

УДК 517.518.8

А. П. ТЕРЕХИН

ПРИБЛИЖЕНИЕ В L_p СФЕРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ

Введение

Пусть σ — сфера единичных векторов μ евклидова пространства конечной размерности больше двух; $L_p(\sigma)$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство действительных функций f , определенных на сфере и интегрируемых на ней в p -й степени ($p < \infty$) или непрерывных ($p = \infty$).

$$\|f\|_{L_p(\sigma)} = \left(\int_{\sigma} |f(\mu)|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$d\mu$ — элемент объема сферы,

$$\|f\|_{L_{\infty}(\sigma)} = \|f\|_{C(\sigma)} = \max_{\mu} |f(\mu)|;$$

$\|f\|$ — норма в $L_p(\sigma)$ при фиксированном p . Пусть, далее, T_n — сферический полином порядка n (след на σ алгебраического многочлена степени n);

$$E_n(f) = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

— наилучшее приближение в $L_p(\sigma)$ функции f сферическими полиномами порядка меньше n (нижняя грань берется при фиксированном n ; в выборе порядка $n - 1$ следуем С. Б. Стечкину, предложившему такой выбор в случае приближения тригонометрическими полиномами).

По точке $\mu \in \sigma$, поместив в ней полюс, определим экватор $\sigma'_{\mu} = \{v \in \sigma: v\mu = 0\}$ и, взяв $v \in \sigma'_{\mu}$, положим

$$\mu_v(\theta) = \mu \cos \theta + v \sin \theta, \quad 0 < \theta < \pi, \quad (1)$$

— это точки меридиана, исходящего из μ в направлении v .

Заметим, что любая точка $\mu' \in \sigma$, $\mu' \neq \pm \mu$, единственным образом представима в виде $\mu' = \mu_v(\theta)$.

Через $\mu_v(t)$ обозначаем точки соответствующей окружности, определенные по той же формуле (1), но для всех действительных t .

Для задания свойств гладкости функции используем известный усредненный сдвиг

$$S(t)f(\mu) = \frac{1}{|\sigma'|} \int_{\sigma'} f(\mu_v(t)) dv, \quad (2)$$

где $|\sigma'|$ — объем сфер σ'_{μ} (объем единичной сферы в пространстве на единицу меньшей размерности), dv — элемент объема сферы. Но в отличие от принятой ранее точки зрения на $S(t)$ как на оператор сдвига (см. [1–3]), видим в $S(t)$ лишь операторную функцию, к которой применяем обычный сдвиг, дающий $S(t+h)$, $h \in R$. К этой иной точке зрения пришли независимо С. М. Никольский и П. И. Лизоркин и автор.

Модулем непрерывности функции f порядка k ($k = 1, 2, \dots$) в метрике $L_p(\sigma)$ назовем величину

$$\omega_k(\delta; Sf) = \sup_{0 < h < \delta} \sup_t \|\Delta^k(h)S(t)f\|, \quad (3)$$

где $\Delta(h)S(t) = S(t+h) - S(t)$, $\Delta^k(h)$ — k -я степень оператора $\Delta(h)$.

Случаю $k = 0$ соответствует норма $\|f\|$, так как $\sup_t \|S(t)f\| = \|f\|$ ($S(0)f = f$ и, как известно, $\|S(t)f\| \leq \|f\|$).

Величину

$$\omega_k(\delta; S^{(r)}f) = \sup_{0 < h < \delta} \sup_t \|\Delta^k(h)S^{(r)}(t)f\| \quad (4)$$

будем называть модулем непрерывности в $L_p(\sigma)$ производных (по всем направлениям) порядка $r = 1, 2, \dots$ функции f .

Индекс $k = 1$ в записи опускаем.

Под производной $S'(t)f$ здесь удобно понимать предел по норме пространства $L_p(\sigma)$ разностного отношения $(1/h)(S(t+h)f - S(t)f)$ при $h \rightarrow +0$; производные высшего порядка определяются как обычно по индукции. Функцию, имеющую производную порядка r ($r = 1, 2, \dots$), будем называть r -дифференцируемой в $L_p(\sigma)$. Если существуют производные $(f(\mu_\nu(t)))^{(r)}$, то ввиду (2)

$$S^{(r)}(t)f(\mu) = \frac{1}{|\sigma'|} \int_{\sigma_\mu} (f(\mu_\nu(t)))^{(r)} d\nu$$

(при некоторых условиях, обеспечивающих дифференцирование под знаком интеграла). Таким образом, при необходимости возможен подход к $S^{(r)}(t)f$ и от производных функции по направлениям.

В статье доказываются теоремы типа Джексона и обратные им теоремы типа Бернштейна, известные в тригонометрической аппроксимации. На их основе устанавливается эквивалентность дифференциальных классов, определенных по модулям непрерывности, классам аппроксимационным, определенным по наилучшим приближениям.

1. Прямые и обратные теоремы

Для любых целых неотрицательных k и r существуют положительные константы (свои в каждой из теорем) такие, что для всех функций $f \in L_p(\sigma)$ и $n = 1, 2, \dots$ имеют место следующие неравенства.

Теорема 1.

$$E_n(f) \leq C_k \omega_k(\pi/n; Sf). \quad (D)$$

Теорема 2. Если функция r -дифференцируема в $L_p(\sigma)$, то

$$E_n(f) \leq C_{k,r} n^{-r} \omega_k(\pi/n; S^{(r)}f). \quad (D_{k,r})$$

Теорема 3. Для всякого $\delta \in (0, \pi]$

$$a_k \omega_k(\delta; Sf) \leq \delta^k \sum_{m=1}^{n-1} m^{k-1} E_m(f) + E_n(f). \quad (B)$$

Теорема 4. Если нижеследующий ряд в (B_r) сходится, то функция r -дифференцируема в $L_p(\sigma)$ и

$$b_r \sup_t \|S^{(r)}(t)f\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} m^{r-1} E_m(f), \quad (B_r)$$

$$b_{k,r} \omega_k(\delta; S^{(r)}f) \leq (\delta^{-r} + n^r) \omega_{k+r}(\delta; Sf) + \sum_{m=n}^{\infty} m^{r-1} E_m(f). \quad (B_{k,r})$$

При $k = 1$ прямые и обратные теоремы (в том или ином виде) получали Г. Г. Кушниренко [1], $p = \infty$, и Павелке [2], $1 \leq p \leq \infty$. При $k > 1$ с мо-

дулями непрерывности, определенными по степеням разности $S(t) - I$ (I — единичный оператор) такие теоремы доказали С. М. Никольский и П. И. Лизоркин [3] для $p = 2$. В случае равномерной метрики ($p = \infty$) они же [4] использовали более естественные модули непрерывности, которые можно получить, применив разностные операторы $\Delta^k(h)$ непосредственно к следу $f(\mu_\nu(t))$ или его производным и положив затем $t = 0$ (в остальном как в (3) и (4)). Они доказали, в частности, упомянутые выше теоремы для пространств четной размерности. От размерности зависела ведущая к теореме типа Джексона конструкция аппроксимирующего сферического полинома, которую для нечетномерных пространств дал автор [5].

Как уже отмечалось, С. М. Никольский и П. И. Лизоркин также использовали сдвиги $S(t+h)$; по ним они также строили модули непрерывности высшего порядка в метрике L_p с произвольным p , $1 \leq p \leq \infty$, но в отличие от автора полагали в (3) $t = 0$ вместо суп по t . Прямая и обратная теоремы установлены ими при этом (к моменту написания данной статьи) для $r = 0$ и со степенными мажорантами модулей непрерывности и наилучших приближений в правых частях неравенств (автор узнал об этих результатах из совместного доклада С. М. Никольского и П. И. Лизоркина на семинаре в МИАНе в октябре 1985 г.; к этому времени была выполнена автором и данная работа).

Автор весьма признателен С. М. Никольскому и П. И. Лизоркину, чей совместный доклад на лужинской школе в Кемерово в 1983 году вовлек автора в круг вопросов о приближении сферическими полиномами и дал толчок решению некоторых из этих вопросов.

Переходим к доказательству теорем.

При доказательстве теоремы 1 будем отпираться от представления уклонения, даваемого следующей леммой.

Л е м м а. Пусть

$$D_m(t) = ((\sin mt/2)/\sin t/2)^{2s}$$

— ядро Джексона.

Полагая для $\mu' = \mu_\nu(\theta)$

$$\Delta^k(\mu')f(\mu) = \Delta_\nu^k(\theta)f(\mu) = \Delta^k(\theta)f(\mu_\nu(t))|_{t=0}, \quad (5)$$

в пространстве размерности $2l+2$ ($l = 1, 2, \dots$) имеем:

$$\frac{1}{\kappa_m} \int_{\sigma} [(-1)^k \Delta^k(\mu')f(\mu)] D_m(\widetilde{\mu\mu'}) \left[\prod_{i=2}^k \sin^{2i} i\widetilde{\mu\mu'} \right] d\mu' = f(\mu) - T(\mu), \quad (6)$$

где T — сферический полином порядка $n \leq s(m-1) + n_0$, n_0 — порядок произведения синусов в (6), $\widetilde{\mu\mu'} = \theta$,

$$\kappa_m \asymp m^{2s-2lk-1} \quad (s > lk) \quad (7)$$

(символ \asymp означает взаимную оценку с положительными не зависящими от m коэффициентами).

В случае нечетной размерности введем нечетное 2π -периодическое продолжение $\widetilde{\Delta}_\nu(t)f(\mu)$ с полуинтервала $[0, \pi)$ разности $f(\mu_\nu(t)) - f(\mu)$ и положим для $\mu' = \mu_\nu(\theta)$

$$\widetilde{\Delta}^k(\mu')f(\mu) = \Delta^k(\theta)[\widetilde{\Delta}_\nu(t)f(\mu)]|_{t=0}. \quad (8)$$

Тогда при размерности пространства $2l+3$ ($l = 0, 1, \dots$) представление (6) имеет место с $\widetilde{\Delta}^k(\mu')f(\mu)$ на месте $\Delta^k(\mu')f(\mu)$ и, кроме того,

$$\kappa_m \asymp m^{2s-2lk-2} \quad (s > lk+1). \quad (7')$$

Для пространства четной размерности лемму с некоторым отличием в ядре доказали С. М. Никольский и П. И. Лизоркин [4, с. 192], для нечетной размерности — автор [5].

Кроме леммы будем использовать свойства модулей непрерывности, аналогичные известным в периодическом случае:

$$\omega_k(\gamma\delta; Sf) \leq (\gamma + 1)^k \omega_k(\delta; Sf), \quad \gamma > 0; \quad (9)$$

$$\omega_{k+r}(\delta; Sf) \leq \delta^r \omega_k(\delta; S^{(r)}f). \quad (10)$$

Они являются непосредственным следствием свойств модулей непрерывности векторных 2π -периодических функций $F: R \rightarrow L_p(\sigma)$ с нормой $\|F\| = \sup_t \|F(t)\|_{L_p(\sigma)}$; у нас $F(t) = S(t)f$. Кстати заметим, что при натуральном $\gamma = n$ неравенство (9) имеет место с n вместо $\gamma + 1$.

Доказательство теоремы 1. В ядре Джексона положим $m = [(n-1-n_0)/s] + 1$ с тем, чтобы порядок сферического полинома T_s , даваемого леммой, был меньше n , как того требует определение $E_n(f)$; для получения положительного m допустим сначала $n > n_0$.

Доказываем теорему сначала для пространства четной размерности, равной $2l+2$. Воспользуемся представлением (6) леммы. Интеграл в нем сведем, полагая $\mu' = \mu_\nu(\theta)$, к интегрированию по $\theta \in (0, \pi)$ и $\nu \in \sigma'_\mu$ см. (1). Получим:

$$\begin{aligned} f(\mu) - T(\mu) &= \frac{(-1)^k}{\kappa_m} \int_0^\pi \left(\int_{\sigma_\mu} \Delta_\nu^k(\theta) f(\mu) d\nu \right) D_m(\theta) \prod_{i=1}^k \sin^{2l} i\theta d\theta = \\ &= (-1)^k |\sigma'| \kappa_m^{-1} \int_0^\pi \Delta^k(\theta) S(t) f(\mu) D_m(\theta) \prod_{i=1}^k \sin^{2l} i\theta d\theta \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Учли (5) и (2).

Тогда

$$\|f - T\| \leq |\sigma'| \kappa_m^{-1} \int_0^\pi \omega_k(\theta; Sf) D_m(\theta) \prod_{i=1}^k \sin^{2l} i\theta d\theta$$

(см. определение (3)).

Последний интеграл, с достаточно большим s в ядре Джексона ($2s > 2lk + k$), стандартным образом оценивается модулем непрерывности $\omega_k(\pi/n; Sf)$ (см., например, [4, с. 199]; еще учитываем ограниченность отношения n/m при $n > n_0$). Итак, для $n > n_0$ и четной размерности пространства теорема доказана.

Пусть размерность пространства нечетна и равна $2l+3$ ($l = 0, 1, \dots$); по-прежнему $n > n_0$. Воспользуемся тем же представлением (6) с $\tilde{\Delta}^k(\mu')f(\mu)$ на месте $\Delta^k(\mu')f(\mu)$. Интеграл в (6) разобьем на два: по $\tilde{\mu}\mu' < \pi/k$ и $\tilde{\mu}\mu' > \pi/k$.

В первом интеграле, ввиду (8),

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^k(\mu')f(\mu) &= \Delta^k(\theta) [\tilde{\Delta}_\nu(t)f(\mu)]|_{t=0} = \Delta^k(\theta) (f(\mu_\nu(t)) - f(\mu))|_{t=0} = \\ &= \Delta^k(\mu')f(\mu). \end{aligned}$$

Учли также, что $\Delta^k(\theta)f(\mu) = f(\mu)\Delta^k(\theta)1 = 0$.

Таким образом, получается та же разность, что и в четном случае, значит, как и там, оценивается первый интеграл.

Во втором интеграле для разности имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^k(\mu')f(\mu) &= \Delta^k(\theta) [\tilde{\Delta}_\nu(t)f(\mu)]|_{t=0} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i \tilde{\Delta}_\nu(i\theta) f(\mu) = \\ &= \sum_{i=1}^k C_k^i \varepsilon_{i\theta} (f(\mu_\nu(t_{i\theta})) - f(\mu)), \quad \varepsilon_{i\theta} = \pm 1, \quad 0 < t_{i\theta} < \pi. \end{aligned}$$

Использовали определение (8), биномиальное разложение разности и тот факт, что нечетное 2π -периодическое продолжение с $[0, \pi)$ принимает те же значения, что и на $[0, \pi)$, с возможным изменением знака; кроме того, опус-

тили нулевую разность, соответствующую $i = 0$ (по той же причине не учитываем $t_{i0} = 0$).

Тогда

$$\frac{1}{|\sigma'|} \int_{\sigma_{\mu}} \Delta^k(\theta) [\tilde{\Delta}_v(t) f(\mu)] dv |_{t=0} = \sum_{i=1}^k C_k^i \varepsilon_{i0} \Delta(t_{i0}) S(t) f |_{t=0}.$$

Учитывая это при оценке по норме второго интеграла (по $\tilde{\mu}' > \pi/k$), получаем для него следующую мажоранту (интеграл пишем в форме (11)):

$$A_1 \alpha_n^{-1} \int_{\pi/k}^{\pi} \omega(\pi; Sf) d\theta \leq A_2 m^{-2s+2lk+2} \omega(\pi; Sf).$$

Воспользовались равномерной по n ограниченностью на интервале $(\pi/k, \pi)$ ядра Джексона и учли порядковое отношение (7').

В силу неравенства Маршо и (9)

$$\omega(\pi; Sf) \leq A_1 \int_{\pi}^{2\pi} u^{-2} \omega_k(u; Sf) du \leq A_2 \omega_k(\pi/n; Sf) n^k \int_{\pi}^{2\pi} u^{-2} (u+1)^k du \quad (12)$$

(см. [7, с. 119]; в периодическом случае неравенство Маршо допускает используемую форму). Таким образом, второй интеграл оценивается произведением $A_3 m^{-2s+2lk+2} n^k \omega(\pi/n; Sf)$.

Так как отношение n/m при $n > n_0$ ограничено, то при достаточно большом s ($2s \geq 2lk + k + 2$) коэффициент у модуля непрерывности будет по n ограниченным. Для $n > n_0$ неравенство (D) доказано.

Пусть $n \leq n_0$. При $k = 1$ произведение синусов в представлении (6) отсутствует, поэтому соответствующее n_0 равно нулю; в этом случае, как доказано, неравенство (D) выполняется со всеми $n = 1, 2, \dots$. Тогда для $n < n_0$ (n_0 снова соответствует общему k) будем иметь:

$$E_n(f) \leq C_1 \omega(\pi; Sf) \leq A n_0^k \omega_k(\pi/n; Sf).$$

Последняя оценка следует из неравенства (12). Теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2. Неравенство $(D_{k,r})$ следует из неравенства (D) теоремы 1, с $k+r$ на месте k , и свойства (10).

Доказательство теорем 3 и 4 получим как следствие соответствующих теорем о приближении 2π -периодических вектор-функций тригонометрическими вектор-полиномами (см. [6]).

Для этого рассмотрим введенное выше пространство 2π -периодических вектор-функций $F: R \rightarrow L_p(\sigma)$ с нормой $\|F\| = \sup_t \|F(t)\|_{L_p(\sigma)}$; обозначаем его через B .

Из общих неравенств, доказанных в [6, с. 19—22], вытекают неравенства (B) — $(B_{k,r})$ для модулей непрерывности $\omega_k(\delta; F)_B$ и $\omega_k(\delta; F^{(r)})_B$ и наилучших приближений $E_n(F)_B$ вектор-функции F элементами из аналога класса Бернштейна, B_{σ} , $\sigma = n$ (общие неравенства следует лишь переложить на дискретные $E_n(F)$; чтобы получить неравенство $(B_{k,r})$ с натуральным параметром n справа, надо воспользоваться видоизмененным неравенством теоремы 8 [6], которое получится, если в доказательстве теоремы 8 заменить оценки с $u \leq 1/\delta$ и $u > 1/\delta$ на оценки с $u \leq n$ и $u > n$).

Модули непрерывности вектор-функции F и ее производной, как уже отмечалось, для $F(t) = S(t)f$ совпадают с модулями непрерывности $\omega_k(\delta; Sf)$ и $\omega_k(\delta; S^{(r)}f)$.

Покажем, что со сферическими полиномами T_n вектор-функция $S(t)T_n$ принадлежит векторному аналогу класса Бернштейна B_{σ} , $\sigma = n$. Если бы это было так, то, взяв сферический полином T_{n-1} наилучшего для f приближения, имели бы

$$E_n(Sf)_B \leq \sup_t \|S(t)f - S(t)T_{n-1}\|_{L_p(\sigma)} = \|f - T_{n-1}\|_{L_p(\sigma)} = E_n(f).$$

Таким образом, из упомянутых выше неравенств (B) — $(B_{k,r})$ для вектор-функции F в норме пространства B , примененных к вектор-функции $F(t) = S(t)f$, вытекают бы обсуждаемые неравенства (B) — $(B_{k,r})$.

Осталось показать, что $S(t)T_n \in B_n$, т. е. вектор-функция $S(t)T_n$ продолжима на комплексную плоскость и имеет место оценка

$$\|S(u + iv)T_n\|_B \leq A e^{n|v|}$$

с коэффициентом A , не зависящим от u и v .

Но $|T_n(\mu_\nu(t))| \leq M$ равномерно по ν и t , а так как $T_n(\mu_\nu(t))$ является тригонометрическим полиномом от t , то

$$|T_n(\mu_\nu(t + u + iv))| \leq M e^{n|v|}.$$

По формуле (2) получаем комплексное продолжение для $S(t)T_n$ и оценку

$$|S(t + u + iv)T_n(\mu)| \leq M e^{n|v|},$$

следовательно,

$$\|S(t + u + iv)T_n\|_{L_p(\sigma)} \leq |\sigma|^{1/p} M e^{n|v|}.$$

Взяв \sup по t , приходим к нужной оценке.

2. Эквивалентные дифференциальные и аппроксимационные классы функций на сфере

По наилучшим приближениям $E_n(f)$ естественно строить на сфере аппроксимационные классы по непосредственной аналогии с приближением тригонометрическими полиномами. Основным здесь является класс функций, для которых конечна полунорма $\sup E_n(f)/n^r$, где r — заданное положительное число. К общим классам ведет замена \sup на довольно произвольные функционалы и степенной функции на также довольно произвольные функции сравнения.

Раздел посвящен эквивалентному дифференциальному описанию аппроксимационных классов.

В равномерной метрике задача описания по крайней мере основного класса полностью решена, причем в самых естественных терминах: С. М. Никольский и П. И. Лизоркин [4] привлекали для этой цели производные функции и их модули непрерывности высших порядков, определенные по большим дугам, исходящим из данной точки сферы в разных направлениях; полное решение ими дано для четно-мерных пространств, недостающую в нечетномерном случае теорему типа Джексона доказал автор [5].

В пространстве $L_p(\sigma)$, $1 \leq p \leq \infty$, С. М. Никольский и П. И. Лизоркин и автор решали задачу дифференциального описания, как оказалось, по разным схемам и в несколько отличающихся модулях непрерывности: С. М. Никольский и П. И. Лизоркин [8] непосредственно характеризовали основной класс, автор же сначала доказал прямые (типа Джексона) и обратные теоремы о приближении в $L_p(\sigma)$ сферическими полиномами; о различии модулей непрерывности см. раздел 1 данной статьи.

В разделе 2 завершается авторская схема дифференциального описания аппроксимационных классов.

Рассматриваются общие аппроксимационные классы, к которым приводят общие функционалы и функции сравнения, включая так называемые \mathcal{H} -функционалы [9, с. 281] и функции сравнения, введенные в вопросы тригонометрической аппроксимации С. Б. Стечкиным [10] (см. также [7]). Общие функционалы и функции сравнения привлекали также Бутцер и Шерер [11] (мы отказываемся от некоторых условий, налагаемых на функционалы в [11, с. 310]).

При построении дифференциальных классов используем модули непрерывности высшего порядка, определенные в метрике $C(\sigma)$ в [1] (см. также [2]) и в метрике $L_p(\sigma)$, $1 \leq p \leq \infty$, — в разделе 1 (таким образом, для $p = \infty$ имеем два определения). Обозначать модули непрерывности будем единым образом $\omega_k(\delta; f)$ и $\omega_k(\delta; f^{(r)})$, $r = 1, 2, \dots$.

Аппроксимационные классы функций, определяемые по наилучшим приближениям, естественно было задавать с помощью функционалов на последовательностях. Но тогда возникла бы задача согласования двух видов общих функционалов, усложняемая различной регулярностью поведения модулей непрерывности и наилучших приближений. Ради простоты функционалы, применяемые к модулям непрерывности для определения дифференциальных классов, будем применять и к наилучшим приближениям. С этой целью продолжим наилучшие приближения $E_n(f)$ с натуральных n на положительную полуось, положив

$$E_u(f) = E_n(f) \text{ при } n-1 < u \leq n. \quad (1)$$

Переходим к определениям, связанным с общими классами.

Пусть $\omega(\delta)$ и $\varphi(\delta)$ — соответственно положительная неубывающая и неотрицательная измеримая на $(0, \pi]$ функции; \mathcal{H} — неотрицательный функционал (с допустимым бесконечным значением), определенный на функциях φ и сохраняющий оценку: если $\varphi_1 \leq c\varphi_2$, то $\mathcal{H}[\varphi_1] \leq M(c)\mathcal{H}[\varphi_2]$.

В теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами С. Б. Стечкин [10] выделил следующие свойства функций ω : существуют положительные числа α и c такие, что как только $0 < \delta_1 \leq \delta_2 \leq \pi$, то

$$\omega(\delta_1)/\delta_1^{k-\alpha} \geq c\omega(\delta_2)/\delta_2^{k-\alpha} \quad (2)$$

(отношение почти убывает),

$$\omega(\delta_1)/\delta_1^\alpha \leq c\omega(\delta_2)/\delta_2^\alpha \quad (3)$$

(отношение почти возрастает).

Пишем $\omega \in S^k$ и $\omega \in S$ соответственно в случаях (2) и (3).

От функционалов \mathcal{H} обычно требуется, чтобы относительно их были ограниченными определенные операторы (см. [9, с. 281, 3°; 11, с. 311]); у нас такими операторами будут:

$$I_\alpha(\varphi)(\delta) = \delta^\alpha \int_{\delta}^{2\pi} t^{-\alpha} \varphi(t) \frac{dt}{t}, \quad (4)$$

$$J_\alpha(\varphi)(\delta) = \delta^{-\alpha} \int_0^{\delta} t^\alpha \varphi(t) \frac{dt}{t}. \quad (5)$$

В (4) считаем $\varphi(t) = \varphi(\pi)$ для $t > \pi$.

Скажем, что пара (ω, \mathcal{H}) удовлетворяет условию S^k , напомним $(\omega, \mathcal{H}) \in S^k$, если выполняется (2) и с тем же α из (2) и некоторой постоянной C для всех φ имеем

$$\mathcal{H}[I_\alpha(\varphi)] \leq C\mathcal{H}[\varphi]. \quad (6)$$

Аналогично с условием S , где вместе с (3) будем требовать выполнения неравенства

$$\mathcal{H}[J_\alpha(\varphi)] \leq C\mathcal{H}[\varphi]. \quad (7)$$

Непосредственно проверяется выполнимость (6) и (7) с любыми $\alpha > 0$ для функционалов \sup и других практикуемых функционалов (см. также [11, с. 313—314]).

Эквивалентность дифференциальных и аппроксимационных классов устанавливается в следующих теоремах.

Т е о р е м а 1. Если $(\omega, \mathcal{H}) \in S^k$, то

$$\mathcal{H}[\omega_k(\delta; f)/\omega(\delta)] \sim \mathcal{H}[E_{\pi/\delta}(f)/\omega(\delta)]. \quad (A)$$

Если $\omega \in S^k$, то

$$\omega_k(\delta; f) \asymp \omega(\delta) \Leftrightarrow E_n(f) \asymp \omega(\pi/n) \quad (\bar{A})$$

(символ \times означает взаимную оценку с не зависящими от f , δ и n коэффициентами).

Т е о р е м а 2. Если $(\omega, \mathcal{H}) \in S$, то

$$\mathcal{H} [\omega_k(\delta; f^{(r)})/\omega(\delta)] \sim \mathcal{H} [\omega_{k+r}(\delta; f)/\delta^r \omega(\delta)]. \quad (C_r)$$

Если $\omega \in S$, то

$$\omega_k(\delta; f^{(r)}) \times \omega(\delta) \Leftrightarrow \omega_{k+r}(\delta; f) \times \delta^r \omega(\delta). \quad (\bar{C}_r)$$

Если $(\omega, \mathcal{H}) \in S^k \cap S$, то

$$\mathcal{H} [\omega_k(\delta; f^{(r)})/\omega(\delta)] \sim \mathcal{H} [E_{\pi/\delta}(f)/\delta^r \omega(\delta)]. \quad (A_r)$$

Если $\omega \in S^k \cap S$, то

$$\omega_k(\delta; f^{(r)}) \times \omega(\delta) \Leftrightarrow E_n(f) \times n^{-r} \omega(\pi/n). \quad (\bar{A}_r)$$

Утверждения (\bar{A}) , (\bar{C}_r) и (\bar{A}_r) повторяют соответствующие утверждения, доказанные С. Б. Стечкиным [10] для равномерных приближений периодических функций тригонометрическими полиномами и А. Ф. Тиманом [7] для приближений в L_p (в (\bar{C}_r) освобождаемся от накладываемого С. Б. Стечкиным и А. Ф. Тиманом дополнительного условия $\omega \in S^k$). В работах [10, 7] по сути дела установлено, что если для параметрических функционалов $\omega_k(\delta; f)$, $\omega_k(\delta; f^{(r)})$ и $E_n(f)$ с известными свойствами справедливы неравенства типа (D), $(D_{k,r})$ и (B), $(B_{k,r})$, доказанные в разделе 1, то для этих функционалов верны, в частности, утверждения (\bar{A}) , (\bar{C}_r) и (\bar{A}_r) . Мы доказываем последние ради полноты изложения, тем более, что неравенства (B) и $(B_{k,r})$ в приведенном виде (со свободным n в правых частях) быстрее приведут к цели.

Как уже отмечалось в разделе 1, неравенства (D) и $(D_{k,r})$ в метрике $C(\sigma)$ при четной размерности объемлющего сферу пространства доказали С. М. Никольский и П. И. Лизоркин [4], при нечетной — автор [5]; в [5] приведены также неравенства (\bar{B}) и $(\bar{B}_{k,r})$.

Используем еще известную оценку

$$\omega_{k+r}(\delta; f) \leq \delta^r \omega_k(\delta; f^{(r)}) \quad (E)$$

(в $C(\sigma)$ см. [4, с. 190], в $L_p(\sigma)$ — раздел 1 (10)).

Для оценок с функционалами \mathcal{H} все четыре упомянутые неравенства удобнее иметь в таком виде:

$$|E_{\pi/\delta}(f) \leq C_k \omega_k(\delta; f); \quad (D')$$

$$E_{\pi/\delta}(f) \leq C_{k,r} \delta^r \omega_k(\delta; f^{(r)}); \quad (D'_r)$$

$$c_k \omega_k(\delta; f) \leq \delta^k \int_0^{2\pi} u^{-k} E_{\pi/u}(f) \frac{du}{u}; \quad (B')$$

$$c_{k,r} \omega_k(\delta; f^{(r)}) \leq \delta^r \omega_{k+r}(\delta; f) + \int_0^{\delta} u^{-r} E_{\pi/u}(f) \frac{du}{u}. \quad (B'_r)$$

Неравенства (D') и (D'_r) непосредственно следуют из доказанных в разделе 1 неравенств (D) и $(D_{k,r})$: если $n-1 < \pi/\delta \leq n$, то ввиду (1)

$$E_{\pi/\delta}(f) = E_n(f) \leq C_k \omega_k(\pi/n; f) \leq C_k \omega_k(\delta; f); \quad (8)$$

аналогично с (D'_r) . Неравенства (B') и (B'_r) также можно вывести из (B) и $(B_{k,r})$ (см. раздел 1), но по существу последние получены в [5] и разделе 1 как следствия из неравенств, частными случаями которых являются неравенства (B') и (B'_r) .

Доказательство теорем получим на базе нескольких вспомогательных предложений. В доказательствах будем обозначать символом \ll соответствующее неравенство с коэффициентом, не зависящим от f и δ .

Предложение 1. Если оператор I_k , см. (4), ограничен относительно \mathcal{H} , то

$$\mathcal{H} [\omega_k (\delta; f)] \sim \mathcal{H} [E_{\pi/\delta} (f)];$$

если относительно \mathcal{H} ограничен оператор J_0 , см. (5), то

$$\mathcal{H} [\omega_k (\delta; f^{(r)})] \sim \mathcal{H} [\delta^{-r} \omega_{k+r} (\delta; f)].$$

Оценки (D') и (E) дадут неравенство \gg на месте обеих эквивалентностей для любого функционала \mathcal{H} , поскольку он сохраняет оценку.

На основании (B') получаем:

$$\mathcal{H} [\omega_k (\delta; f)] \ll \mathcal{H} [I_k (E_{\pi/\delta} (f))] \ll \mathcal{H} [E_{\pi/\delta} (f)].$$

Снова воспользовались свойством \mathcal{H} сохранять оценку и, кроме того, ограниченностью I_k относительно \mathcal{H} . Последнее неравенство вместе с установленным обратным означают эквивалентность, утверждаемую в первой части предложения.

Для завершения доказательства воспользуемся неравенством

$$\omega_k (\delta; f^{(r)}) \ll \int_0^\delta u^{-r} \omega_{k+r} (u; f) \frac{du}{u}, \quad (9)$$

которое следует из неравенства (B_r'), если в нем приближение $E_{\pi/u} (f)$ оценить согласно (D') с $k+r$ вместо k и учесть еще неравенство

$$\delta^{-r} \omega_{k+r} (\delta; f) \ll \int_{\delta/2}^\delta u^{-r} \omega_{k+r} (u; f) \frac{du}{u} \ll \int_0^\delta (\cdot),$$

вытекающее из известных свойств модулей непрерывности.

В силу (9)

$$\mathcal{H} [\omega_k (\delta; f^{(r)})] \ll \mathcal{H} [J_0 (\delta^{-r} \omega_{k+r} (\delta; f))] \ll \mathcal{H} [\delta^{-r} \omega_{k+r} (\delta; f)].$$

Это завершает доказательство предложения 1.

Предложение 2. Если $(\omega, \mathcal{H}) \in S^k$, то оператор I_k ограничен относительно функционала \mathcal{H}^ω , действующего по формуле $\mathcal{H}^\omega [\varphi] = \mathcal{H} [\varphi/\omega]$; если $(\omega, \mathcal{H}) \in S$, то относительно \mathcal{H}^ω ограничен оператор J_0 .

Действительно, условие $(\omega, \mathcal{H}) \in S^k$ означает выполнение (2) и (6). Ввиду (4) и (2)

$$\begin{aligned} I_k (\varphi) (\delta) / \omega (\delta) &= \delta^k \int_0^{2\pi} t^{-k} (\varphi (t) / \omega (t)) (\omega (t) / \omega (\delta)) \frac{dt}{t} \ll \\ &\ll \delta^k \int_0^{2\pi} t^{-k} (\varphi (t) / \omega (t)) (t/\delta)^{k-\alpha} \frac{dt}{t} = \delta^\alpha \int_0^{2\pi} t^{-\alpha} (\varphi (t) / \omega (t)) \frac{dt}{t} = I_\alpha (\varphi / \omega). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу сохранения функционалом оценки и неравенства (6), имеем

$$\mathcal{H} [I_k (\varphi) / \omega] \ll \mathcal{H} [I_\alpha (\varphi / \omega)] \ll \mathcal{H} [\varphi / \omega].$$

Этим доказано утверждение об операторе I_k .

Аналогично с оператором J_0 . Поскольку $(\omega, \mathcal{H}) \in S$, то выполняются неравенства (3) и (7). Ввиду (5) и (3)

$$\begin{aligned} J_0 (\varphi) (\delta) / \omega (\delta) &= \int_0^\delta (\varphi (t) / \omega (t)) (\omega (t) / \omega (\delta)) \frac{dt}{t} \ll \\ &\ll \int_0^\delta (\varphi (t) / \omega (t)) (t/\delta)^\alpha \frac{dt}{t} = \delta^{-\alpha} \int_0^\alpha t^\alpha (\varphi (t) / \omega (t)) \frac{dt}{t} = J_\alpha (\varphi / \omega). \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{H} [J_0(\varphi)/\omega] \ll \mathcal{H} [J_\alpha(\varphi/\omega)] \ll \mathcal{H} [\varphi/\omega].$$

Использовали свойство \mathcal{H} сохранять оценки и неравенство (7). Предложение доказано.

Предложение 3. Если $(\omega, \mathcal{H}) \in S^k$, то $(\delta^r \omega, \mathcal{H}) \in S^{k+r}$; если $(\omega, \mathcal{H}) \in S$, то $(\delta^r \omega, \mathcal{H}) \in S$.

В самом деле, если $\omega(\delta)/\delta^{k-\alpha}$ почти убывает (2), то $\delta^r \omega(\delta)/\delta^{k+r-\alpha}$ почти убывает; неравенство (6) выполняется не зависимо от k и $k+r$. Доказана первая часть предложения.

Если $\omega(\delta)/\delta^\alpha$ почти возрастает (3), то, очевидно, и $\delta^r \omega(\delta)/\delta^\alpha$ почти возрастает; учитывая (7), убеждаемся в справедливости второй части предложения.

Доказательство теорем. 1. Эквивалентности (A) и (C_r) следуют из соответствующих частей предложения 2 и предложения 1, примененного с \mathcal{H}^ω вместо \mathcal{H} . Доказываем (A_r).

Поскольку $(\omega, \mathcal{H}) \in S^k \cap S$, то согласно предложению 3 $(\delta^r \omega, \mathcal{H}) \in S^{k+r} \cap S$. Следовательно, ввиду предложения 2, ограничены относительно функционала $\mathcal{H}^{\delta^r \omega}$ операторы I_{k+r} и J_0 . Тогда, в силу первой части предложения 1, примененного с $\mathcal{H}^{\delta^r \omega}$ вместо \mathcal{H} , получаем:

$$\mathcal{H} [\omega_{k+r}(\delta; f)/\delta^r \omega(\delta)] \sim \mathcal{H} [E_{\pi/\delta}(f)/\delta^r \omega(\delta)].$$

Это вместе с доказанным (C_r) даст (A_r).

2. Доказываем равносильность порядковых соотношений.

Применив доказанное в теоремах 1 и 2 к функционалу $\mathcal{H} = \sup$, найдем:

$$\omega_k(\delta; f) \ll \omega(\delta) \Leftrightarrow E_{\pi/\delta}(f) \ll \omega(\delta), \quad (10)$$

$$\omega_k(\delta; f^{(r)}) \ll \omega(\delta) \Leftrightarrow \omega_{k+r}(\delta; f) \ll \delta^r \omega(\delta), \quad (11)$$

$$\omega_k(\delta; f^{(r)}) \ll \omega(\delta) \Leftrightarrow E_{\pi/\delta}(f) \ll \delta^r \omega(\delta). \quad (12)$$

Поскольку ω не убывает, то правые неравенства в (10) и (12) равносильны таким же неравенствам с $\delta = \pi/n$: в нетривиальную сторону это доказывается как (9).

Из правых соотношений (\bar{A}), (\bar{C}_r) и (\bar{A}_r), в силу оценок (D) из раздела 1, (E) и (D_{r,k}) из раздела 1 соответственно следует: $\omega(\pi/n) \ll \omega_k(\pi/n; f)$, $\omega(\delta) \ll \omega_k(\delta; f^{(r)})$, $\omega(\pi/n) \ll \omega_k(\pi/n; f^{(r)})$. Выбрав по δ натуральное n из условия $\pi/(n+1) < \delta \leq \pi/n$, используя неубывание ω и известные свойства модулей непрерывности, перенесем на непрерывные δ первое и третье неравенства. Поскольку при выполнении правых соотношений (\bar{A}), (\bar{C}_r) и (\bar{A}_r) будут иметь место левые части соотношений (10), (11) и (12), то вместе с установленными обратными неравенствами получим левые порядковые соотношения (\bar{A}), (\bar{C}_r) и (\bar{A}_r). Таким образом, осталось доказать, что при выполнении последних будут выполняться неравенства \gg на месте правых порядковых соотношений.

2.1. Пусть $\omega_k(\delta; f) \times \omega(\delta)$ и $\omega \in S^k$. Тогда, в силу (10) и условия S^k , см. (2), $E_m(f) \ll \omega(\pi/m) \ll \omega(\pi/n)(n/m)^{k-\alpha}$, $m < n$. Учитывая это и (B) из раздела 1, находим

$$\omega(\delta) \ll \omega_k(\delta; f) \ll \delta^k \sum_{m=1}^{n-1} m^{k-1} \omega(\pi/n) (n/m)^{k-\alpha} + E_n(f).$$

Отсюда

$$E_n(f) \geq c \omega(\delta) - \omega(\pi/n)(\delta n)^k.$$

Беря $\delta = \theta \pi/n$, $0 < \theta < 1$, по условию S^k (2) имеем $\omega(\delta) \gg \theta^{k-\alpha} \omega(\pi/n)$ и, следовательно,

$$E_n(f) \geq \omega(\pi/n)(c_1 \theta^{k-\alpha} - (\theta \pi)^k).$$

При достаточно малом фиксированном θ коэффициент у $\omega(\pi/n)$ будет положительным, что и требовалось.

2.2. Пусть $\omega_k(\delta; f^{(r)}) \times \omega(\delta)$ и $\omega \in S$. В силу (D), раздел 1, (11) и условия S , см. (3), $E_m(f) \ll \omega_{k+r}(\pi/m; f) \ll m^{-r} \omega(\pi/m) \ll m^{-r} \omega(\pi/n)(n/m)^\alpha$. Используя это в $(B_{r,k})$, получаем

$$\omega(\delta) \ll \omega_k(\delta; f^{(r)}) \ll (\delta^{-r} + n^r) \omega_{k+r}(\delta; f) + \sum_{m=n}^{\infty} m^{r-1} m^{-r} \omega(\pi/n) (n/m)^\alpha.$$

Следовательно,

$$(\delta^{-r} + n^r) \omega_{k+r}(\delta; f) \geq c \omega(\delta) - \omega(\pi/n).$$

Выберем $n = \pi/\theta\delta$ с подходящим θ , $0 < \theta < 1$. Ввиду (3), $\omega(\pi/n) = \omega(\theta\delta) \ll \theta^\alpha \omega(\delta)$. Тогда

$$\delta^{-r} (1 + (\pi/\theta)^r) \omega_{k+r}(\delta; f) \geq \omega(\delta) (c - c_1 \theta^\alpha).$$

Взяв достаточно малое θ , получим справа положительный коэффициент.

2.3. Пусть $\omega_k(\delta; f^{(r)}) \times \omega(\delta)$ и $\omega \in S^k \cap S$. В силу доказанного (\bar{C}_r) , $\omega_{k+r}(\delta; f) \times \delta^r \omega(\delta)$. Так как ввиду предложения 3 $\delta^r \omega \in S^{k+r}$, то, на основании доказанного (\bar{A}) , $E_n(f) \times n^{-r} \omega(\pi/n)$. Доказана равносильность (\bar{A}_r) , а вместе с ней вся теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кушниренко Г. Г. Некоторые вопросы приближения непрерывных функций на единичной сфере конечными сферическими суммами // Тр. Харьк. политехн. ин-та. Сер. инж.-физ. 1959. Т. 25, № 3. С. 3—22.
2. Pawelke S. Über Approximationordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24, N 4, P. 473—486.
3. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Теорема об аппроксимации на сфере // Anal. math. 1983. Vol. 9, N 3. С. 207—221.
4. Никольский С. М., Лизоркин П. И. Приближение сферическими полиномами // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 186—200.
5. Терехин А. П. Равномерное приближение алгебраическими многочленами на сфере нечетномерного пространства // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 3. С. 333—341.
6. Терехин А. П. Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. Вып. 2. С. 3—28.
7. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
8. Никольский С. М., Лизоркин П. И. Функциональные пространства на сфере, связанные с теорией приближений // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 4. С. 509—516.
9. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
10. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 219—242.
11. Butzer P. L., Scherer K. Jackson and Bernstein-type inequalities for families of commutative operators in Banach spaces // J. Approxim. Theory. 1972. Vol. 5. P. 308—342.