A. S. Kondrat'ev, A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko, On the behavior of elements of prime order from a Zinger cycle in representations of a special linear group, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2013, Volume 19, Number 3, 179–186

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

О ПОВЕДЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТОГО ПОРЯДКА ИЗ ЦИКЛА ЗИНГЕРА В ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ[1]

А. С. Кондратьев, А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко

Пусть $G = SL_n(q)$, где $n \geq 2$ и q — степень простого числа p. Циклом Зингера группы G называется любая ее циклическая подгруппа порядка $(q^n - 1)/(q - 1)$. В работе классифицированы абсолютно неприводимые G-модули над полем характеристики p, на которые элемент заданного простого порядка m из цикла Зингера группы G действует свободно, в следующих трех случаях: а) вычет числа q по модулю m порождает мультипликативную группу поля порядка m (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$. Ключевые слова: специальная линейная группа, цикл Зингера, абсолютно неприводимый модуль, свободное действие элемента.

A. S. Kondrat'ev, A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko. On the behavior of elements of prime order from a Zinger cycle in representations of a special linear group.

Let $G = SL_n(q)$, where $n \geq 2$ and q is a power of a prime p. A Zinger cycle of the group G is any its cyclic subgroup of order $(q^n - 1)/(q - 1)$. Here absolutely irreducible G-modules over a field of the defining characteristic p where an element of a given prime order m from a Zinger cycle of G acts freely are classified in the following three cases: a) the residue of q modulo m generates the multiplicative group of the field of order m (in particular, this holds for $m = 3$); b) $m = 5$; c) $n = 2$.

Keywords: special linear group, Zinger cycle, absolutely irreducible module, free action of an element.

К 60-летию Александра Алексеевича Махнева

Введение

Пусть G — конечная группа и V — G-модуль над некоторым полем. Говорят, что нетривиальный элемент группы G действует *свободно* (или *без неподвижных точек*) на V, если он не имеет ненулевых неподвижных векторов в V. Большой интерес вызывает проблема описания неприводимых G-модулей, где некоторый элемент простого порядка из G действует свободно. Результаты в этом направлении находят многочисленные приложения, в частности, при исследовании распознаваемости конечных простых групп по спектру (множеству порядков элементов) или графу простых чисел, а также при изучении строения конечных групп с несвязным графом простых чисел (см., например, обзоры [3; 4]).

Пусть p — простое число, $q = p^l$, $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, P — алгебраически замкнутое поле характеристики p и $G = SL_n(q)$ — специальная линейная группа степени $n \geq 2$ над полем $\mathbb{F}_q$. *Циклом Зингера* группы G (соответственно $G/Z \cong L_n(q)$) называется любая ее циклическая подгруппа порядка $(q^n - 1)/(q - 1)$ (соответственно $(q^n - 1)/(q - 1)(n, q - 1)$) (см. [10, теорема II.7.3]). Изучается задача классификации неприводимых G-модулей над полем P, где нескалярный элемент y заданного простого порядка m из цикла Зингера $\langle s \rangle$ группы G

[1]Исследования первого автора поддержаны РФФИ (проект 13-01-00476), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программой Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программами совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009). Исследования других авторов — НАН Беларуси в рамках отдельного проекта “Алгебраические и конечные группы и их представления: исследование проблем нормального строения анизотропных алгебраических групп и действий определенных подгрупп, важных для приложений, в модулях для конечных групп Шевалле”.

действует свободно. Именно так действуют нетривиальные элементы из цикла Зингера группы G на ее естественном модуле над полем P. Заметим также, что если H — конечная группа с несвязным графом простых чисел такая, что $F(H) \neq 1$, $\overline{H} = H/F(G) \cong L_n(q)$ и $n \geq 3$, то действие (сопряжением) группы H на $F(H)$ индуцирует на каждом главном факторе группы H, входящем в $F(H)$, точный неприводимый $\overline{H}$-модуль (над некоторым полем простого порядка), на котором все нетривиальные элементы из цикла Зингера группы $\overline{H}$ действуют свободно (см. [2; 13]). Поэтому уточнение строения группы H во многом сводится к изучению таких $\overline{H}$-модулей.

Пусть $\overline{q}$ — образ q при каноническом гомоморфизме из кольца целых чисел в поле $\mathbb{F}_m$ порядка m. В данной работе указанная выше задача решена в следующих трех случаях: а) $\overline{q}$ порождает мультипликативную группу поля $\mathbb{F}_m$ (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$. Это обобщает, в частности, результаты Г. Хигмена [8, теорема 8.2] и У. Стюарта [12, предложение 3.2], которые были получены в случае, когда $m = 3$ и $n = 2$. Р. Уилсон [14] определил неприводимые представления в характеристике 2 квазипростых групп Шевалле над конечными полями характеристики 2, где некоторый элемент порядка 3 не имеет собственного значения 1, т. е. действует в соответствующем модуле без неподвижных точек. А. Е. Залесский, В. Лемпкен и П. Фляйшманн [7, теорема 0.1] описали абсолютно неприводимые подгруппы полной линейной группы над конечным полем характеристики 2, порожденные классом сопряженных элементов порядка 3, действующих без неподвижных точек. А. В. Заварницын [16, теорема 8] указал достаточные условия, при выполнении которых элементы больших простых порядков имеют неподвижную точку в неприводимых модулях групп $PSL_n(q)$ и $PSU_n(q)$ в собственной характеристике. В статье А. Е. Залесского [15] приведен обзор результатов о собственных значениях элементов в представлениях алгебраических групп и конечных групп Шевалле, особое внимание уделяется собственному значению 1.

Далее мы пользуемся терминологией и обозначениями из [1]. Пусть $\overline{G} = SL_n(P)$, $r = n-1$, Fr — морфизм Фробениуса группы $\overline{G}$, ассоциированный с возведением элементов поля P в степень p, V — стандартный $\overline{G}$-модуль, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ — стандартные веса модуля V, $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — фундаментальные веса группы $\overline{G}$, $\omega(\varphi)$ и $\Lambda(\varphi)$ — старший вес и множество весов представления φ группы $\overline{G}$ над полем P соответственно, $S(\varphi)$ — множество собственных значений (спектр) элемента $\varphi(y)$, $S(V)$ — аналогичное множество для модуля V.

Пусть Irr_p и Irr_q — множества неприводимых представлений группы $\overline{G}$ над полем P со старшими весами $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$, где все a_i меньше p и q соответственно. Напомним, что представления из Irr_p называются *p-ограниченными.* Известно (см. [11, § 13, теорема 43]), что ограничение $\varphi|G$ неприводимо для любого $\varphi \in Irr_q$ и совокупность таких ограничений образует полный набор неприводимых представлений группы G над P. Поэтому достаточно выяснить, в каких представлениях из Irr_q элемент y действует свободно.

Доказаны следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{q}$ *порождает группу* $\mathbb{F}_m^*$ *(это условие выполняется, в частности, для* $m = 3$*) и* $\varphi \in Irr_q$ *— нетривиальное представление. Элемент* $\varphi(y)$ *не имеет неподвижных точек тогда и только тогда, когда* $\omega(\varphi) = p^j\omega_1$ *или* $p^j\omega_r$.

Теорема 2. *Пусть* $m = 5$ *и* $\varphi \in Irr_q$ *— нетривиальное представление.*

1) *Предположим, что* $q \equiv 4 \pmod 5$. *Тогда* n *четно и элемент* $\varphi(y)$ *не имеет неподвижных точек в точности тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

a) $\omega(\varphi) \in \{p^j\omega_1, p^j\omega_r, 3p^j\omega_1, 3p^j\omega_r, p^j(2\omega_1+\omega_r), p^j(\omega_1+2\omega_r)\}$;

b) $n \geq 6$, $\omega(\phi) \in \{p^j\omega_3, p^j\omega_{r-2}\}$;

c) $n \geq 4$, $\omega(\varphi) = p^j(\omega_v+\omega_w)$, $v \in \{1, r\}$, $w \in \{2, r-1\}$;

d) $\omega(\varphi) = p^i\lambda + p^j\mu$, $\lambda \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $\mu \in \{\omega_2, \omega_{r-1}, \omega_1+\omega_r, 2\omega_1, 2\omega_r\}$, $i \neq j$ *и при* $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ *число* $j-i$ *четно, если* $j > i$, *и число* $l+j-i$ *четно при* $j < i$;

e) $\omega(\varphi) = p^i\lambda + p^j\mu$, $\lambda, \mu \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $i < j$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ *и* $j-i$ *нечетно*;

f) $\omega(\varphi) = p^i\lambda + p^j\mu + p^k\nu$, $\lambda, \mu, \nu \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $i < j < k$ *и при* $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ *числа* $j - i$ *и* $k - i$ *четны.*

В пп. a) и d) в тех случаях, когда в формулах для $\omega(\varphi)$ *встречаются коэффициенты* 2 *или* 3, *предполагается, что* $p > 2$ *или* $p > 3$ *соответственно.*

2) *Предположим, что* $q \equiv \pm 2 \pmod 5$. *Тогда* $n \equiv 0 \pmod 4$ *и элемент* $\varphi(y)$ *не имеет неподвижных точек в точности тогда, когда* $\omega(\varphi) = p^j\omega_1$ *или* $p^j\omega_r$.

Теорема 3. *Пусть* $n = 2$, h *— полупростой элемент нечетного порядка* k *из* G, $\varphi \in Irr_q$ *и* $\omega(\varphi) = a\omega_1$. *Предположим, что* $a = \sum_{j=0}^{l-1} a_j p^j$ *—* p*-адическое разложение числа* a. *Тогда элемент* $\varphi(h)$ *имеет неподвижную точку в точности тогда, когда существует такое неотрицательное целое число* b, *что* $bk \le a$, $a - bk$ *четно и* $(a - bk)/2 = \sum_{j=0}^{l-1} b_j p^j$, *где* $0 \le b_j \le a_j$ *для всех* j *от* 0 *до* $l - 1$.

Из теоремы 3 вытекает полезное

Следствие. *Пусть* $n = p = 2$, h *— элемент порядка* $q - 1$ *из* G *и* $\varphi \in Irr_q$. *Тогда элемент* $\varphi(h)$ *имеет неподвижную точку в точности тогда, когда* φ *— тривиальное представление или представление Стейнберга степени* q *группы* G.

В конце разд. 2 рассмотрен пример, когда $G = SL_2(2^7)$ и $k = 43$, представляющий интерес для приложений к задачам распознаваемости конечных групп по графу простых чисел.

В доказательствах теорем 1–3 неоднократно используется теорема Стейнберга о тензорном произведении [11, теорема 1.1], согласно которой неприводимое представление группы $\overline{G}$ со старшим весом $\sum_{j=0}^{l-1} p^j\lambda_j$ и p-ограниченными весами λ_j эквивалентно тензорному произведению $\bigotimes_{j=0}^{l-1} Fr^j \circ \varphi_j$, где $\varphi_j \in Irr_p$ — представление со старшим весом λ_j.

1. Доказательство теоремы 1

В доказательстве теоремы [10, теорема II.7.3] указано, что в модуле V элемент s имеет собственные значения $\beta, \beta^q, \ldots, \beta^{q^{n-1}}$, где $\beta \in P^*$ — элемент порядка $q^{n-1} + \ldots + q + 1$. Отсюда следует, что $\langle s \rangle$ содержит нескалярный элемент простого порядка m тогда и только тогда, когда m делит $q^{n-1} + \ldots + q + 1$, но не делит $q - 1$. Ясно, что в группе $\langle s \rangle$ нет нескалярных инволюций. Всюду в дальнейшем $y \in \langle s \rangle$ — нескалярный элемент порядка m. Ввиду сказанного выше m нечетно. Фиксируем максимальный тор $T \subset \overline{G}$, содержащий элемент y. Далее веса группы $\overline{G}$ рассматриваются относительно тора T.

Докажем сначала три предварительные леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $\gamma \in S(V)$. *Предположим, что* $|\overline{q}| = d$. *Тогда* d *делит* n,

$$S(V) = \{\gamma, \gamma^q, \ldots, \gamma^{q^{d-1}}\}$$

и кратность каждого собственного значения равна n/d.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что m делит $q^n - 1$. Поэтому $\overline{q}^n = 1$. Отсюда следует первое утверждение леммы. Поскольку $y \in \langle s \rangle$, то $(\gamma, \gamma^q, \ldots, \gamma^{q^{n-1}})$ — полный набор собственных значений элемента y в модуле V (с учетом кратностей). Остается заметить, что $\gamma^{q^{i+d}} = \gamma^{q^i}$, ибо $q^d \equiv 1 \pmod m$. □

Лемма 2. *Пусть* $|\overline{q}| = m - 1$ *и* $\varphi \in Irr_q$ *— нетривиальное представление. Тогда любой элемент порядка* m *из* P^* *содержится в* $S(\varphi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $1 \ne \delta \in S(\varphi)$. Тогда $|\delta| = m$. Так как для любого натурального числа i ограничения $\varphi|G$ и $(Fr^{li} \circ \varphi)|G$ эквивалентны и $y \in G$, то и $\delta^{q^i} \in S(\varphi)$. Поскольку $q^k \not\equiv 1 \pmod m$ при $k < m - 1$, то элементы $\delta, \delta^q, \ldots, \delta^{q^{m-2}}$ попарно различны. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть φ, φ_1, $\varphi_2 \in Irr_p$ и $\omega(\varphi) = \omega(\varphi_1) + \omega(\varphi_2)$. Тогда*

$$\Lambda(\varphi) = \{\mu_1 + \mu_2 \mid \mu_i \in \Lambda(\varphi_i)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из соответствующего равенства для представлений в характеристике 0 [1, гл. VIII, § 7.4, предложение 10] и совпадения систем весов p-ограниченного представления группы $\overline{G}$ и неприводимого представления аналогичной группы в характеристике 0 с тем же старшим весом [6]. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Ясно, что элементы $\varphi(y)$ и $(Fr^j \circ \varphi)(y)$ одновременно имеют или не имеют неподвижные точки. Поэтому можно считать, что представление φ p-ограничено или тензорно разложимо. Предположим сначала, что $\omega(\varphi) = \omega_i$, $1 < i < r$. Ввиду леммы 1 число n четно. Переходя, если потребуется, к дуальному представлению, можно считать, что $i \le n/2$. Положим $m' = (m-1)/2$ и фиксируем элемент $\gamma \in S(V)$ порядка m. В силу лемм 1 и 2 $S(V) = \{\gamma^j \mid 1 \le j \le m\}$, и кратности всех собственных значений элемента y на V совпадают. Поэтому, используя группу Вейля, можно выбрать такую нумерацию весов ϵ_k, что $\epsilon_k(y) = \epsilon_{n+1-k}(y)^{-1}$ для любого k и $\epsilon_k(y) = \gamma^{t_k} y$ с $t_k \le m'$ при $k \le n/2$. Напомним, что представление φ является микровесовым, и поэтому

$$\Lambda(\varphi) = \{\epsilon_{j_1} + \ldots + \epsilon_{j_i} \mid 1 \le j_1 < \ldots < j_i \le n\}.$$

Пусть $i = 2a$. Ясно, что вес $\lambda = (\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_a) + (\epsilon_n + \ldots + \epsilon_{n+1-a})$ принадлежит $\Lambda(\varphi)$. Легко видеть, что $\lambda(y) = 1$. Предположим теперь, что $i = 3$. Тогда $n \ge 6$. При $m = 3$ множество $S(V)$ равно $\{\gamma, \gamma^{-1}\}$ и кратность каждого из собственных значений не меньше 3, поэтому существует вес $\mu = \epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2} + \epsilon_{i_3} \in \Lambda(\phi)$ с $\mu(y) = 1$. В силу леммы 1 при $m = 5$ кратности собственных значений элемента y на V не меньше 2, поскольку $|S(V)| = 4$. Еще раз используя лемму 1, получаем, что при $m \ge 5$ существуют попарно различные индексы i_1, i_2, i_3 такие, что $\epsilon_{i_1}(y) = \gamma$, $\epsilon_{i_2}(y) = \gamma^2$ и $\epsilon_{i_3}(y) = \gamma^{-3}$. Тогда $\nu = \epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2} + \epsilon_{i_3} \in \Lambda(\varphi)$ и $\nu(y) = 1$. Заметим, что ввиду нашего выбора нумерации весов при $m > 5$ имеем i_1, $i_2 \le n/2$ и $i_3 > n/2$; при $m = 5$ все эти числа не превосходят $n/2$. Наконец, пусть $i = 2a + 3 > 3$. Ясно, что при $m = 3$ кратность каждого собственного значения γ и γ^{-1} в модуле V не меньше i и поэтому больше $a + 3$. Выберем попарно различные индексы $j_1, \ldots, j_{a+3}$ и $k_1, \ldots, k_a$ так, что $\epsilon_{j_t}(y) = \gamma$ и $\epsilon_{k_u}(y) = \gamma^{-1}$ при $1 \le t \le a + 3$ и $1 \le u \le a$. Тогда

$$\tau := (\epsilon_{j_1} + \ldots + \epsilon_{j_{a+3}}) + (\epsilon_{k_1} + \ldots + \epsilon_{k_a}) \in \Lambda(\varphi)$$

и $\tau(y) = 1$. Пусть $m \ge 5$ и числа i_1, i_2, i_3 такие, как выше. Положим $b = i_3$ при $m = 5$ и $b = n + 1 - i_3$ при $m > 5$. Зафиксируем a попарно различных индексов $c_1, \ldots, c_a$ так, что $c_1, \ldots, c_a \le n/2$ и $c_j \notin \{i_1, i_2, b\}$ при $1 \le j \le a$. Это возможно, так как $n/2 \ge i > a + 3$. Тогда

$$\rho := \epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2} + \epsilon_{i_3} + (\epsilon_{c_1} + \ldots + \epsilon_{c_a}) + (\epsilon_{n+1-c_1} + \ldots + \epsilon_{n+1-c_a}) \in \Lambda(\varphi)$$

и $\rho(y) = 1$. Очевидно, что y действует без неподвижных точек при $\omega(\varphi) = \omega_1$ или ω_r (в естественном модуле и дуальном к нему). Случай фундаментальных представлений полностью рассмотрен.

Если $\varphi \in Irr_p$, но представление ϕ не является фундаментальным, то существуют нетривиальные представления φ_1, $\varphi_2 \in Irr_p$ такие, что $\omega(\varphi) = \omega(\varphi_1) + \omega(\varphi_2)$. Ввиду леммы 3 имеем $\Lambda(\varphi) = \{\mu_1 + \mu_2 \mid \mu_i \in \Lambda(\varphi_i)\}$. Если же $\varphi \cong \rho_1 \otimes \rho_2$, то ясно, что

$$\Lambda(\varphi) = \{\mu_1 + \mu_2 \mid \mu_i \in \Lambda(\rho_i)\}.$$

В силу леммы 2 в обоих случаях можно выбрать веса μ_1 и μ_2 так, что $\mu_1(y)$ — элемент порядка m и $\mu_2(y) = \mu_1(y)^{-1}$. Это завершает доказательство теоремы 1. □

2. Доказательство теорем 2 и 3

Докажем сначала теорему 2. Пусть далее Γ — множество всех элементов порядка 5 из P^* и

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_{r-1}, \omega_r, \omega_1 + \omega_r, 2\omega_1, 2\omega_r\}.$$

Нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4. *Пусть $m = 5$, $q \equiv 4 \ (mod\ 5)$, $\gamma \in S(V)$ и $\varphi \in Irr_p$ — нетривиальное представление. Тогда либо $\Gamma \subset S(\varphi)$, либо $\omega(\varphi) \in \Omega$. Множество $S(\varphi)$ равно $\{\gamma, \gamma^{-1}\}$ при $\omega(\varphi) \in \{\omega_1, \omega_r\}$ и $\{1, \gamma^2, \gamma^{-2}\}$ в других исключительных случаях.*

Доказательство. Заметим, что $|\overline{q}| = 2$. В силу леммы 1 число n четно, $S(V) = \{\gamma, \gamma^q\}$ и кратности собственных значений элемента y на V равны $n/2$. Можно так выбрать нумерацию весов ϵ_j, что $\epsilon_j(y) = \gamma$ при $j \leq n/2$ и $\epsilon_j(y) = \gamma^{-1}$ при $j > n/2$. Ясно, что $\gamma^q = \gamma^{-1}$. Обозначим через Φ множество всех представлений $\rho \in Irr_p$ таких, что $\Gamma \subset S(\rho)$. Поскольку $y \in G$ и ограничения $\psi|G$ и $(Fr^l \circ \psi)|G$ эквивалентны для любого $\psi \in Irr_q$, то при $\delta \in \Gamma \cap S(\psi)$ имеем $\delta^{-1} = \delta^q \in S(\psi)$. Здесь и в доказательстве теоремы 2 положим $\omega = \omega(\varphi)$. Используя лемму 3 и рассуждая, как в конце доказательства теоремы 1, можно доказать следующее утверждение:

$$\text{если } \rho \in \Phi \text{ и } \omega - \omega(\rho) \text{ — доминантный вес, то } \varphi \in \Phi. \qquad (*)$$

Пусть $\omega = \omega_i$, где $3 \leq i \leq r-2$. Переходя, если потребуется, к дуальному представлению, можно считать, что $i \leq n/2$. Предположим сначала, что $i = 3 + 2k$, где k — целое неотрицательное число. Тогда $n \geq 4k + 6$. Положим

$$\lambda_1 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+3} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k},$$
$$\lambda_2 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_k + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+3},$$
$$\lambda_3 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+2} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+1},$$
$$\lambda_4 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+1} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+2}$$

(при $i = 3$ имеем $\lambda_1 = \omega_3$, $\lambda_2 = \epsilon_{n/2+1} + \epsilon_{n/2+2} + \epsilon_{n/2+3}$). Тогда $\lambda_j \in \Lambda(\varphi)$ при $1 \leq j \leq 4$. Непосредственно проверяется, что $\lambda_1(y) = \gamma^3$, $\lambda_2(y) = \gamma^{-3} = \gamma^2$, $\lambda_3(y) = \gamma$ и $\lambda_4(y) = \gamma^{-1}$.

Пусть теперь $i = 2k > 2$. Тогда $k \geq 2$ и $k + 2 \leq i \leq n/2$. Положим

$$\lambda_1 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+2} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k-2},$$
$$\lambda_2 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k-2} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+2},$$
$$\lambda_3 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+1} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k-1},$$
$$\lambda_4 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k-1} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+1}$$

(при $i = 4$ имеем $\lambda_1 = \omega_4$, $\lambda_2 = \epsilon_{n/2+1} + \epsilon_{n/2+2} + \epsilon_{n/2+3} + \epsilon_{n/2+4}$). Тогда $\lambda_1(y) = \gamma^{-1}$, $\lambda_2(y) = \gamma$, $\lambda_3(y) = \gamma^2$ и $\lambda_4(y) = \gamma^{-2}$. Поэтому $\varphi \in \Phi$.

Ясно, что $S(\varphi) = \{\gamma, \gamma^{-1}\}$ при $\omega \in \{\omega_1, \omega_r\}$. До конца этого доказательства предполагается, что если у веса ω есть коэффициент 2 или 3, то $p > 2$ или $p > 3$ соответственно. Легко проверить, что $S(\varphi) = \{1, \gamma^2, \gamma^{-2}\}$ при $r > 2$ и $\omega \in \{\omega_2, \omega_{r-1}\}$. Ввиду леммы 3 множество $S(\varphi)$ такое же и при $\omega \in \{2\omega_1, 2\omega_r, \omega_1 + \omega_r\}$. Еще раз используя лемму 3, получаем, что $\varphi \in \Phi$ при

$$\omega \in \{3\omega_1, 3\omega_r, 2\omega_1 + \omega_r, \omega_1 + 2\omega_r, \omega_1 + \omega_2, \omega_{r-1} + \omega_r, \omega_1 + \omega_{r-1}, \omega_2 + \omega_r, \omega_2 + \omega_{r-1}, 2\omega_2, 2\omega_{r-1}\}.$$

Здесь всюду предполагается, что $r > 2$, если в формуле для ω встречается ω_2 или ω_{r-1}. Для завершения доказательства леммы достаточно использовать утверждение (*). $\square$

Доказательство теоремы 2. Утверждение п. 2) следует из леммы 1 и теоремы 1.

Пусть $q \equiv 4 \pmod 5$. Тогда $|\overline{q}| = 2$ и в силу леммы 1 число n четно и $S(V) = \{\gamma, \gamma^{-1}\}$, где $\gamma \in P^*$ — элемент порядка 5. Выберем ту же нумерацию весов ϵ_j, что и в лемме 4. Предположим сначала, что $\varphi \in Irr_p$. Можно считать, что φ не является ни одним из исключительных представлений, указанных в лемме 4.

Пусть $\omega = \omega_i$, где $3 \leq i \leq n/2$. Предположим, что $i = 2k$ для некоторого натурального числа k. Вес $\lambda = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_k + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k}$ принадлежит $\Lambda(\varphi)$, и легко видеть, что $\lambda(y) = 1$. При $i = 3$ непосредственно проверяется, что $1 \notin S(\varphi)$. Наконец, пусть $i = 5 + 2k$ для некоторого неотрицательного целого числа k. Ясно, что $5 + k \leq n/2$. Положим

$$\mu = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+5} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k}$$

при $k > 0$ и $\mu = \omega_5$ при $k = 0$. Тогда $\mu \in \Lambda(\varphi)$ и $\mu(y) = 1$. Переходя к дуальным представлениям, завершаем доказательство для фундаментальных представлений.

Используя леммы 3 и 4, можно установить, что $1 \notin S(\varphi)$ при

$$\omega \in \{3\omega_1, 3\omega_r, 2\omega_1 + \omega_r, \omega_1 + 2\omega_r, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_{r-1}, \omega_2 + \omega_r, \omega_{r-1} + \omega_r\}$$

и что $1 \in S(\varphi)$, если $\omega \in \{2\omega_2, 2\omega_{r-1}, \omega_2 + \omega_{r-1}\}$. Для других представлений φ с $\omega \neq \omega_i$ и $\omega \notin \Omega$ вес ω записывается в виде $\omega(\rho) + \omega(\psi)$, где $\rho, \psi \in Irr_p$ — нетривиальные представления и $\omega(\rho) \notin \Omega$. Ввиду леммы 4 имеем $\Gamma \subset S(\rho)$. Поскольку $S(\psi)$ содержит некоторый элемент из Γ, то $1 \in S(\varphi)$ в силу леммы 3. Таким образом, теорема доказана для p-ограниченных представлений.

Поскольку применение морфизма Фробениуса не влияет на наличие у определенного элемента собственного значения 1, далее можно считать, что представление φ тензорно разложимо. Так как $\varphi \in Irr_q$, то $\varphi \cong \otimes_{j=0}^{l-1} Fr^j \circ \varphi_j$, где $\varphi_j \in Irr_p$ и хотя бы два из них нетривиальны. Ясно, что $1 \in S(\varphi)$, если $1 \in S(\varphi_j)$ для всех j с $0 \leq j \leq l-1$. Пусть $1 \notin S(\varphi_k)$. Нетрудно заметить, что $1 \in S(\varphi)$, если $\Gamma \subset S(\varphi_j)$ для хотя бы одного j. Поэтому ввиду леммы 4 задача сводится к случаю, когда $\omega(\varphi_j) \in \Omega \cup \{0\}$ для всех j, который и рассматривается ниже. Ограничение на G представления $Fr^{l-k} \circ \varphi$ эквивалентно ограничению $\psi|G$, где $\psi = \otimes_{j=0}^{l-1} Fr^j \circ \psi_j$, $\psi_j = \phi_{j+k}$, если $j + k \leq l - 1$, и $\psi_j = \varphi_{j+k-l}$ при $j + k > l - 1$. Понятно, что множества $S(\varphi)$ и $S(\psi)$ одновременно содержат или не содержат 1. Исследуем спектр $S(\psi)$. Так как $1 \notin S(\psi_0)$ и $\omega(\psi_0) \in \Omega$, то ввиду доказанного выше для p-ограниченных представлений $\omega(\psi_0) \in \{\omega_1, \omega_r\}$. Пусть t — минимальный ненулевой индекс с $\omega(\psi_t) \neq 0$. Такой индекс существует, поскольку ψ тензорно разложимо. Положим

$$\xi = \psi_0 \otimes Fr^t \circ \psi_t, \quad \Omega_1 = \{\omega_1, \omega_r\}, \quad \Omega_2 = \{\omega_2, \omega_{r-1}, \omega_1 + \omega_r, 2\omega_1, 2\omega_r\}.$$

Легко видеть, что характеристика p сравнима с одним из чисел $2, 3$ или 4 по модулю 5. Пусть $\Delta \subset \Gamma$ — подмножество, которое для каждого своего элемента содержит и обратный к нему. Тогда $|\Delta| = 2$ или 4. Обозначим через f автоморфизм поля P, задаваемый возведением в степень p. Нетрудно заметить, что при $p \equiv 4 \pmod 5$ преобразование f сохраняет Δ, а при $p \equiv 2 \pmod 5$ или $p \equiv 3 \pmod 5$ автоморфизм f сохраняет Δ лишь при $\Delta = \Gamma$, а в других случаях переводит его в множество, состоящее из квадратов элементов множества Δ. Теперь из леммы 4 вытекают следующие факты о множестве $S(\xi)$:

- $1 \in S(\xi)$ тогда и только тогда, когда либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_1$ и $p \equiv 4 \pmod 5$ или t четно, либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_2$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ и t нечетно;
- $\Gamma \subset S(\xi)$ тогда и только тогда, когда либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_1$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ и t нечетно, либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_2$.

Пусть $\psi \neq \xi$. Рассуждая, как ранее, легко заметить, что $1 \in S(\psi)$, если $\Gamma \subset S(\xi)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\omega(\psi_t) \in \Omega_1$ и t четно или $p \equiv 4 \pmod 5$. В этой ситуации $S(\xi) = \{1, \gamma^2, \gamma^{-2}\}$. Выберем минимальное натуральное число u такое, что $u > t$ и $\omega(\psi_u) \neq 0$. Положим $\chi = \psi_0 \otimes Fr^t \circ \psi_t \otimes Fr^u \circ \psi_u$. Так как $\omega(\psi_u) \in \Omega$, то $\Gamma \subset S(\chi)$. Поэтому $1 \in S(\psi)$

при $\psi \neq \chi$. Пусть $\psi = \chi$. Ясно, что $1 \in S(\psi)$, если $1 \in S(\psi_u)$. Поскольку $\omega(\psi_u) \in \Omega$, остается рассмотреть случай, когда $\omega(\psi_u) \in \Omega_1$. Нетрудно проверить, что в этой ситуации $1 \in S(\psi)$ в точности тогда, когда $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ и u нечетно. Итак, все возможности для представления ψ рассмотрены. Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно вспомнить, как связаны представления φ и ψ. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть выполняются условия теоремы. Далее система весов группы $A_1(K)$ естественным образом отождествляется с множеством целых чисел с помощью отображения $a\omega_1 \to a$. Ясно, что $\varphi(h)$ имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда у φ есть вес вида bk, где b — неотрицательное целое число. Пусть φ_j — неприводимое представление группы G со старшим весом a_j, где $0 \leq j \leq l-1$. Из цитированной во введении теоремы Стейнберга о тензорном произведении следует, что

$$\Lambda(\varphi) = \Big\{ \sum_{j=0}^{l-1} p^j \lambda_j \mid \lambda_j \in \Lambda(\varphi_j) \Big\}.$$

Известно (например, это легко вытекает из описания неприводимых представлений группы $SL_2(p)$ в [9, § 8 и 9]), что

$$\Lambda(\varphi_j) = \big\{ c \mid c \equiv a_j \pmod 2, -a_j \leq c \leq a_j \big\}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

П р и м е р. Пусть $n = 2$, $q = 2^7$ и $m = 43$. Ясно, что если φ и ψ — представления из Irr_q со старшими весами a и $2^t a$, то $\varphi(h)$ и $\psi(h)$ одновременно имеют или не имеют неподвижные точки. Поэтому достаточно определить представления из Irr_q с нечетными старшими весами, где образ элемента h действует без неподвижных точек. Список таких весов следующий:

$$1, 3, \ldots, 41, 49, 51, 57, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 81, 83, 89, 97, 99, 101, 103, 105, 113, 115, 121.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
2. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. **Кондратьев А.С.** О конечных группах с небольшим простым спектром // Мат. форум (Итоги науки. Юг России). Владикавказ, 2012. Т. 6: Группы и графы. С. 56–74.
4. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7).
5. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 263 с.
6. **Супруненко И.Д.** Сохранение систем весов неприводимых представлений алгебраической группы и алгебры Ли типа A_l с ограниченными старшими весами при редукции по модулю p // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1983. № 2. С. 18–22.
7. **Fleischmann P., Lempken W., Zalesskii A.E.** Linear groups over $GF(2^k)$ generated by a conjugacy class of a fixed point free element of order 3 // J. Algebra. 2001. Vol. 244, no. 2. P. 631–663.
8. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.
9. **Humphreys J.E.** Representations of $SL(2,p)$ // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82, no. 1. P. 21–39.
10. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
11. **Steinberg R.** Representations of algebraic groups // Nagoya Math. J. 1963. Vol. 22. P. 33–56.
12. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. (3) 1973. Vol. 26, no. 4. P. 653–680.
13. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
14. **Wilson R.** Certain representations of Chevalley groups over $CF(2^n)$ // Comm. Algebra. 1975. Vol. 3, no. 4. P. 319–364.

15. **Zalesski A.E.** On eigenvalues of group elements in representations of algebraic groups and finite Chevalley groups // Acta Appl. Math. 2009. Vol. 108, no. 1. P. 175–195.
16. **Zavarnitsine A.V.** Fixed points of large prime-order elements in the equicharacteristic action of linear and unitary groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 333–340.

Поступила 07.07.2013

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Осиновская Анна Александровна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: anna@im.bas-net.by

Супруненко Ирина Дмитриевна
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: suprunenko@im.bas-net.by