М. Б. Менский, О квантовых пределах измеримости электромагнитного поля,
ТМФ, 1989, том 80, номер 1, 29–39

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 80, № 1
июль, 1989

О КВАНТОВЫХ ПРЕДЕЛАХ ИЗМЕРИМОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Менский М. Б.

Метод интегрирования по конфигурациям поля применен к проблеме нахождения квантовых ограничений на измеримость напряженности электромагнитного поля. Показано, что существуют два различных определения напряженности, совпадающие в классической теории, но различающиеся в квантовой. Этому соответствуют две различные схемы измерения. В одном случае абсолютных квантовых пределов измеримости не существует, но измерение не дает достоверной информации о внутреннем состоянии поля (а лишь о внешних классических воздействиях на него). Во втором случае измерение дает информацию о внутреннем состоянии поля, но ограничено квантовым пределом. В свете полученных результатов обсуждаются классические работы Ландау – Пайерлса и Бора – Розенфельда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос об измеримости электромагнитного поля имеет давнюю историю, начиная с классических работ Ландау и Пайерлса (ЛП) [1] и Бора и Розенфельда (БР) [2]. Эти первые работы по видимости противоречат друг другу, т. к. в работе ЛП получены абсолютные квантовые ограничения на измеримость поля, а в работе БР утверждается, что абсолютных пределов не существует и напряженность можно измерить с любой сколь угодно высокой точностью. В многочисленных последующих работах на эту тему обычно признавалось, что БР правы, а ЛП ошибались, вернее, основывались не на самой лучшей схеме измерения (см., например, [3—5]).

В работе [6] автор применил к этой классической задаче разработанный ранее [7—10] подход к квантовой теории непрерывных и континуальных измерений, основанный на интегрировании по путям или конфигурациям поля. Вычисления в рамках этого подхода показали существование абсолютных квантовых пределов измеримости, что согласовывалось с выводами ЛП. В настоящей работе мы проанализируем эту проблему более тщательно и покажем, что результат вычислений существенно зависит от того, какое из двух возможных определений напряженности электромагнитного поля использовать [1]. При одном определении вычисления приводят к абсолютному квантовому пределу измеримости, при другом — нет. При этом нельзя сказать, что лишь одно из определений является правильным или что одно из них имеет преимущество. Скорее, эти два определения, совпадающие в классическом пределе, оба име-

[1] Эти результаты были доложены автором на Международном семинаре по обработке и анализу гравитационно-волнового сигнала, Амальфи, Италия, 1–5 июля 1988 г.

ют смысл в квантовой теории, и необходимо каждый раз тщательно анализировать, какое из них следует применять. Разумеется, различным формальным определениям соответствуют и различные процедуры измерения напряженности.

Анализ, который будет проведен ниже, показывает, что одно из определений напряженности устроено так, что напряженность непосредственно характеризует состояние поля. И при измерении такой именно «истинной» напряженности возникает квантовый предел, так что внутреннее состояние поля нельзя оценить с неограниченной точностью. Что касается второго определения напряженности, то напряженность в этом втором смысле может быть измерена сколь угодно точно, абсолютных квантовых пределов на ее измеримость нет. Но такая напряженность характеризует внутреннее состояние поля лишь косвенно и как раз при высокой точности измерений может существенно отличаться от «истинной» напряженности поля. Зато эта неограниченно измеримая напряженность может с успехом использоваться для оценки внешних влияний на электромагнитное поле (например, для оценки классических полей, взаимодействующих с ним).

Если говорить об оценке работ ЛП [1] и БР [2] с этой точки зрения, то приходится признать, что истинного противоречия между этими работами нет. Просто в них речь идет о разных понятиях, названных одним и тем же термином (напряженность электромагнитного поля). На самом деле эти понятия в рамках квантовой теории (и в связи с достаточно точными измерениями, для которых квантовые эффекты существенны) следует различать. Различие между двумя смыслами понятия «напряженность поля» аналогично более знакомому различию между величинами импульса (p) и скорости (mv) квантовой частицы.

В работах ЛП и БР изучалось измерение напряженности поля, усредненной по некоторой пространственно-временной области. Эта задача будет рассмотрена в разделе 5. В разделах 2—4 детально анализируется другой, хотя и близкий, тип измерения: измерение напряженности в каждой точке этой области.

2. ПОТОЧЕЧНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯ — ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем основывать анализ измеримости электромагнитного поля на следующем интеграле по конфигурациям этого поля [11]:

$$(1)\qquad \mathcal{A}=\int d[A]\,d[F]\exp\left\{i\int_{\Omega} d^4x L(A,F)\right\},$$

где

$$(2)\qquad L={}^1/_4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-{}^1/_2F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)$$

— лагранжиан электромагнитного поля и

$$d[A]=\delta(\partial_\mu A^\mu)\prod_{\mu,x}dA_\mu(x),\qquad d[F]=\prod_{\mu,\nu,x}dF_{\mu\nu}(x)$$

— мера функционального интегрирования по конфигурациям поля. Амплитуда (1) может иметь тот или иной физический смысл в зависимости от выбора пространственно-временной области Ω и условий, наложенных на конфигурации поля $[A, F]$ на границе $\partial\Omega$ этой области.

Для исследования процедуры измерения мы введем вместо (1) амплитуду

$$\mathcal{A}_{[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]} = \int d[A]\, d[F] \exp\left\{i \int_{\Omega} d^4x L(A, F)\right\} w_{[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]}[A, F]. \tag{3}$$

Здесь $[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]$ – конфигурация напряженностей $\vec{\mathscr{E}}(x)$, $\vec{\mathscr{B}}(x)$ электрического и магнитного полей в области Ω, полученная в качестве результата измерения, а $w_{[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]}$ – весовой функционал, который описывает измерение. Это значит, что значение $w_{[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]}[A, F]$ приблизительно равно единице для всех конфигураций поля $[A, F]$, которые согласуются с результатом измерения $[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]$, и близко к нулю для тех конфигураций поля, которые не соответствуют результату измерения. Ω теперь означает область, в которой производятся измерения. Условия, налагаемые на конфигурации $[A, F]$ на границах этой области, выражают дополнительную информацию, имеющуюся о поле и получаемую с помощью дополнительных измерений, проводимых непосредственно перед тем, как начинается измерение поля, непосредственно после этого, а также на границах объема измерения в течение всего времени измерения.

Следует уточнить, что означает соответствие конфигурации поля $[A, F]$ результату измерения $[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]$. По смыслу такого соответствия напряженность поля, определяемая конфигурацией $[A, F]$, должна быть близка к той, которая непосредственно задается функциями $\vec{\mathscr{E}}(x)$, $\vec{\mathscr{B}}(x)$. Насколько она должна быть близка, зависит от того, какова точность измерения. Это должно задаваться специальными параметрами ΔE, ΔB. Однако вопрос о том, какая напряженность соответствует конфигурации $[A, F]$, может иметь два различных ответа, т. к. напряженность можно определить через компоненты поля $F_{\mu\nu}$ или через компоненты ротора поля A_μ. Эти две возможности описываются соответственно формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A &= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2,\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3,\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1), \\ \mathbf{B}_A &= (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0,\ \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0,\ \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) \end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\mathbf{E}_F = (F_{23}, F_{31}, F_{12}), \quad \mathbf{B}_F = (F_{01}, F_{02}, F_{03}). \tag{5}$$

Таким образом, соответствие конфигурации $[A, F]$ результату измерения $[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]$ можно понимать как близость (с точностью до ΔE, ΔB) конфигурации $[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]$ к $[\mathbf{E}_A, \mathbf{B}_A]$ или альтернативно к $[\mathbf{E}_F, \mathbf{B}_F]$.

Подчеркнем, что этой альтернативы не существует в классической теории, т. к. в ней справедливы уравнения поля и поэтому $\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_F$, $\mathbf{B}_A = \mathbf{B}_F$. В квантовой же теории эти равенства, вообще говоря, не выполняются. В частности, в функциональном интеграле (1) или (3) фигурируют не только те конфигурации $[A, F]$, которые удовлетворяют классическим уравнениям поля, но и все остальные. Правда, наибольший вклад в интеграл вносят лишь конфигурации, близкие к классической конфигурации поля. Этот факт проявляется в том, что обсуждаемая сейчас альтернатива исчезает, когда измерения являются достаточно грубыми, т. е. когда погрешности измерения ΔE, ΔB велики. Мы убедимся в этом в результате вычислений.

Отмеченная альтернатива в определении напряженности приводит к тому, что функционал $w_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]}$ можно выбрать двумя различными способами:

$$w^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]}[A, F] = \exp\left\{-\frac{1}{\omega}\int_\Omega d^4x\left[\frac{(\vec{\mathscr{E}} - \mathbf{E}_A)^2}{\Delta E^2} + \frac{(\vec{\mathscr{B}} - \mathbf{B}_A)^2}{\Delta B^2}\right]\right\} \tag{6}$$

или

$$w^E_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]}[A, F] = \exp\left\{-\frac{1}{\omega}\int_\Omega d^4x\left[\frac{(\vec{\mathscr{E}} - \mathbf{E}_F)^2}{\Delta E^2} + \frac{(\vec{\mathscr{B}} - \mathbf{B}_F)^2}{\Delta B^2}\right]\right\}. \tag{7}$$

Здесь $\omega = \int_\Omega d^4x$ — мера (4-мерный объем) пространственно-временной области Ω, в которой производится измерение, ΔE, ΔB — погрешности, с которыми измеряются электрическое и магнитное поля.

При подстановке в (3) функционала (6) интегрирование ведется лишь по тем конфигурациям поля $[A, F]$, для которых ротор потенциала A_μ близок к конфигурации напряженности $[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]$, полученной в результате измерения. При таком определении амплитуды (3) она описывает измерение ротора потенциала. Если же мы подставим в интеграл (3) выражение (7) для весового функционала, то в интегрировании будут участвовать лишь те конфигурации $[A, F]$, для которых тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ близок к $[\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{B}}]$. Так определенная амплитуда будет описывать измерение тензора напряженности. Еще раз повторим, что при достаточно точных измерениях, когда существенны квантовые эффекты, измерение тензора напряженности $F_{\mu\nu}$ — это не то же самое, что измерение ротора потенциала $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

3. ПОТОЧЕЧНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯ — РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сначала измерение напряженности, определенной в соответствии с формулой (4) как ротор потенциала. Для этого выберем функционал (6) и, подставив его в (3), получим амплитуду $\mathscr{A}^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]}$. Поскольку функционал $w^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]}[A, F]$ фактически не зависит от $[F]$, интеграл по $d[F]$ в (3) можно вычислить явно, и для амплитуды получаем выражение (числовой множитель опускаем)

$$\mathscr{A}^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]} = \int d[A]\exp\left\{i\int d^4x L(A)\right\} w^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]}[A], \tag{8}$$

где $L(A) = -{}^1/_4(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$. Эта амплитуда подробно исследована в работе [6], где показано, что она дает для распределения вероятности результатов измерения $P^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]} = |\mathscr{A}^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]}|^2$ выражение, равное (с точностью до множителя)

$$P^A_{[\vec{\mathscr{E}},\, \vec{\mathscr{B}}]} = \exp\left\{-\frac{2}{\omega}\int_\Omega d^4x\left[\frac{(\vec{\mathscr{E}} - \vec{\mathscr{E}}_{\text{class}})^2}{\Delta E^2 + \dfrac{4}{\omega^2\Delta E^2}} + \frac{(\vec{\mathscr{B}} - \vec{\mathscr{B}}_{\text{class}})^2}{\Delta B^2 + \dfrac{4}{\omega^2\Delta B^2}}\right]\right\}. \tag{9}$$

Здесь $[\vec{\mathscr{E}}_{\text{class}}, \vec{\mathscr{B}}_{\text{class}}]$ — классическая конфигурация поля в области Ω, соответствующая заданным на границе этой области условиям.

Мы видим из формулы (9), что конфигурация поля $[\vec{\mathscr{E}}, \mathscr{B}]$, которая получается в результате измерения, может отличаться от классической конфигурации $[\vec{\mathscr{E}}_{\text{class}}, \vec{\mathscr{B}}_{\text{class}}]$, но это отличие не может быть сколь угодно велико, а ограничено условиями

$$(10)\qquad \frac{1}{\omega}\int_\Omega d^4x\,(\vec{\mathscr{E}}-\vec{\mathscr{E}}_{\text{class}})^2<\delta E^2,\qquad \frac{1}{\omega}\int_\Omega d^4x\,(\vec{\mathscr{B}}-\vec{\mathscr{B}}_{\text{class}})^2<\delta B^2,$$

где

$$(11)\qquad \delta E^2=\Delta E^2+\Delta E_{\text{opt}}^4/\Delta E^2,\qquad \delta B^2=\Delta B^2+\Delta B_{\text{opt}}^4/\Delta B^2,$$

$$(12)\qquad \Delta E_{\text{opt}}^2=\Delta B_{\text{opt}}^2=2/\omega.$$

Формулы (11) показывают, что в пределе грубых измерений, $\Delta E\gg\gg\Delta E_{\text{opt}}$, $\Delta B\gg\Delta B_{\text{opt}}$, разброс результатов измерений совпадает с погрешностью измерений: $\delta E=\Delta E$, $\delta B=\Delta B$. Это классический режим измерений, в котором квантовые эффекты несущественны. Если измерения являются достаточно точными, $\Delta E\ll\Delta E_{\text{opt}}$, $\Delta B\ll\Delta B_{\text{opt}}$, то $\delta E=\Delta E_{\text{opt}}^2/\Delta E$, $\delta B=\Delta B_{\text{opt}}^2/\Delta B$, так что разброс тем больше, чем точнее измерения. Это квантовый режим измерения. Его парадоксальный характер определяется неустранимым обратным влиянием измерительной аппаратуры, которое тем больше, чем точнее измерение.

На границе классического и квантового режимов реализуется оптимальный режим, $\Delta E=\Delta E_{\text{opt}}$, $\Delta B=\Delta B_{\text{opt}}$, при котором разброс достигает минимума, равного

$$(13)\qquad \delta E_{\min}=\sqrt{2}\,\Delta E_{\text{opt}},\qquad \delta B_{\min}=\sqrt{2}\,\Delta B_{\text{opt}}.$$

Если пространственный и временной размеры области Ω суть l и τ, то $\omega=\tau l^3$. В этом случае для $\delta E_{\min}=\delta B_{\min}$ получаем выражение $2/(\tau l^3)^{1/2}$, или в обычных единицах измерения

$$(14)\qquad \delta E_{\min}=\delta B_{\min}=2(\hbar/\tau l^3)^{1/2}.$$

Формулы (13), (14) определяют абсолютные ограничения на измеримость поля, неизбежно возникающие, если измеряется напряженность поля, понимаемая как ротор потенциала (4).

Эти ограничения согласуются с теми, которые были получены в работе ЛП [1], но мы вывели их в предположении, что напряженность поля измеряется в каждой точке пространственно-временной области Ω, тогда как в работе [1] рассматривалось измерение поля, усредненного по области Ω. Ниже мы увидим, что для измерения среднего поля получаются данным методом точно такие же ограничения. Теперь же рассмотрим еще раз поточечное измерение напряженности, но примем, что напряженность определяется другим способом — через компоненты тензора напряженности (5).

Пусть напряженность поля определяется при помощи формулы (5). Для расчета измерения такой величины в выражение для амплитуды (3) следует подставить весовой функционал вида (7). Можно показать, что в этом случае распределение вероятностей $P^F_{[\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{B}}]} = |\mathscr{A}^F_{[\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{B}}]}|^2$ приобретает вид

$$(15)\qquad P^F_{[\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{B}}]} = \exp\left\{-\frac{1}{\omega}\int\limits_{\Omega} d^4x\left[\frac{(\vec{\mathscr{E}}-\vec{\mathscr{E}}_{\mathrm{class}})^2}{\Delta E^2}+\frac{(\vec{\mathscr{B}}-\vec{\mathscr{B}}_{\mathrm{class}})^2}{\Delta B^2}\right]\right\}.$$

Из этой формулы видно, что конфигурация электрического поля $[\vec{\mathscr{E}}]$, полученная в результате измерения, может отличаться от классической конфигурации $[\vec{\mathscr{E}}_{\mathrm{class}}]$ на величину порядка ΔE. Аналогично результат измерения магнитного поля $[\vec{\mathscr{B}}]$ может отличаться от конфигурации классической $[\vec{\mathscr{B}}_{\mathrm{class}}]$ не более чем на ΔB (отличие понимается в смысле среднего квадратичного). Таким образом, разброс результатов измерения определяется в данном случае лишь погрешностью измерительного прибора, и квантовые эффекты несущественны. При уменьшении погрешностей измерения ΔE, ΔB можно сделать разброс сколь угодно малым. Поэтому в данном случае не возникает абсолютных ограничений на измеримость напряженности поля, что согласуется с выводами работы БР [2].

Таким образом, мы видим, что в рамках квантовой теории напряженность электромагнитного поля можно определить двумя способами: через ротор потенциала (4) и через тензор напряженности (5). В первом случае возникает абсолютное ограничение на измеримость напряженности (13), (14), что согласуется с выводами Ландау и Пайерлса; во втором случае таких ограничений не возникает, что согласуется с выводами Бора и Розенфельда. Попытаемся показать, что это совпадение не случайно. Для этого проанализируем оба типа измерения иначе, включив в явное рассмотрение некоторую упрощенную схему измерительного прибора.

4. ПОТОЧЕЧНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯ — ЯВНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЯ

Обычно для анализа измерительной процедуры в квантовой механике используют некоторую простую модель чувствительного элемента прибора, или, как ее иногда называют, квантовой считывающей системы (в англоязычной литературе используется термин meter — измеритель). Чисто классическую часть прибора при этом явно не рассматривают. Связь прибора с измеряемой системой описывают лагранжианом взаимодействия, который пропорционален произведению измеряемой величины и координаты квантовой считывающей системы (измерителя). В интересующем нас случае измеряемой величиной является поле, поэтому роль координаты измерителя должно играть также некоторое поле. Обозначим его через $G^{\mu\nu}(x)$. Лагранжиан измерителя обозначим через $L_G(G)$. Тогда полный лагранжиан, описывающий измерение, имеет вид

$$(16)\qquad L_A(A,\ F,\ G) = L(A,\ F) + g(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)G^{\mu\nu} + L_G(G),$$

если измерению подвергается ротор потенциала, и

(17) $$L_F(A, F, G)=L(A, F)+gF_{\mu\nu}G^{\mu\nu}+L_G(G),$$

если измеряется тензор напряженности.

Чтобы сравнить две схемы измерения, перейдем от лагранжианов (16), (17) к эквивалентным им лагранжианам, содержащим лишь потенциал A_μ и поле $G^{\mu\nu}$, но не содержащим тензора $F_{\mu\nu}$:

(18) $$L_A(A, G)=L(A)+g(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)G^{\mu\nu}+L_G(G),$$

(19) $$L_F(A, G)=L(A)+g(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)G^{\mu\nu}+L_G(G)-g^2G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}.$$

Эти лагранжианы различаются лишь на член, квадратичный по координате измерителя:

$$L_F(A, G)-L_A(A, G)=-g^2G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}.$$

Это вполне аналогично тому, чем отличаются измерительные схемы ЛП и БР. Отличие это отчетливо видно, например, из анализа, проведенного в работе де Витта [3]. Оно заключается в том, что для «компенсации» некоторых погрешностей измерения БР вводят по сравнению с ЛП дополнительный квадратичный член в лагранжиан измерителя.

Таким образом, мы можем дать работам ЛП [1] и БР [2] следующую интерпретацию: в схеме, предложенной ЛП, измеряется ротор потенциала $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$, причем это измерение ограничено абсолютным пределом (13), (14); в схеме БР измеряется тензор напряженности $F_{\mu\nu}$, при этом абсолютных ограничений измеримости нет.

Отсюда на первый взгляд можно сделать вывод, что схема БР более совершенна, что и предполагается большинством авторов, обсуждавших данный вопрос [3—5]. Однако внимательный анализ позволяет выяснить, что это утверждение не является абсолютным, а зависит от точки зрения, точнее, от целей, которые преследуются при измерении электромагнитного поля.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда измерение напряженности электромагнитного поля не является самоцелью, а используется для оценки некоторого другого поля, находящегося во взаимодействии с электромагнитным. Обозначим это поле, скажем, через Ф. Измерение как ротора потенциала $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$, так и тензора напряженности $F_{\mu\nu}$ позволяет дать некоторую оценку для Ф. Поскольку ротор потенциала может быть измерен лишь с точностью не более чем (13), (14), ограничения появляются и в оценке поля Ф. При измерении тензора напряженности таких ограничений не возникает. Конечно, могут возникнуть ограничения за счет квантовых свойств самого поля Ф. Однако до тех пор пока квантовыми свойствами поля Ф можно пренебречь, оценка его при помощи измерения $F_{\mu\nu}$ может быть сколь угодно точной. Таким образом, измерение тензора напряженности имеет преимущество (перед измерением ротора потенциала) в случае, если целью измерения является оценка внешнего классического поля (иначе говоря, косвенное измерение этого поля).

Однако возможна и другая ситуация, когда измерение напряженности электромагнитного поля является самоцелью, т. е. экспериментатор желает оценить состояние самого этого поля. В этом случае важно помнить, что ротор потенциала $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ описывает состояние электромагнитного поля непосредственно, является его кинематической характеристикой.

Измеряя ротор потенциала, мы непосредственно оцениваем внутреннее состояние поля, и квантовый предел (13), (14) показывает, до какой степени это внутреннее состояние допускает объективную оценку.

Тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ характеризует внутреннее состояние поля косвенно, поскольку он как динамическая величина связан с ротором потенциала. Поэтому при измерении тензора напряженности мы можем оценить внутреннее состояние поля лишь опосредованно: по результату измерения $F_{\mu\nu}$ оцениваем величину $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, что и дает в конце концов сведения о состоянии поля. Из лагранжиана (17) следует, что тензор напряженности и ротор потенциала связаны уравнением

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} + 2gG_{\mu\nu}.$$

Таким образом, измерение тензора $F_{\mu\nu}$ позволяет оценить ротор $\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$ лишь с точностью

$$\delta(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu) = \delta F_{\mu\nu} + 2g\delta G_{\mu\nu}.$$

Для уменьшения $\delta F_{\mu\nu}$ необходимо увеличивать константу связи g, но при этом возрастает член $2g\delta G_{\mu\nu}$. Выбор оптимального значения константы связи приводит к тому, что погрешность оценки ротора потенциала имеет порядок $\delta G_{\mu\nu}$. Но измерение поля $G_{\mu\nu}$ также имеет квантовые пределы, что не позволяет сделать $\delta G_{\mu\nu}$ сколь угодно малым. Таким образом, оценка внутреннего состояния электромагнитного поля посредством тензора $F_{\mu\nu}$ наталкивается на квантовые ограничения, как и в случае, когда измеряется ротор потенциала.

Чтобы предыдущее рассуждение было более ясным, учтем, что отсутствие квантовых пределов на измеримость $F_{\mu\nu}$ следует из лагранжиана (17) в силу того, что ошибка $\delta F_{\mu\nu}$ может быть сделана сколь угодно малой при помощи увеличения константы связи g, даже если ошибка $\delta G_{\mu\nu}$ остается конечной. Как мы только что видели, для точной оценки ротора $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ это ничего не дает.

Окончательный вывод из сказанного можно сформулировать следующим образом. Схема измерения типа ЛП позволяет непосредственно оценить внутреннее состояние электромагнитного поля, но при этом возникает абсолютный квантовый предел (13), (14). Схема измерения типа БР позволяет оценить с любой степенью точности тензор напряженности $F_{\mu\nu}$, а через него — конфигурацию классического поля, взаимодействующего с электромагнитным. Но оценка внутреннего состояния самого электромагнитного поля при этом все равно наталкивается на квантовые ограничения. Можно думать, что они описываются теми же формулами (13), (14), хотя этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Хотя при анализе мы сравнивали наши результаты с результатами ЛП [1] и БР [2], на самом деле мы изучили здесь поточечное измерение поля в пространственно-временной области Ω. Рассмотрим теперь задачу об измерении среднего поля в этой области, т. е. в точности тот тип измерений, который рассматривали ЛП и БР.

5. ИЗМЕРЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

В работах [1, 2] изучалось на самом деле не поточечное измерение напряженности в области Ω, а измерение напряженности, усредненной по такой области. Рассмотрим такой тип измерения в рамках нашего подхода. Пусть при измерении средней напряженности электрического поля получается величина $\vec{\mathscr{E}}$ (теперь это единственный вектор, а не векторное поле), а при измерении средней напряженности магнитного поля получается величина $\vec{\mathscr{B}}$. Если напряженность понимается как ротор потенциала (4), то это значит, что величины

$$\langle \mathbf{E}_A\rangle=\omega^{-1}\int_\Omega \mathbf{E}_A\, d^4x, \qquad \langle \mathbf{B}_A\rangle=\omega^{-1}\int_\Omega \mathbf{B}_A\, d^4x$$

близки соответственно к $\vec{\mathscr{E}}$ и $\vec{\mathscr{B}}$. Следовательно, при описании такого измерения можно использовать весовой функционал

$$w^A_{\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{B}}}[A,F]=\exp\left[-\frac{(\vec{\mathscr{E}}-\langle \mathbf{E}_A\rangle)^2}{\Delta E^2}-\frac{(\vec{\mathscr{B}}-\langle \mathbf{B}_A\rangle)^2}{\Delta B^2}\right]. \tag{20}$$

Если же напряженность определяется через тензор напряженности (5), то в качестве функционала следует выбрать

$$w^F_{\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{B}}}[A,F]=\exp\left[-\frac{(\vec{\mathscr{E}}-\langle \mathbf{E}_F\rangle)^2}{\Delta E^2}-\frac{(\vec{\mathscr{B}}-\langle \mathbf{B}_F\rangle)^2}{\Delta B^2}\right], \tag{21}$$

где

$$\langle \mathbf{E}_F\rangle=\omega^{-1}\int_\Omega \mathbf{E}_F\, d^4x, \qquad \langle \mathbf{B}_F\rangle=\omega^{-1}\int_\Omega \mathbf{B}_F\, d^4x.$$

При вычислении амплитуды (3) с такими функционалами и последующем переходе от амплитуды к плотности вероятности получаются соответственно

$$P^A_{\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{B}}}=\exp\left\{-2\,\frac{(\vec{\mathscr{E}}-\langle\vec{\mathscr{E}}_{\text{class}}\rangle)^2}{\Delta E^2+4/\omega^2\Delta E^2}-2\,\frac{(\vec{\mathscr{B}}-\langle\vec{\mathscr{B}}_{\text{class}}\rangle)^2}{\Delta B^2+4/\omega^2\Delta B^2}\right\}, \tag{22}$$

$$P^F_{\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{B}}}=\exp\left\{-\frac{(\vec{\mathscr{E}}-\langle\vec{\mathscr{E}}_{\text{class}}\rangle)^2}{\Delta E^2}-\frac{(\vec{\mathscr{B}}-\langle\vec{\mathscr{B}}_{\text{class}}\rangle)^2}{\Delta B^2}\right\}. \tag{23}$$

Анализ этих вероятностных распределений аналогичен тому, который был проведен выше для распределений (9), (15). Ясно, что этот анализ приводит к аналогичному выводу: измеримость средних напряженностей $\langle \mathbf{E}_A\rangle$, $\langle \mathbf{B}_A\rangle$ ограничена пределами (13), (14), тогда как величины $\langle \mathbf{E}_F\rangle$, $\langle \mathbf{B}_F\rangle$ можно измерить с любой степенью точности (абсолютных пределов в этом случае не существует). Очевидно, что полученные таким образом выводы согласуются с выводами работ ЛП [1] и БР [2], соответственно. Но чтобы эта аналогия стала более обоснованной, необходимо рассмотреть измерительную систему более явным образом.

Запишем действие, описывающее измеряемую систему, измеритель и их взаимодействие, в виде

$$S_A=\int d^4x L(A,F)+g\langle F_{\mu\nu}{}^A\rangle G^{\mu\nu}+S_G(G) \tag{24}$$

для случая, когда измеряется средняя напряженность, определенная с помощью ротора потенциала (4). Здесь обозначено $F_{\mu\nu}{}^A=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$. Если же измеряется средняя напряженность, определенная через тензор напряженности (5), соответствующее действие запишем в виде

$$S_F=\int d^4xL(A,F)+g\langle F_{\mu\nu}\rangle G^{\mu\nu}+S_G(G). \tag{25}$$

Чтобы сравнить динамику этих двух систем, исключим из этих действий тензор $F_{\mu\nu}$, используя уравнение поля. Для действия (24) получаем непосредственно

$$S_A'=\int d^4xL(A)+g\langle F_{\mu\nu}{}^A\rangle G^{\mu\nu}+S_G(G). \tag{26}$$

Чтобы аналогичным образом преобразовать действие (25), необходимо сначала перейти от переменных $F_{\mu\nu}(x)$ к переменным $F_{\mu\nu}{}^0(x)=F_{\mu\nu}(x)-\langle F_{\mu\nu}\rangle$ и $\langle F_{\mu\nu}\rangle$. Для них получаем уравнения, следующие из формы действия, и с помощью этих уравнений исключаем эти переменные. В результате получается действие вида

$$S_F'=\int d^4xL(A)+g\langle F_{\mu\nu}{}^A\rangle G^{\mu\nu}+S_G(G)-\frac{g^2}{\omega}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \tag{27}$$

Действия (26) и (27) записаны в одних и тех же переменных и позволяют сравнить динамику этих переменных в двух системах. Отличие двух действий равно

$$S_F'-S_A'=-(g^2/\omega)G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \tag{28}$$

Следовательно, во второй из двух рассмотренных схем измерения появляется добавка, квадратичная по координате $G_{\mu\nu}$ измерителя. Эта добавка представляет собой не что иное, как компенсационный член, отличающий схему измерения БР от схемы ЛП (см. [2, 3]).

Относительно измерения среднего поля можно повторить тот анализ, который был проделан в конце предыдущего раздела для случая поточечного измерения поля. Вывод состоит в том, что при оценке внутреннего состояния поля квантовые ограничения (13), (14) преодолеть нельзя.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода функционального интегрирования мы рассмотрели задачу о расчете процесса измерения электромагнитного поля в двух режимах: измерение поля, усредненного по некоторой пространственно-временной области, и поточечное измерение поля в этой области. Оказывается, что с учетом квантовых эффектов следует четко различать измерение ротора потенциала $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ (кинетической напряженности) и измерение тензора напряженности $F_{\mu\nu}$ (динамической напряженности). По-видимому, именно это различие лежит в основе кажущегося противоречия между работами ЛП [1] и БР [2]. Измерение ротора потенциала позволяет оценить внутреннее состояние поля, но при этом возникают абсолютные квантовые ограничения (13), (14). Измерение тензора напряженности может быть сколь угодно точным, но оно не позволяет оценить внутреннее состояние поля (хотя может быть с успехом использовано для оценки классического поля, взаимодействующего с электромагнитным).

Различие между двумя величинами, которые на первый взгляд кажутся тождественными и которые действительно совпадают в классическом пределе, возникает и в других случаях. Хорошо известный и гораздо более простой пример такой ситуации — это различие между динамическим p и кинематическим $mv=m\dot{x}$ импульсами свободной частицы. Можно показать, что в этом случае возникает аналогичная ситуация при слежении за этими величинами на конечном интервале времени (мониторинге): слежение за динамическим импульсом можно производить с любой точностью, но это не позволяет оценить внутреннее состояние частицы, а слежение за кинематическим импульсом (характеризующим внутреннее состояние частицы) наталкивается на абсолютные квантовые ограничения.

Литература

[1] *Landau L., Peierls R.* // Zs. Phys. 1931. V. 69. P. 56 (Перевод: Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. I. М.: Наука, 1969. С. 56–70).
[2] *Bohr N.* // Kgl. Danske Videnskab Selskab., Math.-Fys. Medd. 1933. V. 12. № 8. P. 3–65 (Перевод: Бор Н. Избранные научные труды. т. II. М.: Наука, 1971. С. 120–162).
[3] *DeWitt B. S.* Dynamical theory of groups and fields. // Relativity, Groups, and Topology. London and Glasgaw: Blackie and Son. 1964. P. 598–615 (Перевод: Де Витт Б. С. Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987).
[4] *Bergmann P. G., Smith G. J.* // General Relativity and Gravitation. 1982. V. 14. № 12. P. 1131–1166.
[5] *Borzeszkowski H.-H. von.* The Meaning of Quantum Gravity. Dordrecht a. o.: D. Reidel Publishing Co., 1988.
[6] *Mensky M. B.* // Ann. der Phys. 1988. V. 45. № 3. P. 215–221.
[7] *Menský M. B.* // Phys. Rev. 1979. V. D20. № 2. P. 384–387.
[8] *Менский М. Б.* // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. № 4. С. 1326–1339.
[9] *Менский М. Б.* Группа путей: измерения, поля, частицы. М.: Наука, 1983.
[10] *Mensky M. B.* On quantum theory of measurements of gravitational field. // Proc. 3d Sem. on Quantum Gravity, Moscow, 1984. Singapore: World Scientific, 1985. P. 188–204.
[11] *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984.

Всесоюзный
научно-исследовательский центр
по изучению свойств поверхности
и вакуума

Поступила в редакцию
14.IV.1987 г.,
после доработки
26.XI.1988 г.

ON QUANTUM LIMITS OF MEASURABILITY OF ELECTROMAGNETIC FIELD

Mensky M. B.

The method of integration over field configurations is applied to the problem of finding quantum restrictions on measurability of electromagnetic field strength. It is shown that there exist two different definitions of the field strength which coincide in classical theory but are distinct in quantum theory. They also correspond to different measurement schemes. In one case no absolute quantum limit exists but the corresponding measurement does not supply reliable information about the internal state of the field (but only about the external classical influence on the field). In the second case the measurement provides information about the internal state of the field but is restricted by quantum limit. Classical works by Landau and Peierls and Bohr and Rosenfeld are discussed in the light of the results obtained.