Б. И. Голубов, О методе суммирования типа Абеля–Пуассона кратных рядов Фурье, *Матем. заметки*, 1980, том 27, выпуск 1, 49–59

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 1 (1980)

О МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ ТИПА АБЕЛЯ — ПУАССОНА КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Б. И. Голубов

Хорошо известны методы суммирования Абеля — Пуассона и Гаусса — Вейерштрасса кратных рядов и интегралов Фурье (см., например, [1, стр. 12 и 285]). В настоящей работе рассматривается класс методов суммирования кратных рядов Фурье, который содержит в себе при определенных значениях параметра методы Абеля — Пуассона и Гаусса — Вейерштрасса. Изучаются свойства ядер рассматриваемых методов. Выделяется подкласс положительных ядер. На основании установленных свойств ядер доказывается регулярность рассматриваемых методов суммирования в пространствах L_p ($1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L_\infty \equiv C$) и суммируемость рядов Фурье класса L во всех точках Лебега разлагаемых функций. Кроме того, исследуется порядок приближения в метрике L_p ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) рассматриваемыми методами функций $f \in L_p$, модуль гладкости которых имеет порядок $\omega_2(\delta, f)_{L_p} = O(\delta\ )$ $(0 < \beta \leqslant 2)$.

§ 1. Определения. Пусть E_N ($N = 1, 2, \ldots$) — евклидово пространство размерности N, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ — его элементы (векторы), $xy = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$ — скалярное произведение, $|x| = \sqrt{xx}$ — длина вектора x. Положим $Q_N = \{x\colon x \in E_N,\ 0 \leqslant x_j < 1,\ j = 1, \ldots, N\}$, т. е. Q_N — единичный куб в пространстве E_N. Если не оговорено противное, то все функции $f(x)$ ниже считаются 1-периодическими по каждому аргументу x_k ($k = 1, \ldots, N$). Через $C(Q_N)$ обозначим пространство непрерывных функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{C(Q_N)} = \max_{x \in Q_N} |f(x)|.$$

Далее, через $L_p(Q_N)$ обозначим пространство 1-периодических измеримых по Лебегу функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(Q_N)} = \left(\int_{Q_N} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} < \infty \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

Для краткости индекс X будет обозначать либо одно из пространств $L_p(Q_N)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, либо пространство $C(Q_N)$. Символ $\|\cdot\|_X$ будет обозначать норму в пространстве X, а символ Z_N — целочисленную решетку в пространстве E_N.

Пусть функция $f \in X$ разложена в ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum\nolimits_{n \in Z_N} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n x}, \tag{1.1}$$

где

$$a_n = \int_{Q_N} f(x) \, \mathrm{e}^{-2\pi i n x} \, \mathrm{d}x \tag{1.2}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Для $\alpha > 0$ положим

$$A_\varepsilon^\alpha(x, f) = \sum\nolimits_{n \in Z_N} a_n \exp(2\pi i n x - \varepsilon |n|^\alpha) \quad (\varepsilon > 0). \tag{1.3}$$

Так как $a_n \to 0$ $(|n| \to \infty)$, то ряд (1.1) абсолютно сходится при любом $x \in E_N$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} A_\varepsilon^\alpha(x, f) = s, \tag{1.4}$$

то будем говорить, что ряд (1.1) в точке x суммируется к числу s методом $(A, \alpha)_N$.

Метод $(A, 1)_N$ называется методом Абеля — Пуассона, а метод $(A, 2)_N$ — методом Гаусса — Вейерштрасса (см., например, [1, стр. 12 и 285]). Выражения (1.3) будем называть $(A, \alpha)_N$-средними ряда (1.1).

Из теоремы Картрайт [2] следует, что если условие (1.4) имеет место при некотором $\alpha = \alpha_1 > 0$, то (1.4) выполняется и при всех $\alpha = \alpha_2$, $0 < \alpha_2 < \alpha_1$. Это означает, что все методы $(A, \alpha)_N$ совместны и их эффективность возрастает с уменьшением параметра $\alpha > 0$.

Если

$$\| A_\varepsilon^\alpha (x, f) - f(x) \|_X \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0)$$

для любой функции $f \in X$, то будем говорить, что метод $(A, \alpha)_N$ регулярен в пространстве X. При $N = 1$, $\alpha > 0$ и $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $N = 2, 3, \ldots$ методы $(A, \alpha)_N$ регулярны в пространстве X (см., например, [3, стр. 261] и [1, стр. 283—285]). Ниже доказывается, что методы $(A, \alpha)_N$ регулярны в пространстве X при всех $\alpha > 0$ и $N = 1, 2, \ldots$

Кроме того, при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ известно, что в каждой точке Лебега функции $f \in L(Q_N)$ $(1 \leqslant N < \infty)$ ее $(A, \alpha)_N$-средние сходятся к ней (см., например, [1, стр. 283—285]). Ниже доказывается, что этот факт имеет место при всех $\alpha > 0$ и $N = 1, 2, \ldots$

Напомним, что точкой Лебега функции $f \in L(Q_N)$ называется всякая точка $x^0 \in E_N$, в которой

$$\frac{1}{r^N} \int_{|x| \leqslant r} | f(x^0 + x) - f(x^0) | \, \mathrm{d}x \to 0 \qquad (r \to +0).$$

Известно, что почти все точки $x \in Q_N$ являются точками Лебега функции $f \in L(Q_N)$.

Если $f \in X$, то положим

$$\omega_2(\delta, f)_X = \sup_{|y| \leqslant \delta} \| f(x + y) + f(x - y) - 2f(x) \|_X,$$

т. е. $\omega_2(\delta, f)_X$ — модуль гладкости функции f в пространстве X. Через $Z^\alpha X$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ обозначим класс функций $f \in X$, для которых $\omega_2(\delta, f)_X = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \to +0$.

Для $N = 1$ известно (см., например, [3, стр. 261]), что если $0 < \beta \leqslant 2$ и $\beta < \alpha$, или $\beta = \alpha = 2$ (см. [4]), то

$$\| A_{\varepsilon^\alpha}^\alpha (x, f) - f(x) \|_X = O(\varepsilon^\beta)$$

для всякой функции $f \in Z^\beta X$. Ниже эти результаты распространяются на многомерный случай. Однако для четных размерностей N накладывается дополнительное ограничение $\alpha \geqslant 1$.

§ 2. Вспомогательные утверждения. Подставляя выражения коэффициентов из (1.2) в (1.1), получим

$$A_\varepsilon^\alpha (x, f) = \int_{Q_N} f(y) S_N^\alpha (x - y, \varepsilon) \, \mathrm{d}y, \tag{2.1}$$

где

$$S_N^\alpha(x, \varepsilon) = \sum\nolimits_{n \in Z_N} \exp(2\pi i n x - \varepsilon |n|^\alpha) \tag{2.2}$$

— ядро метода $(A, \alpha)_N$. Ядро (2.2) можно записать с помощью сумматорной функции

$$\varphi_\varepsilon^\alpha(x) = \exp(-\varepsilon\ |\ x\ |^\alpha). \tag{2.3}$$

Обозначим через $\hat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(x)$ ее преобразование Фурье, т. е. пусть

$$\hat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(x) = \int_{E_N} \exp(-2\pi i x y - \varepsilon |y|^\alpha)\, \mathrm{d}y. \tag{2.4}$$

Так как функция (2.3) является радиальной, т. е. ее значения зависят лишь от $|x|$, то ее преобразование Фурье (2.4) также является радиальной функцией. Очевидно, что функция (2.4) принимает лишь действительные значения.

ЛЕММА 1[1]). *Для* $0 < \alpha \leqslant 2$, $N = 1, 2, \ldots, \varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\hat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(x) \geqslant 0, \quad x \in E_N. \tag{2.5}$$

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $\varepsilon = 1$. Воспользуемся формулой Бохнера [6]

$$\int_{E_N} \varphi(|x|) \exp(ixy)\, \mathrm{d}x = \\ = (2\pi)^{N/2} |y|^{-N} \int_0^{+\infty} \varphi(t/|y|)\, t^{N/2} J_{N/2-1}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{2.6}$$

где $y \neq 0$, $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν, а $\varphi(t)$ — измеримая по Лебегу на полуоси $[0, +\infty)$ интегрируемая на конечных отрезках $[0, a]$ функция. Интеграл в левой части равенства (2.6) понимается в смысле главного значения.

При $\varphi(|x|) = \varphi_1^\alpha(x)$ (см. (2.3)) на основании (2.6) имеем

$$\hat{\varphi}_1^\alpha(x) = \frac{2\pi}{|x|^{N/2-1}} \int_0^\infty \exp(-t^\alpha)\, t^{N/2} J_{N/2-1}(2\pi |x| t)\, \mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

---

[1]) Для $N = 1$ утверждение этой леммы известно (см., например, [5, стр. 115]).

Введем обозначение

$$H_N(\alpha, z) = \int_0^\infty \exp(-t^\alpha)\, t^{N/2} J_{N/2-1}(zt)\, dt. \qquad (2.8)$$

Тогда (см. [7, стр. 730])

$$H_N(2, z) = 2^{-N/2} z^{N/2-1} \exp(-z^2/4). \qquad (2.9)$$

Таким образом, $H_N(2, z) > 0$, $z > 0$.

Пусть теперь $0 < \alpha < 2$. Тогда легко видеть, что функция

$$g(s) \equiv g_\alpha(s) = \int_s^\infty \exp(-t^{\alpha/2})\, dt \qquad (s > 0)$$

является вполне монотонной на полуоси $s > 0$, т. е.

$$g^{(2k-1)}(s) < 0,\ g^{(2k)}(s) > 0 \qquad (s > 0,\ k = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, она представима в виде

$$\int_s^\infty \exp(-t^{\alpha/2})\, dt = \int_0^\infty \exp(-st)\, d\sigma(t), \qquad (2.10)$$

где $\sigma(t) \doteq \sigma_\alpha(t)$ — неубывающая на полуоси $t > 0$ функция, причем интеграл в правой части равенства (2.10) является бесконечно дифференцируемой функцией параметра $s > 0$. В частности (см. [8, стр. 255]),

$$\exp(-s^{\alpha/2}) = \int_0^\infty t \exp(-st)\, d\sigma(t). \qquad (2.11)$$

Заменяя в равенстве (2.11) s на s^2, получим

$$\exp(-s^\alpha) = \int_0^{+\infty} t \exp(-s^2 t)\, d\sigma(t) \qquad (s > 0). \qquad (2.12)$$

Поскольку левая часть равенства (2.12) имеет конечный предел при $s \to +0$, то интеграл

$$\int_0^{+\infty} t\, d\sigma(t) \qquad (2.13)$$

сходится. Умножим обе части равенства (2.12) на $s^{N/2} J_{N/2-1}(zs)$, проинтегрируем по s от 0 до $+\infty$ и в правой части полученного равенства поменяем порядок интегрирования. (Возможность перемены порядка интегрирования обосновывается ниже.) Тогда, учитывая обозначение (2.8), получим

$$H_N(\alpha, z) = \int_0^\infty t\, d\sigma(t) \int_0^\infty s^{N/2} J_{N/2-1}(zs) \exp(-s^2 t)\, ds, \qquad (2.14)$$

т. е.

$$H_N(\alpha, z) = \int_0^\infty t^{1/2-N/4} H_N\left(2, \frac{z}{\sqrt{t}}\right) d\sigma(t). \qquad (2.15)$$

Согласно (2.9) $H_N(2, z) > 0$ при $z > 0$. Поэтому из (2.15), учитывая монотонное возрастание функции $\sigma(t)$, получаем неравенство $H_N(\alpha, z) \geqslant 0$ при $z > 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$. Но это согласно (2.7) и (2.8) равносильно утверждению леммы 1.

Отметим, что интеграл в правой части равенства (2.14) действительно сходится при любом $z > 0$. В самом деле, на основании (2.9) он равен

$$2^{-N/2} z^{N/2-1} \int_0^\infty t^{1-N/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) d\sigma(t),$$

а этот интеграл сходится, поскольку сходится интеграл (2.13). Возможность перемены порядка интегрирования при получении равенства (2.14) вытекает из сходимости интеграла в правой части равенства (2.14) и неотрицательности подынтегральной функции в этом повторном интеграле. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. При $N = 1$ и $\alpha > 2$ функция $\hat{\varphi}_1^\alpha(x)$ является знакопеременной (см. [5, стр. 115]). Из этого факта можно вывести (см. [8, стр. 239—250]), что эта функция является знакопеременной и в пространстве E_N при $\alpha > 2$ и $N = 1, 2, \ldots$

ЛЕММА 2. *Если* $\alpha \geqslant 1$, $N = 1, 2, \ldots$, *то*

$$\hat{\varphi}_1^\alpha(x) = O(|x|^{-N-\alpha}) \qquad (|x| \to +\infty). \qquad (2.16)$$

Доказательство см. в [14].

ЛЕММА 3. *При* $N = 1, 2, \ldots, \alpha > 0$ *имеем*

$$\|\hat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(x)\|_{L(E_N)} = \|\hat{\varphi}_1^\alpha(x)\|_{L(E_N)} < \infty \qquad (\varepsilon > 0). \qquad (2.17)$$

Доказательство. Тот факт, что при всех $\varepsilon > 0$ в (2.17) имеет место знак равенства, проверяется непосредственно. Докажем, что $\hat{\varphi}_1^\alpha(x) \in L(E_N)$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $0 < \alpha \leqslant 2$. Тогда согласно лемме 1 $\hat{\varphi}_1^\alpha(x) \geqslant 0$ $(x \in E_N)$. А так как функция $\varphi_1^\alpha(x) \in L(E_N)$ непрерывна в точке $x = 0$, то включение $\hat{\varphi}_1^\alpha(x) \in L(E_N)$ легко вытекает из леммы Фату (см., например, [1, стр. 23]).

б) Пусть $\alpha > 2$. Поскольку функция $\varphi_1^\alpha(x)$ непрерывна в E_N, а согласно лемме 2 имеет место оценка (2.16), то $\hat{\varphi}_1^\alpha(x) \in L(E_N)$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4 (см. [10, стр. 207]). *Если* $N = 2r + 1$ $(r = 0, 1, \ldots)$, *то*

$$J_{N/2-1}(t) = \sqrt{2/\pi t}\,\mathrm{Re}\,\{e^{-(r\pi i)/2} W_r(t)\},$$

где

$$W_r(t) = e^{it}\left\{1 - \frac{(2r-1)^2 - 1}{8it} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(-1)^{r-1}}{(8it)^r (r-1)!}\right\} [(2r-1)^2 - 1^2]\,[(2r-1)^2 - 3^2] \ldots$$
$$\ldots [(2r-1)^2 - (2r-3)^2].$$

ЛЕММА 5. *Пусть* $\gamma \geqslant 1$, $\beta > 0$, *функция* $f(t) \in C^\infty[0, +\infty)$ *в* $+\infty$ *обращается в нуль вместе со всеми своими производными, причем* $t^{\beta-1} f^{(n)}(t) \in L[0, +\infty)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. *Тогда справедливо асимптотическое разложение*

$$\int_0^{+\infty} t^{\beta-1} f(t) \exp(i\lambda t^\gamma)\,dt \sim \sum_{k=0}^\infty a_k \lambda^{-(k+\beta)/\gamma} \qquad (\lambda \to +\infty),$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!\,\gamma}\,\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\gamma}\right) \exp\left[\frac{i\pi(k+\beta)}{2\gamma}\right].$$

Эта лемма фактически доказана Эрдейи (см., например, [11, стр. 97—101]).

ЛЕММА 6. *Если* $N = 2r + 1$, $r = 0, 1, \ldots, 0 < \alpha < 1$, *то при* $|x| \to +\infty$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$\hat{\varphi}_1^\alpha(x) \sim \frac{2}{(2\pi)^{r+1} |x|^N} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k \cos(\alpha k + 1)(\pi/2)}{k!\,(2\pi|x|)^{\alpha k}}\, a_{r,k}, \tag{2.18}$$

где

$$a_{r,k} = \sum_{m=0}^r 8^{-m} \alpha_m \Gamma(\alpha k + r - m + 1),$$

причем $\alpha_0 = 1$, *а при* $m = 1, 2, \ldots, r$

$$\alpha_m = [(2r-1)^2 - 1^2]\,[(2r-1)^2 - 3^2] \ldots \\ \ldots [(2r-1)^2 - (2m-1)^2].$$

Доказательство. Положим $\lambda = 2\pi\,|x|$. Тогда на основании равенства (2.7) и леммы 4 получим

$$\widehat{\varphi}_1^{\alpha}(x) = \frac{2}{|x|^r}\,\mathrm{Re}\sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m \alpha_m e^{-\frac{i\pi}{2}(r+m)}}{(8\lambda)^m}\cdot \\ \cdot \int_0^{\infty} t^{r-m} \exp(-t^{\alpha} + i\lambda t)\,dt.$$

Произведем в последнем интеграле замену переменной $t^{\alpha} = u$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_1^{\alpha}(x) = \frac{2}{|x|^r}\,\mathrm{Re}\sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m \alpha_m e^{-\frac{i\pi}{2}(r+m)}}{(8\lambda)^m}\cdot \\ \cdot \int_0^{\infty} u^{\beta_m - 1} e^{-u} \exp(i\lambda u^{\gamma})\,du,$$

где $\beta_m = (r - m + 1)/\alpha$, $\gamma = 1/\alpha$. Применяя к интегралам в правой части этого равенства лемму 5, получим (2.18). Лемма 6 доказана.

Утверждение леммы 6 для $N = 1$ известно (см. [12, стр. 172]).

§ 3. Основные результаты. Формулируемые ниже результаты доказываются на основании установленных лемм стандартными для теории кратных рядов Фурье методами.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых* $\alpha > 0$ *и* $N = 1, 2, \ldots$ *метод* $(A, \alpha)_N$ *регулярен в пространстве* X, *где* $X = L_p(Q_N)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *или* $X = C(Q_N)$.

Доказательство. Если $f \in X$, то на основании равенства (2.1), применяя неравенство Минковского, получим

$$\| A_{\varepsilon}^{\alpha}(x, f) \|_X \leqslant \| f \|_X \, \| S_N^{\alpha}(x, \varepsilon) \|_{L(Q_N)}. \tag{3.1}$$

Но согласно формуле суммирования Пуассона (см., например, [1, стр. 281]) имеем почти всюду в E_N равенство

$$S_N^{\alpha}(x, \varepsilon) = \sum_{n \in Z_N} \widehat{\varphi}_{\varepsilon}^{\alpha}(x + n), \tag{3.2}$$

причем

$$\| S_N^{\alpha}(x, \varepsilon) \|_{L(Q_N)} \leqslant \| \widehat{\varphi}_{\varepsilon}^{\alpha}(x) \|_{L(E_N)} = \| \widehat{\varphi}_1^{\alpha}(x) \|_{L(E_N)}.$$

На основании леммы 3 правая часть этого неравенства конечна. Следовательно, из (3.1) вытекает, что нормы операторов $A_\varepsilon^\alpha(x, f)$, как операторов из X в X, равномерно ограничены относительно $\varepsilon > 0$. А так как для тригонометрических полиномов вида $f(x) = \sum a_n e^{inx}$ (сумма конечна) операторы $A_\varepsilon^\alpha(x, f)$, очевидно, сходятся к ним при $\varepsilon \to +0$, то в силу теоремы Банаха — Штейнгауза отсюда вытекает утверждение теоремы 1.

Отметим, что для $N = 1$, $\alpha > 0$ и $N = 1, 2, \ldots$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ утверждение теоремы 1 известно (см. [3, стр. 261] и [1, стр. 283—285]).

З а м е ч а н и е 2. Из леммы 1 и равенства (3.2) следует, что при $0 < \alpha \leqslant 2$, $N = 1, 2, \ldots$ почти всюду в E_N справедливо неравенство

$$S_N^\alpha(x, \varepsilon) \geqslant 0 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Но так как функция $S_N^\alpha(x, \varepsilon)$ непрерывна в E_N (см. (2.2)), то это неравенство имеет место всюду в E_N.

Этот результат ранее был получен Бохнером [13] иным путем.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого* $\alpha > 0$ *и* $N = 1, 2, \ldots$ *в каждой точке Лебега функции* $f \in L(Q_N)$ *имеем*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} A_\varepsilon^\alpha(x, f) = f(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу упомянутого результата Картрайт [2] достаточно рассмотреть лишь случай $\alpha > 1$. Но при этом согласно лемме 2 выполняется условие (2.16), причем функция $\varphi_\varepsilon^\alpha(x)$ (см. (2.3)) также удовлетворяет условию (2.16). Поэтому утверждение теоремы 2 вытекает из известного результата (см., например, [1, стр. 283, теорема 2.11]).

Для $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ утверждение теоремы 2 было известно (см. [1, стр. 283—285]).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $f \in Z^\beta X$. *Тогда*: а) *если* N *нечетно, то условие*

$$\| f(x) - A_{\varepsilon\alpha}^\alpha(x, f) \|_X = O(\varepsilon^\beta) \qquad (\varepsilon \to +0) \tag{3.3}$$

имеет место при $0 < \beta < \alpha$, $0 < \beta \leqslant 2$;

б) *если же* N *четно, то условие* (3.3) *выполняется при* $0 < \beta < \alpha$, $\alpha \geqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 2$;

в) *при любом натуральном* N *и* $\alpha = \beta = 2$ *условие* (3.3) *также выполняется.*

Доказательство. Пусть $f \in Z^\beta X$. Из (2.2) видно, что $S_N^\alpha(-x, \varepsilon) = S_N^\alpha(x, \varepsilon)$. Поэтому формула суммирования Пуассона (3.2), примененная в равенстве (2.1), на основании периодичности функции f приводит к равенству

$$A_\varepsilon^\alpha(x, f) = \int_{E_N} f(x+y)\,\widehat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(y)\,\mathrm{d}y.$$

Отсюда получаем

$$A_\varepsilon^\alpha(x, f) - f(x) = \int_{E_N} [f(x+y) - f(x)]\,\widehat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(y)\,\mathrm{d}y. \quad (3.4)$$

Но в силу четности функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(x)$ из (3.4) следует

$$A_\varepsilon^\alpha(x, f) - f(x) = \frac{1}{2}\int_{E_N} \Delta_y^2(x, f)\,\widehat{\varphi}_\varepsilon^\alpha(y)\,\mathrm{d}y, \quad (3.5)$$

где

$$\Delta_y^2(x, f) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x).$$

Так как $f \in Z^\beta X$, то из (3.5) получаем

$$\| A_{\varepsilon^\alpha}^\alpha(x, f) - f(x) \|_X \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{E_N} |y|^\beta\, |\widehat{\varphi}_{\varepsilon^\alpha}^\alpha(y)|\,\mathrm{d}y = C\varepsilon^\beta \int_{E_N} |u|^\beta\, |\widehat{\varphi}_1^\alpha(u)|\,\mathrm{d}u. \quad (3.6)$$

Если $0 < \beta < \alpha$ и N нечетно, то на основании лемм 2 и 6 последний интеграл в правой части (3.6) сходится. Если же N четно, $0 < \beta < \alpha$ и $\alpha \geqslant 1$, то этот интеграл сходится согласно лемме 2. Наконец, при любом натуральном N согласно (2.7) — (2.9)

$$\widehat{\varphi}_1^2(x) = \pi^{N/2} \exp(-\pi^2\, |x|^2)$$

и последний интеграл в правой части (3.6) также сходится при $\beta = \alpha = 2$. Теорема 3 доказана.

Для $N = 1$ утверждение пункта а) теоремы 3 доказано в [3, стр. 261], а утверждение пункта в) — в [4].

Московский физико-технический институт

Поступило 31.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., «Мир», 1974.

[2] Cartright M. L., On the relation between the different types of Abel summation, Proc. London Math. Soc., 31, № 2 (1930), 81—96.

[3] Butzer P. L., Nessel R. J., Fourier analysis and approximation, v. 1, N. Y., London, 1971.
[4] Коровкин П. П., О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами, Докл. АН СССР, **127**, № 3 (1959), 513—515.
[5] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, М., Физматгиз, 1962.
[6] Bochner S., Theta relations with spherical harmonics, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37**, № 12 (1951), 804—808.
[7] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.
[8] Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов, М., Физматгиз, 1961.
[9] Right E. M., The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function, J. London Math. Soc., **10**, № 4 (1935), 286—293.
[10] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, II, М., ИЛ, 1963.
[11] Федорюк М. В., Метод перевала, М., Физматгиз, 1977.
[12] Levy P., Calcul des probabilités, Paris, 1925.
[13] Bochner S., Quasi-analytic functions, Laplace operator, positiv kernels, Ann. Math., **51**, № 1 (1950), 68—91.
[14] Федорюк М. В., Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения, Дифф. уравнения, **14**, № 7 (1978), 1296—1301.