



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Andreev, K. A. Kudashova, On Modeling the controlled mechanical systems with digital controllers,  
*Zhurnal SVMO*, 2016, Volume 18, Number 3, 107–116

<https://www.mathnet.ru/eng/svmo612>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

May 21, 2025, 17:59:43



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

УДК 51-7;681.51

## Моделирование управляемых механических систем с цифровым управлением

© А. С. Андреев<sup>1</sup>, Е. А. Кудашова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье исследуется проблема синтеза дискретного ступенчатого управления, решающего задачу о стабилизации программных движений голономных механических систем. Такие системы описываются уравнениями Лагранжа второго рода. Дискретные управляющие сигналы используются в системах управления непрерывными процессами, содержащих компьютеры. Разработка соответствующих моделей таких управляемых процессов приводит к необходимости изучения непрерывно-дискретных систем, в которых состояние описывается непрерывной функцией, а управление строится на основе дискретных функций. В статье предложен подход в построении управления, учитывающий нелинейность системы и нестационарность программного движения. С помощью построения вектор-функции Ляпунова и системы сравнения получены достаточные условия стабилизации заданного программного движения. Особенностью решения данной задачи является применение вектор-функции Ляпунова, с компонентами, зависящими явно от времени, нелинейными относительно обобщенных координат. Это позволило решить задачу стабилизации в общем виде с возможностью подбора наиболее подходящих параметров управления для каждой конкретной системы.

**Ключевые слова:** стабилизация, управление, дискретное управление, синтез управления механическими системами, вектор-функции Ляпунова, системы сравнения, нестационарные нелинейные динамические системы.

## 1. Введение

Проблема построения дискретных законов управления механическими системами, функционирующими в непрерывном времени, является актуальной в связи с широким использованием компьютерных технологий. В настоящее время сформировалось три основных направления в исследовании данной проблемы. Первое направление (см. напр. [1], [2], [3]) состоит в дискретной аппроксимации всей системы с последующим построением дискретного управления для данной приближенной модели. Данный подход не позволяет учесть поведение системы в промежутках между моментами дискретизации, что приводит к неточности в решении задачи управления. Второе направление [4] связано с построением непрерывных законов управления для непрерывных моделей систем с последующей их дискретизацией. Такой подход дает достаточно точное решение задачи лишь для малых значений периода дискретизации. Оба этих направления позволяют решить задачу стабилизации движения механической системы в практическом смысле, когда отклонения от программного движения с ростом времени становятся малыми, но не сходятся к нулю.

<sup>1</sup> Декан факультета математики, информационных и авиационных технологий, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; andreevas@sv.ulsu.ru

<sup>2</sup> Программист кафедры информационной безопасности и теории управления факультета математики, информационных и авиационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; katherine.kudashova@yandex.ru

Третье направление состоит в построении дискретных законов управления для непрерывных моделей систем без аппроксимации. Такой подход позволяет получить более точное решение задачи стабилизации по сравнению с предыдущими.

В настоящей работе на основе метода векторных функций Ляпунова построены непрерывный и дискретный законы управления для голономной механической системы с  $n$  степенями свободы. Задача стабилизации нестационарного программного движения системы решена в нелинейной постановке без перехода к упрощенной дискретной линейной модели.

## 2. Постановка задачи о стабилизации программного движения

Рассматривается управляемая механическая система, положение которой определяется  $n$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , а движение описывается уравнениями Лагранжа [5]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U, \quad (2.1)$$

где  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)' \in \mathbb{R}^n$  есть вектор координат,  $T = 1/2 \dot{q}' A(q) \dot{q}$  — кинетическая энергия системы,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой матрицей,  $Q = Q(t, q, \dot{q})$  — вектор обобщенных неуправляемых сил,  $U \in \mathbb{R}^n$  — вектор управления. Здесь и далее  $(\cdot)'$  — операция транспонирования,  $\|q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2}$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ , величины, входящие в (2.1), определяются и непрерывны, для простоты, по всем  $(t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Уравнения (2.1) можно представить в виде

$$A(q)\ddot{q} = \{\dot{q}' C(q) \dot{q}\} + Q + U, \quad (2.2)$$

где  $\{\dot{q}' C(q) \dot{q}\}$  — набор  $n$  квадратичных форм с совокупностью  $n$  симметричных матриц  $C = (C_{(1)}, C_{(2)}, \dots, C_{(n)})'$ ,

$$C_{(k)} = (c_{ij(k)}), \quad c_{ij(k)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right).$$

Пусть  $X = \{(q^{(0)}(t)) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n\}$  есть заданное множество программных движений, ограниченных областью

$$G_0 = \{(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{3n} : \|q\| \leq g_0 = \text{const} > 0, \quad \|\dot{q}\| \leq g_1 = \text{const} > 0, \\ \|\ddot{q}\| \leq g_2 = \text{const} > 0\}.$$

Пусть  $(q^{(0)}, \dot{q}^{(0)}) \in X$  есть движение, осуществляемое посредством программного управления  $U = U^{(0)}(t)$  так, что выполнено тождество

$$A^{(0)}(t)\ddot{q}^{(0)}(t) - (\{\dot{q}^{(0)}(t)\}' C^{(0)}(t) \dot{q}^{(0)}(t)\} + Q^{(0)}(t) + U^{(0)}(t) \equiv 0, \quad (2.3)$$

где  $A^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))$ ,  $C^{(0)}(t) = C(q^{(0)}(t))$ ,  $Q^{(0)}(t) = Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$ .

Введем: возмущение  $x = q - q^{(0)}(t)$ , управляющее воздействие  $U^{(1)} = U - U^{(0)}(t)$ . Согласно (2.2), уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = \{\dot{x}' C^{(1)}(t, x) \dot{x}\} + Q^{(1)}(t, x) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) + U^{(1)}, \quad (2.4)$$

где  $A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x)$ ,  $C^{(1)}(t, x) = C(q^{(0)}(t) + x)$ ,  $Q^{(1)}(t, x) = (A^{(0)}(t) - A^{(1)}(t, x))\ddot{q}^{(0)}(t) + \{(\dot{q}^{(0)}(t))'(C^{(1)}(t, x) - C^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t)\} + Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t)) - Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$ ,  $Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x}) - Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t)) + \{(\dot{q}^{(0)}(t))'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{q}^{(0)}(t)\}$ .

Заметив, что  $Q^{(1)}(t, 0) \equiv 0$ ,  $Q^{(2)}(t, x, 0) \equiv 0$ , допустим, что в соответствии с наложенными связями и действующими силами имеют место следующие представления соответствующих сил в (2.4)

$$Q^{(1)}(t, x) = F(t, x)\dot{x}, \quad \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = D(t, x, \dot{x})\dot{x}. \quad (2.5)$$

Следуя [6] и [7], рассмотрим задачу о стабилизации невозмущенного движения  $x = \dot{x} = 0$  системы (2.4) управляющим воздействием вида

$$U^{(1)}(t, x, \dot{x}) = -B(t)\dot{x} - P(t)x, \quad (2.6)$$

где  $B, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  есть матрицы коэффициентов усиления в структуре обратной связи, подлежащие определению.

### 3. Решение задачи о стабилизации с непрерывным законом управления

Следуя подходу, предложенному в работах [6] и [7], уравнения движения (2.4) запишем в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = F(t, x)x + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x} - P(t)x. \quad (3.1)$$

Подбор матрицы коэффициентов усиления  $B$  и  $P$  проведем на основе векторной функции Ляпунова

$$V = (V_1, V_2)', \quad V_1 = \|x\|, \quad V_2 = \sqrt{(\dot{x} + Sx)'A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + Sx)}, \quad (3.2)$$

где матрица  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S = const$ , подлежит определению, при этом исходные уравнения для нее примем

$$det S \neq 0 \quad x'(S' + S)x \geq 2s_0\|x\|^2, \quad s_0 = const > 0. \quad (3.3)$$

Пусть в области  $\mathbb{R}^+ \times G_1$ ,  $G_1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| \leq \varepsilon, \|\dot{x}\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$  имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_1^2\|\dot{x}\|^2 &\leq \dot{x}'A^{(1)}\dot{x} \leq \lambda_2^2\|\dot{x}\|^2, \\ (\dot{x} + Sx)' \left( \frac{1}{2} \frac{dA^{(1)}}{dt} + D - B + A^{(1)}S \right) (\dot{x} + Sx) &\leq -\mu_1\|\dot{x} + Sx\|^2, \\ (\dot{x} + Sx)'(F - P - (D - B + A^{(1)}S)S)x &\leq \mu_2\|\dot{x} + Sx\|\|x\|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  – положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству

$$s_0\lambda_1^2\mu_1 - \mu_2\lambda_2^2 > 0 \quad (3.5)$$

При этих соотношениях вектор-функция  $V$  является определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший предел, для её производных в силу (2.4) имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} 2V_1\dot{V}_1 = 2x'\dot{x} &= 2x'(\dot{x} + Sx - Sx) = -x'Sx + 2x'(\dot{x} + Sx) \leq \\ &\leq -2s_0\|x\|^2 + 2\|x\|\|\dot{x} + Sx\| \leq -2s_0V_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}V_1V_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2V_2\dot{V}_2 &= (\dot{x} + Sx)' \frac{dA^{(1)}}{dt} (\dot{x} + Sx) + 2(\dot{x} + Sx)' A^{(1)} (\ddot{x} + S\dot{x}) = \\
&= (\dot{x} + Sx)' \frac{dA^{(1)}}{dt} (\dot{x} + Sx) + 2(\dot{x} + Sx)' ((D - B + A^{(1)}S)\dot{x} + (F - P)x) = \\
&= (\dot{x} + Sx)' \left( \frac{dA^{(1)}}{dt} + 2(D - B + A^{(1)}S) \right) (\dot{x} + Sx) + \\
&+ 2(\dot{x} + Sx)' (F - P - (D - B + A^{(1)}S)S)x \leq \\
&\leq -2\mu_1 \|\dot{x} + Sx\|^2 + 2\mu_2 \|\dot{x} + Sx\| \|x\| \leq -2\frac{\mu_1}{\lambda_2^2} V_2^2 + 2\mu_2 \frac{1}{\lambda_1} V_2 V_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, при наличии соотношений (3.3) для вектор-функции  $V$  имеем следующую систему сравнения

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -s_0 u_1 + \frac{1}{\lambda_1} u_2, \\ \dot{u}_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_1} u_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_2^2} u_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Нулевое движение системы (3.6) в силу неравенства (3.5) является равномерно асимптотически устойчивым, и даже экспоненциально. Следовательно, при выполнении условий (3.3) – (3.5) управляющее воздействие (2.6) решает задачу о стабилизации программного движения  $(q^0(t), \dot{q}^0(t))$ .

При этом заметим, что форма управления (2.6) и условий (3.3) – (3.5) обеспечивает робастный характер управления.

#### 4. Решение задачи о стабилизации с дискретным законом управления

Перейдем к задаче о стабилизации движения  $\dot{x} = x = 0$  системы (2.4) управляющим воздействием дискретного типа

$$\begin{aligned}
U^1[t, x, \dot{x}] &= -B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n), \\
\dot{x}(t - T_n) &\equiv \dot{x}(T_n), \quad x(t - T_n) \equiv x(T_n) \quad T_n \leq t \leq T_{n+1}.
\end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнения движения (2.4) с учетом соотношений (2.5) будут иметь следующий вид

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = F(t, x)\ddot{x} + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n). \quad (4.2)$$

С точностью до  $T^2$  при  $t \in [T_n, T_{n+1})$  введем представления

$$\dot{x}(t - T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n), \quad x(t - T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n).$$

В первом представлении заменим  $\ddot{x}$  значением

$$\ddot{x} = A^{-1}(t, x) (F(t, x)x + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x} - P(t)x) \Big|_{\substack{x = x(t) \\ \dot{x} = \dot{x}(t)}}.$$

С точностью до  $T^2$  на каждом интервале  $[T_n, T_{n+1})$  движения системы могут быть описаны уравнениями

$$\begin{aligned}
A^{(1)}(t, x)\ddot{x} &= (D(t, x, \dot{x}) + (t - T_n)B(t)A^{-1}(t, x)D(t, x, \dot{x}) - B(t) - \\
&- (t - T_n)B(t)A^{-1}(t, x)B(t) + (t - T_n)P(t))\dot{x} + \\
&(F - P(t)) + (t - T_n)B(t)A^{-1}(t, x)(F - P(t))x.
\end{aligned} \quad (4.3)$$

Полученные уравнения имеют структуру, аналогичную структуре системы уравнений (2.6). Устойчивость её положения  $\dot{x} = x = 0$  может быть найдена посредством функции (3.1) в виде соотношений (2.6) и (3.3).

При этом для достаточно малых  $T$  матрицы, входящие в (4.3) достаточно мало отличаются от матриц, входящих в (2.6). Отсюда возникает следующий подход к построению управляющего воздействия (4.1).

В качестве начальной модельной системы берется система (2.6). Для нее при соответствующем подборе матрицы  $S$  находятся, согласно условиям (3.3), коэффициенты усиления управляющего воздействия (2.5). Усилением этих условий вида  $\mu_1 = \mu'_1 + \varepsilon$ ,  $\mu_2 = \mu'_2 + \varepsilon$  достигается выполнение условий асимптотической устойчивости положения  $\dot{x} = x = 0$  системы (4.3) при малых  $T > 0$ .

Проанализируем процесс стабилизации заданного программного движения при помощи импульсного управляющего воздействия. Для этого проведем замену  $y = x$ ,  $z = \dot{x}$ .

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = (A^{(1)})^{-1} (F\dot{z} + Dz - B\dot{z}(t - T_n) - Px(t - T_n)).$$

Полагая

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{y(T_{n+1}) - y(T_n)}{T} = \frac{y[n+1] - y[n]}{T}, \\ \dot{z} &= \frac{z(T_{n+1}) - z(T_n)}{T} = \frac{z[n+1] - z[n]}{T}. \end{aligned}$$

получим дискретную модель вида

$$\begin{aligned} y[n+1] &= y[n] + Tz[n], \\ z[n+1] &= z[n] + (A^{(1)}[n])^{-1} ((D[n] - B[n])z[n] + (F[n] - P[n])y[n])T. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Исследование устойчивости положения равновесия  $y = z = 0$  этой системы можно провести на основе векторной функции  $V = V(n)$ , аналогичной функции (3.2) для системы (3.1)

$$\begin{aligned} V &= (V_1, V_2)', \quad V_1(n) = \|y[n]\|, \\ V_2(n) &= \sqrt{(z[n] + Sy[n])'A^{(1)}[n](z[n] + Sy[n])}. \end{aligned}$$

где подлежащая определению матрица  $S = const$  удовлетворяет условию (3.3).

Находим с точностью до  $T^2$

$$\begin{aligned} V_1^2(n+1) &= \|y[n+1]\|^2 = (y[n] + Tz[n])'(y[n] + Tz[n]) = \\ &= ((E - TS)y[n] + T(z[n] + Sy[n]))'((E - TS)y[n] + T(z[n] + Sy[n])) \approx \\ &\approx y'[n](E - T(S + S'))y[n] + 2Ty'[n](z[n] + Sy[n]) \leq \\ &\leq (1 - 2s_0T)\|y[n]\|^2 + 2T\|y[n]\|\|z[n] + Sy[n]\| \leq \\ &\leq (1 - 2s_0T)V_1^2(n) + 2T\frac{1}{\lambda_1}V_1(n)V_2(n). \end{aligned}$$

Также имеем

$$\begin{aligned} V_2^2(n+1) &= (z[n+1] + Sy[n+1])'A^{(1)}[n+1](z[n+1] + Sy[n+1]) = \\ &= (z[n+1] + Sy[n+1])'(A^{(1)}[n+1] - A^{(1)}[n])(z[n+1] + Sy[n+1]) + \\ &+ (z[n+1] + Sy[n+1])'A^{(1)}[n](z[n+1] + Sy[n+1]). \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в этом равенстве с точностью до  $T^2$  получаем оценку

$$\begin{aligned}
 & (z[n+1] + Sy[n+1])' A^{(1)}[n](z[n+1] + Sy[n+1]) = \\
 & = (z[n] + Sy[n] + T(S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))(z[n] + Sy[n]) + \\
 & + ((A^{(1)}[n])^{-1}(F[n] - P[n]) - (S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))S)y[n])' \cdot \\
 & \cdot A^{(1)}[n](z[n] + Sy[n] + T(S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n])) - \\
 & - (S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))S)y[n]) \approx \\
 & \approx (z[n] + Sy[n])'(A^{(1)}[n] + T(A^{(1)}[n]S + (D[n] - B[n]))) \cdot \\
 & \cdot (z[n] + Sy[n]) + 2T(z[n] + Sy[n])'(F[n] - P[n] - \\
 & - (A^{(1)}[n]S + D[n] - B[n])S)y[n].
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Вспользуемся соотношением  $A^{(1)}[n+1] - A^{(1)}[n] \approx \frac{dA^{(1)}}{dt}[n]T$ .

Допустим, что для малых  $\|z\|$  и  $\|y\|$  выполнены соотношения вида (3.4)

$$\lambda_1^2 \|z\|^2 \leq z' A^{(1)}[n] z \leq \lambda_2^2 \|z\|^2$$

$$\begin{aligned}
 & (z + Sy)' \left( \frac{dA^{(1)}}{dt}[n] + D[n] + D'[n] - B[n] - B'[n] + \right. \\
 & \left. + A^{(1)}[n]S + S' A^{(1)}[n] \right) (z + Sy) \leq -2\mu_1 \|z + Sy\|^2
 \end{aligned}$$

$$(z + Sy)(F[n] - P[n] - (D[n] - B[n] + A^{(1)}[n]S)S)y \leq \mu_2 \|z + Sy\| \|y\|.$$

Тогда для оценки (4.5) получаем следующее неравенство

$$V_2^2(n+1) \leq V_2^2(n) - \frac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2} V_2^2(n) + 2\mu_2 \frac{T}{\lambda_1} V_1(n) V_2(n).$$

Таким образом, для векторной функции  $V$  имеем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} V_1(n+1) \leq (1 - 2s_0 T) V_1(n) + 2T V_2(n), \\ V_2(n+1) \leq \frac{2T\mu_2}{\lambda_1} V_1(n) + (1 - \frac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2}) V_2(n). \end{cases}$$

Соответствующая система сравнения

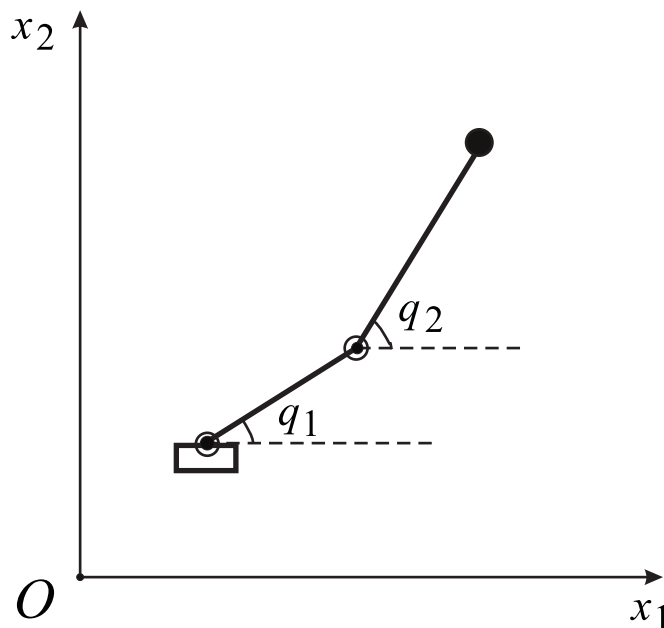
$$\begin{cases} u_1(n+1) \leq (1 - 2s_0 T) u_1(n) + 2T u_2(n), \\ u_2(n+1) \leq \frac{2T\mu_2}{\lambda_1} u_1(n) + (1 - \frac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2}) u_2(n), \end{cases}$$

будет экспоненциально устойчива, если выполнено неравенство

$$s_0 \lambda_1^2 \mu_1 - \mu_2 \lambda_2^2 > 0.$$

Таким образом, получим, что с точностью до  $T^2$  условия асимптотической устойчивости системы (4.4), полученной из системы (4.3) дискретизацией, совпадают с условиями устойчивости (3.4) модельной системы (3.1).

В качестве применения теоретических результатов рассмотрим задачу построения дискретного управления двухзвенным манипулятором на подвижном основании [8], модель которого представлена на рисунке 4.1.



Р и с у н о к 4.1

Двухзвенный манипулятор на подвижном основании

В рассматриваемой нами модели первое звено связано с подвижным основанием при помощи шарнира. Груз перемещается манипулятором при помощи схвата, укрепленного на конце второго звена. Звенья манипулятора связываются шарниром, а оси шарниров параллельны друг другу. Будем полагать, что звенья манипулятора есть однородные стержни, а линейные размеры схвата и груза много меньше, чем длины звеньев манипулятора, следовательно, перемещаемый груз и схват примем за материальную точку.

Исследуя транспортные движения манипулятора, будем считать, что манипулятор совершает действия в горизонтальной плоскости или в невесомости, т.е. в отсутствии силы тяжести, причем основание движется поступательно.

Пусть положение центра масс основания в инерциальной системе координат описывается функциями  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . В качестве обобщенных координат системы  $q_1, q_2$  выберем шарнирные углы звеньев, образуемые с осью  $Ox_2$ .

Управление манипулятором происходит при помощи двух независимых приводов  $D_1, D_2$ , которые находятся в шарнирах. Главные моменты сил относительно осей шарниров, создаваемые приводами  $D_1, D_2$  и приложенные к звеньям, соответственно равны  $U_1, U_2$ . Действие других сил, за исключением реакции основания, учитывать не будем.

Введем следующие обозначения:  $m_0$  — масса платформы,  $m_1, m_2$  — массы звеньев,  $l_1, l_2$  — длины звеньев,  $m_3$  — масса груза.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}^0 \dot{q}_1^2 + 2a_{12}^0 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22}^0 \dot{q}_2^2) + b_1 \dot{q}_1 + b_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$$

где  $a_{11}^0 = (\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3) l_1^2$ ,  $a_{12}^0 = a_{21}^0 \cos(q_1 - q_2)$ ,  $a_{12}^0 = (\frac{m_2}{2} + m_3) l_1 l_2$ ,  $a_{22}^0 = (\frac{m_2}{3} + m_3) l_2^2$ ,  $M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$ ,  $b_1 = b_1^0 (\dot{x}_2(t) \cos(q_1) - \dot{x}_1(t) \sin(q_1))$ ,  $b_1^0 = (\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3) l_1$ ,  $b_2 = b_2^0 (\dot{x}_2(t) \cos(q_2) - \dot{x}_1(t) \sin(q_2))$ ,  $b_2^0 = (\frac{m_2}{2} + m_3) l_2$ .

Уравнения движения под действием управляющих моментов, отнесенных к  $q_1$  и  $q_2$ , будут иметь следующий матричный вид

$$A(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + W(t, q) = U, \quad U' = (U_1, U_2), \quad (4.6)$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \cos(q_1 - q_2) \\ a_{12}^0 \cos(q_1 - q_2) & a_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad C(q) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^0 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2 \\ -a_{12}^0 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W(t, q) = \begin{pmatrix} -b_1^0 (\ddot{x}_1(t) \sin(q_1) - \ddot{x}_2(t) \cos(q_1)) \\ -b_2^0 (\ddot{x}_1(t) \sin(q_2) - \ddot{x}_2(t) \cos(q_2)) \end{pmatrix}.$$

Пусть  $q^0(t) = (q_1^0(t), q_2^0(t))$  — программное движение, создаваемое управляющим моментом

$$U_0(t) = A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + W(t, q^0(t)).$$

Положим  $x = q - q^0(t)$ ,  $U = U_0(t) + U_1$ , где  $x$  — возмущение,  $U_1$  — управляющее воздействие, создаваемое обратной связью.

Уравнения возмущенного движения в линейном приближении будут иметь следующий вид

$$A^0(t)\ddot{x} = D^0(t)\dot{x} + F^0(t)x + U_1, \quad A^0(t) = A(q^0(t)), \quad D(t) = -2C(q^0(t), \dot{q}^0(t)),$$

где

$$F^0(t) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

$$f_{11} = a_{12}^0 (\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))) + b_{10} (\ddot{x}_1(t) \cos(q_1^0(t)) + \ddot{x}_2(t) \sin(q_1^0(t))),$$

$$f_{12} = -a_{12}^0 (\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))),$$

$$f_{21} = a_{12}^0 (\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) + (\dot{q}_1^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))),$$

$$f_{22} = -a_{12}^0 (\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_1^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))) + b_{10} (\ddot{x}_1(t) \cos(q_2^0(t)) + \ddot{x}_2(t) \sin(q_2^0(t))).$$

В соответствии с условиями (3.4) может быть найдено управляющее воздействие вида (3.2), стабилизирующее положение  $x_1 = x_2 = 0$  системы (4.6).

Движение  $(q_1^0(t), q_2^0(t))$  может быть также стабилизируемо соответствующим управлением вида (4.1).

Предположим, что движение основания манипулятора может быть описано следующим законом:

$$x_1(t) = \cos(2t) \text{ м}, \quad x_2(t) = \sin(2t) \text{ м}.$$

Программное движение манипулятора зададим как:

$$q_1^0(t) = 1,1 \sin(1,2t + 1) \text{ рад}, \quad \dot{q}_1^0(t) = 1,32 \cos(1,2t + 1) \text{ рад/с},$$

$$q_2^0(t) = 1,3 \sin(1,6t + 1,9) \text{ рад}, \quad \dot{q}_2^0(t) = 2,08 \sin(1,6t + 1,9) \text{ рад/с},$$

с начальными отклонениями:

$$q_1(0) = 0 \text{ рад}, \quad q_2(0) = 0,5 \text{ рад}, \quad \dot{q}_1(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad \dot{q}_2(0) = 0 \text{ рад/с}.$$

Задав следующие параметры системы

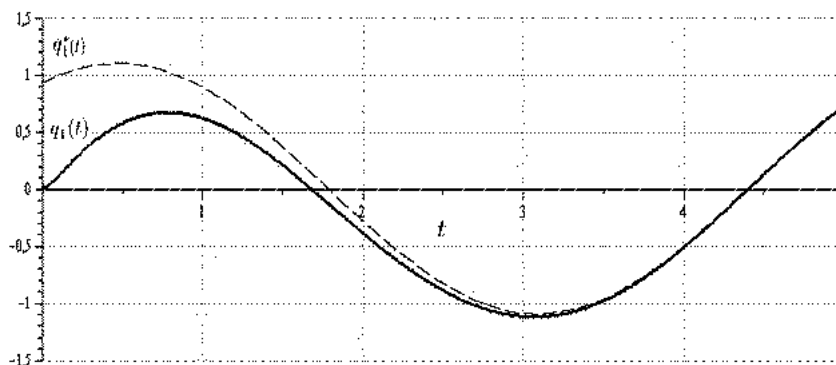
$$m_1 = 20 \text{ кг}, \quad m_2 = 10 \text{ кг}, \quad m_3 = 5 \text{ кг}, \quad l_1 = 0,8 \text{ м}, \quad l_2 = 0,5 \text{ м},$$

получим значения параметров управления для такого движения

$$k_1 = 319,407, \quad k_2 = 114,987, \quad k_1^0 = 170,478, \quad k_2^0 = 61,372,$$

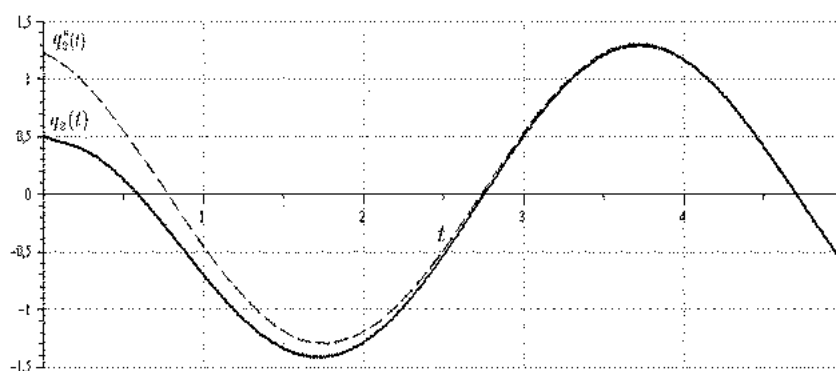
где  $k_1^0, k_2^0$  — значения параметров управления, найденные при нулевом отклонении. Числа  $k_1^0, k_2^0$  имеют смысл нижних граней параметров  $k_1, k_2$ , т.е. параметры  $k_1, k_2$  можно представить в виде  $k_1 = k_1^0 + \eta_1, k_2 = k_2^0 + \eta_2$ , где  $\eta_1, \eta_2$  — положительные постоянные, зависящие от выбора начальных отклонений.

Результаты численного моделирования поведения системы представлены на рисунках 4.2, 4.3. При проведении моделирования шаг дискретизации  $\Delta_c$  для системы выбран равным шагу дискретизации  $\Delta_y$  управления ( $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$ ). Непрерывная кривая – стабилизируемая компонента, штриховая кривая – соответствующая компонента программного движения. Время моделирования  $t_{\max} = 5$ .



Р и с у н о к 4.2

График зависимости угловой координаты первого звена от времени.



Р и с у н о к 4.3

График зависимости угловой координаты второго звена от времени.

Результаты, полученные в работе являются дополнением результатов [9] и [10]. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

Дата поступления 01.11.2016

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Nesić, A. Teel, and P. Kokotović, “Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations”, *Syst. Contr. Lett.*, **38** (1999), 259–270.
2. D. Laila, *Design and analysis of nonlinear sampled-data control systems*, PhD thesis, University of Melbourne, 2003.

3. D. Netic, and A. Teel, “A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **49** (2004), 1103–1122.
4. D. Laila, D. Netic, and A. Teel, “Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation”, *Europ. J. Contr.*, 2002, № 8, 109–125.
5. А. П. Маркеев, *Теоретическая механика*, ЧеРо, М., 1999, 569 с.
6. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “О стабилизации программных движений голономной механической системы”, XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 (Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН), 2014, 1840–1843.
7. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “О стабилизации программных движений голономной механической системы”, *Автоматика и телемеханика*, 2016, № 3, 66–80.
8. Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин, *Методы управления нелинейными механическими системами*, Физматлит, М., 2006, 326 с.
9. А. С. Андреев, Е. А. Кудашова, О. А. Перегудова, “О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2015, № 6, 113–115.
10. О. А. Перегудова, Е. А. Кудашова, “Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2015, № 1, 118–120.

## On Modeling the controlled mechanical systems with digital controllers

© А. С. Андреев<sup>3</sup>, Е. А. Кудашова<sup>4</sup>

**Abstract.** Synthesis of discrete-time control which solves the problem of stabilization of holonomic mechanical systems' program motion is considered. Such systems are described by Lagrange equations of the second kind. Digital control signals are used in computer-containing control systems for continuous processes. Development of models for such controlled processes leads to investigation of continuous-discrete systems with state described by a continuous function and discrete control functions. This paper proposes an approach for constructing of controller taking into account non-linearity of the system and non-stationarity of program motion. By means of Lyapunov vector function and the comparison system sufficient conditions of given program motion's stabilization are obtained. A feature of the article is in solving of the problem by use of Lyapunov vector function with components that explicitly depend on time, and are nonlinear with respect to the generalized coordinates. It allows to solve the stabilization problem in general having the possibility to select the most suitable control parameters for each particular system.

**Key Words:** stabilization, control, discrete-time control, synthesis of control for mechanical systems, Lyapunov vector-function, comparison systems, nonstationary nonlinear dynamical systems

<sup>3</sup> Dean of Faculty of Mathematics and Information and Aviation Technology, Prof., D.Sc., Head of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; andreevas@sv.ulsu.ru

<sup>4</sup> Programmer of Information Security and Control Theory Department, Faculty of Mathematics, Information and Aviation Technology, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; katherine.kudashova@yandex.ru