. *Wessel W.R.* Numerical study of the collapse of a perturbation in an infinite stratified fluid. // *Phys. Fluids*, 1969, v.12, № 12, pt. 2, p.170-176.
8. *Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.* О внутренних волнах, индуцируемых коллапсом зоны смешения в стратифицированной жидкости. // *Математические вопросы механики (Динамика сплошной среды)*. – Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1975, вып.22, с.116-132.
9. *Гущин В.А.* Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. // *ЖВМ и МФ*, 1981, т.21, № 4, с.1003-1017.
10. *Koh R.C.Y.* Transient motions induced by local disturbances in a linearly density - stratified fluid. // *J. Hydraulic Res.*, 1971, v.9, № 3, p.335-353.
11. *Hartman R.I., Lewis H.W.* Wake collapse in a stratified fluid: linear treatment. // *J. Fluid Mech.*, 1972, v.51, pt.3, p.613-618.
12. *Никушиов В.И., Стеценко А.Г.* Образование внутренних волн, порождаемых схлопыванием однородного "пятна" в стратифицированной жидкости. // *Гидромеханика*. – Киев: ИГ АН УССР, 1975, вып.32, с.14-20.
13. *Стурова И.В.* Внутренние волны, индуцируемые локальными возмущениями в линейно стратифицированной жидкости конечной глубины. // *ПМТФ*, 1978, № 3, с.62-69.
14. *Городцов В.А., Теодорович Э.В.* Линейное описание эволюции (коллапса) симметричных распределений возмущений однородно стратифицированной жидкости. // *Труды 1-ой Всесоюз. школы - семинара по методам гидрофизических исследований*. – Горький: ИПФ АН СССР, 1983, с.613-618.
15. *Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Yu.M., Chernykh G.G.* Development of the turbulized fluid region in stratified medium. // *Proceed. of Internat. Symp. on Stratified Flows, Novosibirsk*, 1972, paper № 4, 14p.
16. *Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.* Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде. // *Математические проблемы механики сплошных сред (Динамика сплошной среды)*. – Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1980, вып.47, с.70-89.
17. *Chernykh G.G., Lytkin Y.M., Sturova I.V.* Numerical simulation of internal waves induced by the collapse of turbulent mixed region in stratified medium. // *Proceed. of Int. Symp. on refined modelling of flows*. – Paris, 1982, p.671-679.
18. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990, 230с.
19. *Chernykh G.G., Moshkin N.P., Voropayeva O.F.* Numerical models of momentumless turbulent wakes in stratified media. // *Proceed. of the Seventh Internat. Conf. on the Meth. of Aerophys. Res.*, Novosibirsk, Aug. 22-26, 1994. Novosibirsk: Inst. Theoret. Appl. Mech., 1994, pt. 1, p.58-63.
20. *Hassid S.* Collapse of turbulent wakes in stable stratified media. // *J. Hydraulics*, 1980, v.14, № 1, p.25-32.
21. *Chernykh G.G., Demenkov A.G., Moshkin N.P., Voropayeva O.F.* Numerical Models of Turbulent Wakes in Homogeneous and Stratified Fluids. // *Proceed. of the Third ECCOMAS CFD Conf.*, 9-13 Sept. 1996, Paris, J. Wiley and Sons, p.161-166.
22. *Rodi W.* Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids. // *J. Geoph. Res.*, 1987, v.92, № C5, p.5305-5328.
23. *Rodi W.* Turbulent models and their application in hydraulics. – University of Karlsruhe, Karlsruhe, 1980. 104p.
24. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971, 552 с.
25. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1967, 195с.
26. *Lin J.T., Pao Y.H.* Wakes in stratified fluids. // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1979, v.11, p.317-336.

Поступила в редакцию 28.05.97.