Т е о р е м а 3. *Имеет место точная оценка* $\rho(0, \|A(f)\|) \leqslant c(\mathbf{0}, \varphi)$, *где* $\varphi = \{f, z\}$ *в* Δ^*. *Отсюда для любых* $f \in \Sigma(k)$ *и* $x = (x_n) \in l^2$

$$(6) \quad \left| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\, \alpha_{mn}(f)\, x_m x_n \right|^2 \leqslant \operatorname{th} c(\mathbf{0}, \varphi) \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leqslant k \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2,$$

причем существуют $f \in \Sigma(k)$, *для которых правая часть* (6) *представляет собой строгое неравенство.*

Это существенно усиливает принцип площадей теории однолистных функций. Отметим еще, что само неравенство Грунского для функций с k-квазиконформным продолжением есть простое следствие голоморфной сжимаемости метрики Каратеодори.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
31 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крушкаль С.Л.* – Сиб. матем. журн., 1982, т. 23, № 4, с. 90–98. 2. *Крушкаль С.Л.* – Там же, 1983, т. 24, № 3. 3. *Kruschkal S.L., Kuhnau R.* Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anwendungen. Leipzig: Teubner, 1983. 4. A Crash course on Kleinian groups. B.: Springer, 1974, 130 p. 5. *Крушкаль С.Л.* – Сиб. матем. журн., 1981, т. 22, № 2, с. 209–212. 6. *Royden H.L.* In: Advances in the theory of Riemann surfaces Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, p. 369–383. 7. *Hubbard J.K.* Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmuller. Providence, 1976. 137 p. 8. *Earle C.J., Kra I.* – Acta Math., 1976, vol. 137, № 1–2, p. 49–79. 9. *Kuhnau R.* – Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math., 1981, vol. 6, p. 125–130. 10. *Lehto O.* In: Symposia Mathematica. L.; N.Y.: Acad. Press, 1976, vol. 18, p. 429–453. 11. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975. 336.

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А.С. МАКИН

О СУММИРОВАНИИ МЕТОДОМ АБЕЛЯ–ПУАССОНА СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ И ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 3 II 1983)

В.А. Ильиным в работе [1] установлены необходимые и достаточные условия базисности спектральных разложений, отвечающих обыкновенному дифференциальному оператору. В настоящей работе рассматривается вопрос о суммируемости средними Абеля–Пуассона различного порядка спектральных разложений, отвечающих обыкновенному дифференциальному оператору и произвольному эллиптическому оператору второго порядка в случае нарушения необходимых условий базисности самих спектральных разложений.

1. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с частными производными

$$(1) \quad Lu = \sum_{|k| \leqslant m} A_k(x) D^k u,$$

заданный в произвольной области G пространства R^N.

Следуя В.А. Ильину, под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, понимается любая не равная тождественно нулю комплекснозначная функция $\mathring{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(m)}$ и является регулярным решением уравнения

$$(2)\qquad L\mathring{u} + \lambda\mathring{u} = 0.$$

Аналогично под присоединенной функцией порядка i, $i = 1, 2, \ldots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\mathring{u}(x)$, понимается любая комплекснозначная функция $\overset{i}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(m)}$ и является регулярным решением уравнения

$$(3)\qquad L\overset{i}{u} + \lambda\overset{i}{u} = \overset{i-1}{u}.$$

Краевые условия, которым удовлетворяют собственные и присоединенные функции, совершенно произвольны.

Пусть $\{u_n\}$ – полная в $L_2(G)$ и минимальная система собственных и присоединенных функций оператора (1), λ_n – соответствующие собственные значения (при нумерации собственных значений мы допускаем их совпадение). Для такой системы существует и притом единственная (см. [2]) биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_n\}$. В дальнейшем всегда будем считать, что числа λ_n не имеют конечных точек сгущения.

Как и в работе [1], все множество собственных и присоединенных функций $\{u_n\}$ разобьем на отдельные цепочки, в каждую из которых входит одна собственная и все отвечающие ей присоединенные функции. Любые две функции u_k и u_m принадлежат либо одной цепочке, либо двум разным цепочкам. Договоримся обозначать символом $u_k \sim u_m$ тот факт, что функции u_k и u_m принадлежат одной цепочке.

Перенумеруем все λ_n в порядке неубывания $|\lambda_n|$, причем нумерацию чисел λ_n, отвечающих элементам u_n одной цепочки, будем вести, начиная от собственной функции по возрастанию порядка присоединенных функций. Определим числа μ_n равенством

$$\mu_n = \begin{cases} [(-1)^{m/2}(-\lambda_n)]^{1/m}, & \text{если } m \text{ четно}, \\ [(-i)\lambda_n]^{1/m}, & \text{если } m \text{ нечетно, } \operatorname{Im}\lambda_n \geqslant 0, \\ [i\lambda_n]^{1/m}, & \text{если } m \text{ нечетно, } \operatorname{Im}\lambda_n < 0, \end{cases}$$

где всюду $[re^{i\varphi}]^{1/m} = r^{1/m}e^{i\varphi/m}$ при $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Определение. Будем говорить, что средние Абеля–Пуассона порядка $\alpha > 0$ ($m\alpha$ – целое число) спектрального разложения по системе $\{u_n\}$ обладают свойством базисности в области G, если для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и любого компакта K области G

$$\lim_{t\to+0} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^{m\alpha}t}(f, v_n)_G u_n(x) - f(x) \right\|_{L_2(K)} = 0.$$

Определение. Будем говорить, что модифицированные средние Абеля–Пуассона порядка ½ (m четно) спектрального разложения по системе $\{u_n\}$ обладают свойством базисности в области G, если для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и любого компакта K области G

$$\lim_{t\to+0} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^{m/2}t}(f, v_n)_G(u_n(x) + H_n(x, t)) - f(x) \right\|_{L_2(K)} = 0,$$

где

$$H_n(x, t) = \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ u_{n-k} \sim u_n}} \sum_{i=1}^{k} \frac{(k+i-2)!\, t^{k-i+1} u_{n-k}(x)}{2^{k+i-1}(i-1)!\, k!\, (k-i)!\, \mu_n^{k+i-1}},$$

если $u_n(x)$ – присоединенная функция, и $H_n(x, t) = 0$, если $u_n(x)$ – собственная функция.

2. Пусть оператор L является обыкновенным дифференциальным оператором:

$$Lu = u^{(m)} + p_1(x)\, u^{(m-1)} + \ldots + p_m(x)\, u. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant b$;

2) *существуют такие* $c_1 > 0, s_1 > 0$, *что* $\sum_{|\mu_n| \leqslant \mu} 1 \leqslant c_1 (|\mu| + 1)^{s_1}$ *для любого* $\mu \geqslant 0$;

3) *существует такое* $s \geqslant 0$, *что*

$$\| u_n \|_{L_2(K)} \cdot \| v_n \|_{L_2(G)} \leqslant C(K) (|\lambda_n| + 1)^s;$$

4) *общее число присоединенных функций в системе* $\{u_n\}$ *конечно;*

5) *коэффициенты* $p_i(x)$ *оператора* (4) *принадлежат классам* $C^{(l-i+1)}(G)$, *где* $l = \max\,(m, (k+1)\,[ms + s_1] + 2)$.

Тогда средние Абеля–Пуассона порядка k/m, *где* $k = 1$ *или* k *четно, обладают свойством базисности на интервале* G.

Следствие. *Если дополнительно известно, что функция* $f(x) \in L_p(G)$, $p > 2$, *или* $f(x) \in C(G)$, *то для любого компакта* K *интервала* G *средние Абеля–Пуассона при* $t \to 0$ *сходятся к функции* $f(x)$ *соответственно в норме* $L_p(K)$ *или в норме* $C(K)$.

Далее рассмотрим оператор второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\, u, \tag{5}$$

удовлетворяющий условию эллиптичности, т.е. для любого компакта K области G и любых действительных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ таких, что $\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = 1$, справедливо неравенство

$$\inf_{x \in K} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \delta(K) > 0.$$

Для оператора (5) справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *существуют такие* $c_1 > 0, s_1 > 0$, *что* $\sum_{|\lambda_n| \leqslant \lambda} 1 \leqslant c_1 (|\lambda| + 1)^{s_1}$ *для любого* $\lambda \geqslant 0$;

2) *существует такое* $s \geqslant 0$, *что*

$$\| u_n \|_{L_2(K)} \cdot \| v_n \|_{L_2(G)} \leqslant C(K) (|\lambda_n| + 1)^s$$

для любого компакта K *области* G;

3) *в системе* $\{u_n\}$ *существует не более конечного числа собственных функций, кратность которых превосходит* p;

4) *коэффициенты* $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ *оператора* (5) *принадлежат классу* $C^{(2M+2)}(G)$, *где* M – *наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $M > s + s_1 + p - 1$.

Тогда модифицированные средние Абеля–Пуассона порядка ½ обладают свойством базисности в области G.

З а м е ч а н и е. В данном случае имеет место следствие, аналогичное следствию к теореме 1.

Автор выражает глубокую благодарность В.А. Ильину за постановку задачи и руководство работой и Е.И. Моисееву за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
7 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 6, с. 980–1009. 2. *Качмаж С., Штейгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

УДК 519.852.6

МАТЕМАТИКА

Академик А.Н. ТИХОНОВ, А.А. РЮТИН, Г.М. АГАЯН

ОБ УСТОЙЧИВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ДАННЫМИ

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию задач линейного программирования (л.п.) с приближенно заданными матрицей и правой частью ограничений, доказано существование единственного решения соответствующей регуляризованной задачи, предлагаются устойчивые методы решения этой задачи.

1. Сформулируем задачу л.п. с точно заданными ограничениями.

З а д а ч а $\bar{L}$. Найти $\bar{z}^0$ такое, что

$$\varphi(\bar{z}^0) = (c, \bar{z}^0) = \inf_{z \in G} (c, z) = c_0,$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in R^m$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in R^m$, $c_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $G = \{z: z_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ \bar{A}z = \bar{u}\}$, $\bar{A}$ – матрица ограничений размерности $n \times m$, $\bar{u} \in R^n$.

Если $G \neq \phi$, то по крайней мере одно решение задачи $\bar{L}$ существует, но оно может быть неединственно.

Пусть $z^* \in R^m$ – некоторый фиксированный вектор. Напомним, что н о р м а л ь н ы м р е ш е н и е м з а д а ч и л.п. называется $\bar{z}^0$ такой, что $\|\bar{z}^0 - z^*\| \leqslant \|z - z^*\|$, где z – любое решение задачи $\bar{L}$. Нормальное решение задачи $\bar{L}$ единственно, но задача его отыскания неустойчива [1]. Будем считать в дальнейшем $z^* = 0$, что не ограничивает общности. Рассмотрим стабилизированную задачу л.п. для точно заданных ограничений.

З а д а ч а L_λ. Найти z_λ такое, что

$$\varphi_\lambda(z_\lambda) = (c, z_\lambda) + \lambda\|z_\lambda\| = \inf_{z \in G} \{(c, z) + \lambda\|z\|\},$$

где $G = \{z: z_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots,\ \bar{A}z = \bar{u}\}$, $\lambda > 0$ – параметр.

Решение z_λ задачи L_λ существует, единственно и сходится при $\lambda \to 0$ к $\bar{z}^0$ – нормальному решению задачи $\bar{L}$ [1].