Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов, Метод вычисления волноводной матрицы рассеяния в окрестности порогов, *Алгебра и анализ*, 2014, том 26, выпуск 1, 128–164

Алгебра и анализ
Том 26 (2014), №1

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЛНОВОДНОЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОРОГОВ

© Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ, А. С. ПОРЕЦКИЙ, О. В. САРАФАНОВ

Волновод занимает область G в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, которая имеет несколько цилиндрических выходов на бесконечность. Волновод описывается задачей Дирихле для уравнения Гельмгольца. Матрица рассеяния $S(\mu)$, где μ — спектральный параметр, меняет размер при переходе μ через пороговое значение. Для вычисления $S(\mu)$ в окрестности порога вводится „расширенная" матрица рассеяния $\mathcal{S}(\mu)$, которая сохраняет размер вблизи порога и является там аналитической функцией параметра μ. В качестве приближения для строки матрицы $\mathcal{S}(\mu)$ предлагается минимизатор некоторого квадратичного функционала $J^R(\cdot, \mu)$. Функционал строится посредством решения вспомогательной краевой задачи в ограниченной области, полученной отрезанием на расстоянии R выходов волновода на бесконечность. Доказывается, что минимизатор $a(R, \mu)$ при $R \to \infty$ стремится с экспоненциальной скоростью к соответствующей строке матрицы $\mathcal{S}(\mu)$ равномерно относительно μ в окрестности порога. При этом не исключается присутствие в упомянутой окрестности собственных значений волновода (которым отвечают собственные функции, экспоненциально затухающие на бесконечности). Наконец, элементы „обычной" матрицы рассеяния $S(\mu)$ выражаются через элементы матрицы $\mathcal{S}(\mu)$.

Если отрезок $[\mu_1, \mu_2]$ непрерывного спектра не содержит порогов, то соответствующий функционал $J^R(\cdot, \mu)$ определяется для обычной матрицы $S(\mu)$, а его минимизатор $a(R, \mu)$ стремится при $R \to \infty$ к строке матрицы рассеяния с экспоненциальной скоростью равномерно на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

§1. Введение

Волновод, рассматриваемый в статье, занимает область G в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с гладкой границей ∂G и конечным числом цилиндрических выходов на бесконечность Это означает, что вне большого шара с центром

Ключевые слова: расширенная матрица, пределы на порогах, минимизатор функционала, экспоненциальная сходимость.

Работа поддерживалась грантами РФФИ 12-01-00247а и НШ 357.2012.1.

в начале координат область G совпадает с объединением непересекающихся полуцилиндров $\Pi_+^1, \dots, \Pi_+^{\mathcal{T}}$; здесь $\Pi_+^p = \{(y^p, t^p) : y^p \in \Omega^p, t^p > 0\}$, (y^p, t^p) — локальные координаты в Π_+^p и сечение Ω^p цилиндра Π^p является ограниченной областью в n-мерном евклидовом пространстве. Волновод описывается задачей Дирихле для оператора $-\Delta - \mu$, где μ — спектральный параметр и Δ — оператор Лапласа. Непрерывный спектр задачи совпадает с полуосью $\{\mu \in \mathbb{R} : \tau_1 \leqslant \mu\}$, причем τ_1 — некоторое положительное число. Для каждой точки $\mu \in [\tau_1, +\infty)$ существует конечное число $\varkappa(\mu)$ решений однородной задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) = 0, \quad & x \in G, \\ u(x) = 0, \quad & x \in \partial G, \end{aligned} \tag{1.1}$$

допускающих оценку $|u(x)| \leqslant \mathrm{const}(1 + |x|)$ в области G и линейно независимых по модулю $L_2(G)$. Такие решения называются собственными функциями непрерывного спектра, а число $\varkappa(\mu)$ — кратностью непрерывного спектра. Пороговые значения спектрального параметра (пороги) образуют последовательность $\tau_1 < \tau_2, \dots, \tau_n \to +\infty$. Кратность $\varkappa(\mu)$ остается постоянной на каждом отрезке $[\mu', \mu'']$ непрерывного спектра, не содержащем порогов. Функция $\mu \mapsto \varkappa(\mu)$ терпит разрыв на порогах, оказываясь непрерывной справа. Это возрастающая функция, так что $\varkappa(\mu) \to +\infty$ при $\mu \to +\infty$.

На непрерывном спектре могут располагаться и собственные значения задачи (1.1), которым отвечают собственные функции из $L_2(G)$. Всякая собственная функция экспоненциально затухает на бесконечности, любое собственное значение имеет конечную кратность, а сгущаться собственные значения могут разве лишь на бесконечности. Собственное значение μ_0 не влияет на кратность непрерывного спектра в точке μ_0, поскольку $\varkappa(\mu_0)$ учитывает только линейную независимость по модулю $L_2(G)$. Если μ не является собственным значением, то в определении $\varkappa(\mu)$ можно заменить линейную независимость по модулю $L_2(G)$ обычной линейной независимостью.

Известно [1], что при каждом $\mu \in [\tau_1, +\infty]$ в пространстве собственных функций непрерывного спектра существует базис $Y_1(\cdot, \mu), \dots, Y_M(\cdot, \mu)$ по модулю $L_2(G)$ такой, что

$$Y_j(x, \mu) = u_j^+(x, \mu) + \sum_{k=1}^{\varkappa(\mu)} S_{jk}(\mu) u_k^-(x, \mu) + O(e^{-\varepsilon|x|}) \tag{1.2}$$

при $|x| \to \infty$ и $j = 1, \dots, \varkappa(\mu)$; здесь ε — достаточно малое число, $u_j^+(\cdot, \mu)$ — „приходящие волны“, а $u_j^-(\cdot, \mu)$ — „уходящие“ (точные определения см. в п. 2.2). Матрица $S(\mu) = \|S_{jk}(\mu)\|$ унитарная; она называется матрицей рассеяния.

В статьях [2, 3] обсуждался метод приближенного вычисления матрицы $S(\mu)$ при условии, что параметр μ меняется на отрезке $[\mu', \mu'']$ непрерывного спектра, не содержащем порогов. Коротко говоря, в качестве приближения для l-й строки $S_l(\mu) = (S_{l,1}(\mu), \dots, S_{l,M}(\mu))$ матрицы рассеяния выбирается вектор $a(R, \mu)$, минимизирующий квадратичный функционал $J_l^R(\cdot, \mu)$. Этот функционал строится посредством решения вспомогательной краевой задачи в ограниченной области G^R, которая получается из G отрезанием выходов на бесконечность на достаточно далеком расстоянии R от начала координат. Было установлено, что при $R \geqslant R_0$ и всех $\mu \in [\mu', \mu'']$ справедлива оценка

$$\|a(R, \mu) - S_l(\mu)\| \leqslant Ce^{-\gamma R} \tag{1.3}$$

с положительным числом γ и постоянной C, не зависящими ни от R, ни от μ. В [2] рассматривались двумерные волноводы и оператор Гельмгольца, а в [3] — волноводы произвольной размерности и самосопряженные краевые задачи для эллиптических систем любого порядка. Подход, предложенный в [3], оказывается новым и для оператора Гельмгольца, причем более простым, чем в работе [2].

Настоящая статья посвящена методу приближенного вычисления матрицы рассеяния в окрестности порогов. Наметим здесь его описание. Пусть $\tau' < \tau''$ — пороги задачи (1.1), между которыми расположен единственный порог τ. Будем считать, что все три порога связаны с одним и тем же выходом на бесконечность. Цель состоит в том, чтобы (приближенно) вычислить матрицу рассеяния $S(\mu)$ из формулы (1.2) при $\mu \in [\mu', \mu'']$, где $\tau \in [\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$.

На интервале (τ, τ'') можно выбрать базис приходящих $w_1^+(\cdot, \mu), \dots, w_\varkappa^+(\cdot, \mu)$ и уходящих $w_1^-(\cdot, \mu), \dots, w_\varkappa^-(\cdot, \mu)$ волн с аналитическими функциями $(\tau, \tau'') \ni \mu \mapsto w_j^\pm(\cdot, \mu)$, допускающими аналитическое продолжение на интервал (τ', τ''); здесь $\varkappa = \varkappa(\mu'')$ (напомним, что $\varkappa(\mu) = \mathrm{const}$ при $\mu \in [\tau, \tau''))$. Такой базис волн будем называть устойчивым на пороге τ. Для $\mu \in (\tau', \tau)$ часть приходящих волн и столько же уходящих оказываются экспоненциально растущими при $x \to \infty$. На интервале (τ, τ'') в пространстве собственных функций непрерывного спектра существует базис $\mathcal{Y}_1(\cdot, \mu), \dots, \mathcal{Y}_\varkappa(\cdot, \mu)$, подчиненный условиям

$$\mathcal{Y}_j(x, \mu) = w_j^+(x, \mu) - \sum_{k=1}^{M} \mathcal{S}_{jk}(\mu) w_k^-(x, \mu) + O(e^{-\varepsilon|x|}). \tag{1.4}$$

Функции $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j(\cdot,\mu)$ и $\mu \mapsto \mathcal{S}_{jk}(\mu)$ являются аналитическими и допускают аналитическое продолжение на интервал (τ', τ''). В отличие от матрицы $S(\mu)$ новая матрица $\mathcal{S}(\mu) = \|\mathcal{S}_{jk}(\mu)\|$ сохраняет размер на этом интервале; она оказывается унитарной при всех $\mu \in (\tau', \tau'')$. Элементы матрицы $S(\mu)$ выражаются в терминах, связанных только с матрицей $\mathcal{S}(\mu)$. Это позволяет, в частности, доказать существование конечных пределов $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau \pm 0$ и вычислить такие пределы, а приближенное вычисление матрицы $S(\mu)$ на отрезке $[\mu', \mu'']$ свести по существу к вычислению на этом отрезке матрицы $\mathcal{S}(\mu)$. В качестве приближения для строки матрицы $\mathcal{S}(\mu)$ предлагается минимизатор некоторого квадратичного функционала $\mathcal{J}^R(\cdot,\mu)$. Для построения функционала понадобится краевая задача в ограниченной области G^R, полученной отрезанием на расстоянии R выходов волновода на бесконечность. Положим

$$\Pi_+^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r > R\}, \quad G^R = G \setminus \cup_{r=1}^{\mathcal{T}} \Pi_+^{r,R},$$
$$\partial G^R \setminus \partial G = \Gamma^R = \cup_r \Gamma^{r,R}, \quad \Gamma^{r,R} = \{(y^r, t^r) \in \Pi^r : t^r = R\}$$

при больших R и введем краевую задачу

$$-\Delta \mathcal{X}_j^R - \mu \mathcal{X}_j^R = 0, \quad x \in G^R;$$
$$\mathcal{X}_j^R = 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R;$$
$$(-\partial_n + i\zeta)\mathcal{X}_j^R = (-\partial_n + i\zeta)\Big(w_j^+ + \sum_{k=1}^{M} a_k w_k^-\Big), \quad x \in \Gamma^R,$$

где $w_j^\pm$ — устойчивый базис в пространстве волн, $\zeta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ — произвольное фиксированное число и a_k — комплексные числа. Приближением для строки $(\mathcal{S}_{j1}(\mu), \ldots, \mathcal{S}_{jM}(\mu)$ возьмем минимизатор $a^0(R,\mu) = (a_1^0(R,\mu), \ldots, a_M^0(R,\mu))$ функционала

$$\mathcal{J}_j^R(a_1, \ldots, a_M) = \Big\|\mathcal{X}_j^R(\cdot,\mu) - w_j^+(\cdot,\mu) - \sum_{k=1}^{M} a_k w_k^-(\cdot,\mu); L_2(\Gamma^R)\Big\|^2,$$

где $\mathcal{X}_j^R(\cdot,\mu)$ — решение указанной краевой задачи. Если $\tau \in [\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$, то справедливо неравенство

$$\|a(R,\mu) - \mathcal{S}_j(\mu)\| \leqslant C(\Lambda) e^{-\Lambda R},$$

которое выполняется для всех $\mu \in [\mu', \mu'']$ и $R \geqslant R_0$ с положительными константами Λ и $C(\Lambda)$, не зависящими ни от μ, ни от R.

Отметим, что в асимптотических исследованиях в разных „пороговых“ ситуациях использование „устойчивых базисов“ является довольно традиционным. В этой связи укажем статьи [4] и [5], связанные с асимптотикой решений эллиптических краевых задач вблизи ребер на границе. В работах [6] асимптотика матрицы рассеяния для двумерной диффракционной решетки вблизи порога была обоснована по существу с помощью устойчивого базиса волн.

В настоящей статье §2 посвящен построению устойчивого базиса волн в окрестности пороговых значений для волновода в области G. Собственные функции непрерывного спектра и матрицы рассеяния $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$ вводятся в §3. Там же доказывается аналитичность этих матриц на соответствующих интервалах непрерывного спектра. В §4 описывается связь матриц $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$ и вычисляются односторонние пределы матрицы $S(\mu)$ на пороге. Последний §5 содержит формулировку и обоснование метода приближенного вычисления матриц рассеяния.

§2. Расширенное пространство волн

2.1. Волны в цилиндре. В цилиндре $\Pi = \{(y,t) : y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega, t \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - \mu)u(y,t) &= 0, \quad (y,t) \in \Pi, \\ u(y,t) &= 0, \quad (y,t) \in \partial\Pi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\Delta = \Delta_y + \partial_t^2, \quad \Delta_y = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2, \quad \partial_j = \partial/\partial y_j.$$

Свяжем с задачей (2.1) операторный пучок $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda, \mu)$, полагая

$$\mathfrak{A}(\lambda,\mu)v(y) = (-\Delta_y + \lambda^2 - \mu)v(y), \quad y \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2}$$

Спектр операторного пучка (при каждом фиксированном $\mu \in \mathbb{R}$) составляют изолированные собственные значения, расположенные на осях комплексной плоскости. Число $\lambda = 0$ является собственным для пучка $\mathfrak{A}(\cdot, \mu)$ в том и только в том случае, когда μ — собственное число задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta_y - \mu)v(y) &= 0, \quad y \in \Omega, \\ v(y) &= 0, \quad y \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Собственные числа задачи (2.3) называются порогами для задачи (2.1). Пороги образуют положительную последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, строго возрастающую к бесконечности. Введем неубывающую последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных чисел задачи (2.3), пронумерованных с учетом кратности (нумерации чисел τ_l и μ_k, вообще говоря, различны; каждое число μ_k совпадает с одним из порогов τ_l). Будем считать, что соответствующие собственные векторы φ_k ортогональны и нормированы условием

$$\int_\Omega \varphi_k(y)\overline{\varphi_k(y)}\,dy = 1. \tag{2.4}$$

Для всякого μ собственные числа $\lambda_k^\pm$ пучка $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda,\mu)$ определяются равенствами $\lambda_k^\pm = \pm(\mu-\mu_k)^{1/2}$. Если при этом $\lambda_k^\pm \neq 0$, то собственным числам $\lambda_k^\pm$ отвечает один и тот же собственный вектор φ_k (который является и собственным вектором задачи (2.3), отвечающим собственному числу μ_k). Присоединенных векторов в этом случае нет. Если $\mu_{k-1} < \mu < \mu_k$, то числа $\lambda_k^\pm, \lambda_{k+1}^\pm, \dots$ чисто мнимые, а $\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_{k-1}^\pm$ — вещественные. Если же $\mu = \mu_k$ для некоторого k, то собственному числу $0 = \lambda_k^+ = \lambda_k^-$ соответствуют собственный вектор φ_k и присоединенный вектор, а следующего присоединенного вектора нет.

Фиксируем число $\mu \in \mathbb{R}$, не совпадающее ни с одним из порогов (что эквивалентно условиям $\mu \neq \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$), и натянем комплексное линейное пространство на функции

$$(y,t) \mapsto \exp(i\lambda_k^\pm t)\varphi_k(y) \tag{2.5}$$

с вещественными $\lambda_k^\pm = \pm(\mu-\mu_k)^{1/2}$; функции (2.5) удовлетворяют задаче (2.1). Обозначим это пространство через $W(\mu)$ и назовем пространством волн. Его размерность совпадает с удвоенным количеством чисел μ_k (пронумерованных с учетом кратности), для которых $\mu_k < \mu$. Функции

$$u_k^\pm(y,t;\mu) = (2|\lambda_k^\mp|)^{-1/2}\exp(i\lambda_k^\mp t)\varphi_k(y) \tag{2.6}$$

составляют базис в пространстве $W(\mu)$. Назовем $u_k^+(\cdot,\mu)$ волной, приходящей из $+\infty$, а $u_k^-(\cdot,\mu)$ — волной, уходящей в $+\infty$.

Пусть теперь $\mu = \tau$ — один из порогов и, значит, собственное число задачи (2.3) кратности $\varkappa \geqslant 1$. Тогда $\varkappa$ чисел μ_l удовлетворяют равенству $\mu_l = \tau$. Для каждого такого l функции $\exp(i\lambda_l^+ t)\varphi_l(y)$ и $\exp(i\lambda_l^- t)\varphi_l(y)$ совпадают. Поэтому количество линейно независимых функций вида (2.5) при $\mu = \tau$ на $\varkappa$ меньше, чем при μ, подчиненных условию $\tau < \mu < \tau + \beta$ с малым $\beta > 0$. Однако при более общем понятии волн размерность пространства $W(\mu)$ непрерывна справа на пороге. В этом случае определение приходящих и уходящих волн основано на энергетических соображениях, как и в принципах Зоммерфельда и Мандельштама.

Для такого определения введем форму

$$\begin{aligned} q_N(u,v) := {}&((-\Delta-\mu)u,v)_{\Pi(N)} + (u,-\partial_\nu v)_{\partial\Pi(N)\cap\partial\Pi} \\ &- (u,(-\Delta-\mu)v)_{\Pi(N)} - (-\partial_\nu u,v)_{\partial\Pi(N)\cap\partial\Pi}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\Pi(N) = \{(y,t) \in \Pi : t < N\}$, число $\mu \in \mathbb{R}$ пока считаем непороговым, $u = \chi f$ и $v = \chi g$, а в качестве f и g примем любые из функций (2.6), отвечающие вещественным $\lambda_k^{\pm}(\mu)$ (возможно, с разными индексами); через χ обозначена гладкая срезающая функция, $\chi(t) = 0$ для $t < T-1$ и $\chi(t) = 1$ для $t > T$, причем $T < N$. Интегрированием по частям проверяются равенства

$$iq_N(\chi u_k^{\pm}, \chi u_l^{\mp}) = 0 \text{ при всех } k, l, \tag{2.8}$$

$$iq_N(\chi u_k^{\pm}, \chi u_l^{\pm}) = \mp\delta_{kl}, \tag{2.9}$$

так что результат не зависит ни от N, ни от χ; впредь мы не выписываем индекс N, а χ сохраняем для будущих надобностей. Называя волну $u_k^+ (u_k^-)$ приходящей (уходящей) при знаке $-(+)$ справа в (2.9), мы получим определение приходящих (уходящих) волн, равносильное старому определению.

Перейдем к построению базиса в (расширенном) пространстве волн, „устойчивого на порогах". Пусть $\mu \in \mathbb{R}$ — регулярное значение спектрального параметра задачи (2.3) и пусть μ_m — собственное число с наибольшим номером, удовлетворяющее неравенству $\mu_m < \mu$. Примем еще, что $\mu_l < \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$. Таким образом, числа $\tau' := \mu_l$, $\tau := \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$ и $\tau'' := \mu_{m+1}$ оказываются тремя последовательными порогами $\tau' < \tau < \tau''$ для задачи (2.1) в цилиндре Π. (Мы обсуждаем общую ситуацию; случаи $l+1 = m$, $m = 1$ и т.п. рассматриваются с очевидными упрощениями.)

Положим

$$w_k^{\pm}(y,t;\mu) = 2^{-1/2}\Big(\frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} + e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2} \mp \frac{e^{it\sqrt{\mu-\mu_k}} - e^{-it\sqrt{\mu-\mu_k}}}{2\sqrt{\mu-\mu_k}}\Big)\varphi_k(y), \tag{2.10}$$

$$w_p^{\pm}(y,t;\mu) = u_p^{\pm}(y,t;\mu), \tag{2.11}$$

где $k = l+1, \dots, m$ и $p = 1, \dots, l$, а функции $u_p^{\pm}$ определены формулами (2.6).

Предложение 2.1. *Функции $\mu \mapsto w_k^{\pm}(y,t;\mu), k = l+1, \dots, m$, допускают аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Эти целые функции гладко зависят от параметров $y \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R}$ (т.е. любые производные по y и t также являются целыми функциями).*

Функции $\mu \mapsto w_p^{\pm}(y,t;\mu)$ аналитичны на комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $\{\mu \in \mathbb{R} : -\infty < \mu \leqslant \mu_p\}$, $p = 1, \dots, l$; они гладко зависят от y и t.

Все функции $w_k^{\pm}$, $k = 1, \ldots, m$, являются решениями задачи (2.1). *Для каждого μ из интервала* ($\tau' < \mu < +\infty$) *функции* (2.10), (2.11) *удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки*

$$iq(\chi w_r^{\pm}(\cdot\,;\mu), \chi w_s^{\mp}(\cdot\,;\mu)) = 0 \ \text{ при всех } r, s = 1, \ldots, m, \tag{2.12}$$

$$iq(\chi w_r^{\pm}(\cdot\,;\mu), \chi w_s^{\pm}(\cdot\,;\mu)) = \mp\delta_{rs}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Первая и вторая дроби в скобках из (2.10) раскладываются в ряды

$$\sum_{l\geqslant 0} \frac{(\mu_k - \mu)^l t^{2l}}{(2l)!} \quad \text{и} \quad it \sum_{l\geqslant 0} \frac{(\mu_k - \mu)^l t^{2l}}{(2l+1)!}, \tag{2.14}$$

сходящиеся абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset \{(\mu, t) : \mu \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}$. Отсюда вытекают свойства аналитичности $w_k^{\pm}(y, t; \mu)$ при $k = l+1, \ldots, m$. Соответствующие утверждения относительно $w_p^{\pm}(y, t; \mu)$ с номерами $p = 1, \ldots, l$ очевидны.

Остается проверить условия ортогональности и нормировки. Пусть сначала $\mu > \tau$. Займемся, например, формулой (2.13). Если индексы r и s различны, то равенства (2.13) вытекают из ортогональности φ_r и φ_s (как и формулы (2.8), (2.9)). Если же $r = s \leqslant l$, то нужная формула содержится в (2.9). Пусть, наконец, $r = s > l$; подставим в $q(\chi w_r^{\pm}, \chi w_s^{\pm})$ выражения (2.10). Полагая $\lambda := \sqrt{\mu - \tau}$, получим

$$\begin{aligned} iq(\chi w_s^{\pm}, \chi w_s^{\pm}) = \lambda^{-2}((\lambda \pm 1)\,(\lambda \mp 1) iq^{+-} + (\lambda \mp 1)\,(\lambda \pm 1) iq^{-+} \\ + (\lambda \mp 1)^2\, iq^{++} + (\lambda \pm 1)^2\, iq^{--}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где, например, $q^{+-} = 2^{-3} q(\chi e^{it\lambda}\varphi_s, \chi e^{-it\lambda}\varphi_s)$ и т.п. Учитывая (2.6), (2.8) и (2.9), выводим отсюда равенства (2.13).

Теперь рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \ni \mu \mapsto q_N(u, v; \mu) := ((-\Delta - \mu)u, v)_{\Pi(N)} + (u, -\partial_\nu v)_{\partial\Pi(N)\cap\partial\Pi} \\ - (u, (-\Delta - \bar{\mu})v)_{\Pi(N)} - (-\partial_\nu u, v)_{\partial\Pi(N)\cap\partial\Pi}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $\Pi(N)$, N и χ те же, что и в (2.7), $u = \chi w_r^{\pm}(\cdot\,;\mu)$ и $v = \chi w_s^{\mp}(\cdot\,;\bar{\mu})$). Ввиду аналитичности u и $\bar{v}$ функция $\mu \mapsto q_N(u, v; \mu)$ также оказывается аналитической. Поэтому равенства (2.13) (для $r = s > l$) сохраняются при всех $\mu \in \mathbb{C}$. □

Из (2.10) следует, что $w_k^{\pm}(y, t; \tau) = 2^{-1/2}(1 \mp it)\varphi_k(y)$, $k = l+1, \ldots, m$, а в случае $\mu < \tau$ амплитуды этих волн экспоненциально растут при $t \to \infty$. Пространство, натянутое на волны (2.10), (2.11), при $\tau' < \mu < \tau$ назовем расширенным (augmented) пространством волн и обозначим через $W_a(\mu)$.

Через $W(\mu)$ при $\tau \leqslant \mu < \tau''$ будем обозначать линейную оболочку функций (2.10), (2.11), а при $\tau' < \mu < \tau$ — оболочку функций (2.11); линеал $W(\mu)$ называем пространством волн. Элемент w пространства $W_a(\mu)$ (или $W(\mu)$) называется волной, приходящей из $+\infty$ (уходящей в $+\infty$), если $iq(\chi w, \chi w) < 0$ ($iq(\chi w, \chi w) > 0$).

Набор волн $\{w^{\pm}\}_{k=1}^{m}$, определенный формулами (2.10), (2.11), назовем базисом волн, устойчивым в окрестности порога τ. Базис волн вида (2.6) по определению устойчив на интервале (μ', μ''), если $[\mu', \mu'']$ не содержит порога.

2.2. Волны в области G. Пусть G — область в $\mathbb{R}^{n+1}$ с гладкой границей ∂G, совпадающая вне большого шара с объединением $\Pi_+^1 \cup \dots \cup \Pi_+^{\mathcal{T}}$ конечного числа непересекающихся полуцилиндров

$$\Pi_+^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r,\, t^r > 0\},$$

где (y^r, t^r) — локальные координаты в Π_+^r и Ω^r — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Введем задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) = 0, \quad & x \in G, \\ u(x) = 0, \quad & x \in \partial G. \end{aligned} \tag{2.17}$$

С каждым выходом Π_+^r на бесконечность свяжем задачу вида (2.1) в цилиндре $\Pi^r = \{(y^r, t^r) : y^r \in \Omega^r, t^r \in \mathbb{R}\}$. Пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — срезающая функция, $\chi(t) = 0$ при $t < 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 1$. Каждую волну в Π^r умножим на функцию $t \mapsto \chi(t^r - t_0^r)$ с некоторым $t_0^r > 0$ и распространим нулем на всю область G. Все так полученные функции (для всех Π^r) будем называть волнами в G. Число τ называется пороговым значением спектрального параметра μ для задачи (2.17) (или просто порогом), если τ — порог хотя бы для одной из задач вида (2.1) в цилиндре Π^r, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Пусть $\tau' < \tau < \tau''$ — три последовательных порога для задачи (2.17), так что интервалы (τ', τ) и (τ, τ'') свободны от пороговых значений. При $\mu \in (\tau', \tau)$ введем расширенное пространство $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ волн в области G как объединение волн в G, отвечающих волнам из $W_a(\mu)$ для Π^r, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$; если же в некотором Π^r пространство $W_a(\mu)$ не вводится на интервале $\tau' < \mu < \tau$ (т.е. τ — не порог для задачи (2.1) в таком цилиндре), тогда из этого цилиндра в пространство $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ включаются волны, порожденные элементами соответствующего $W(\mu)$. При $\mu \in (\tau', \tau'')$ пространство $\mathcal{W}(\mu, G)$ волн в G есть по определению объединение волн в G, отвечающих волнам из $W(\mu)$ для всех Π^r.

Базисы волн $\{u_j^{\pm}(\cdot, \mu)\}$ и $\{w_j^{\pm}(\cdot, \mu)\}$ в пространствах $\mathcal{W}(\mu, G)$ и $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ составляют волны, полученные в G из базисных волн в цилиндрах Π^r,

$r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Базисные волны в пространствах $\mathcal{W}(\mu, G)$ и $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ подчиняются условиям биортогональности и нормировки вида (2.8), (2.9) и (2.12), (2.13) с заменой формы q в цилиндре на форму q_G в области G:

$$\begin{aligned} q_G(u, v) := ((-\Delta - \mu)u, v)_G + (u, -\partial_\nu v)_{\partial G} \\ - (u, (-\Delta - \mu)v)_G - (-\partial_\nu u, v)_{\partial G}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Элемент w пространства $\mathcal{W}_a(\mu, G)$ (или $\mathcal{W}(\mu, G)$) называется волной, приходящей из ∞ (уходящей в ∞), если $iq_G(\chi w, \chi w) < 0$ ($iq_G(\chi w, \chi w) > 0$).

Базис волн в области G называется устойчивым в окрестности значения ν спектрального параметра, если этот базис составлен из базисов в цилиндрах $\Pi^1, \dots, \Pi^{\mathcal{T}}$, устойчивых в окрестности точки ν.

§3. Собственные функции непрерывного спектра. Матрицы рассеяния

Пусть $\tau' < \tau < \tau''$ — три последовательных порога для задачи (2.17). Ради простоты изложения примем, что эти три числа являются порогами для задачи вида (2.1) только в одном из цилиндров $\Pi^1, \dots, \Pi^{\mathcal{T}}$, например, в цилиндре $\Pi^1 = \Omega^1 \times \mathbb{R}$. Кроме того, предположим, что $\tau' = \mu_l$, $\tau = \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$ и $\tau'' = \mu_{m+1}$, где μ_k — собственные числа задачи (2.3) в области Ω^1. Таким образом, при $\Pi = \Pi^1$ мы будем иметь дело с обстановкой, рассмотренной в п. 2.1.

3.1. Естественный и расширенный принципы излучения. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \mu u(x) = f(x), \quad x \in G, \\ u(x) = g(x), \quad x \in \partial G, \end{aligned} \tag{3.1}$$

для которой напомним две корректные постановки с условиями излучения на бесконечности — естественный и расширенный принципы излучения. В первом принципе естественные условия излучения содержат только уходящие волны из пространства $\mathcal{W}(\mu, G)$. Второй принцип — расширенный — включает уходящие волны из расширенного пространства волн $\mathcal{W}_a(\mu, G)$. Для общих эллиптических задач, самосопряженных относительно формулы Грина, первая из постановок обсуждалась в [1], а вторая — в статьях [7, 8] (в различных геометрических ситуациях). Естественный принцип мы будем применять вне порогов, а расширенный — в окрестности порога, используя при этом для расширенного принципа устойчивый базис волн в пространстве $\mathcal{W}_a(\mu, G)$, построенный в §2.

Сначала определим нужные для этой цели функциональные пространства. При целых $l \geqslant 0$ обозначим через $H^l(G)$ пространство Соболева с нормой

$$\|v;H^l(G)\| = \Big(\sum_{j=0}^{l}\int_G \sum_{|\alpha|=j} |D_x^\alpha v(x)|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

а через $H^{l-1/2}(\partial G)$, где $l \geqslant 1$, — пространство следов на ∂G функций из $H^l(G)$. Пусть ρ_γ — гладкая положительная в $\overline{G}$ функция, которая на Π_+^r задана равенством $\rho_\gamma(y^r,t^r) = \exp(\gamma t^r)$, причем $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть еще $H_\gamma^l(G)$ и $H_\gamma^{l-1/2}(\partial G)$ — пространства с нормами $\|u;H_\gamma^l(G)\| = \|\rho_\gamma u;H^l(G)\|$ и $\|v;H_\gamma^{l-1/2}(\partial G)\| = \|\rho_\gamma v;H^{l-1/2}(\partial G)\|$. Оператор задачи (3.1) осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{A}_\gamma(\mu) : H_\gamma^2(G) \to H_\gamma^0(G) \times H_\gamma^{3/2}(\partial G). \tag{3.2}$$

Известно, что оператор (3.2) фредгольмов, если и только если прямая $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\lambda = \gamma\}$ свободна от собственных чисел пучков $\lambda \mapsto \mathfrak{A}^r(\lambda,\mu)$, $r = 1,\dots,\mathcal{T}$, где $\mathfrak{A}^r$ — пучок вида (2.2) для задачи (2.1) в цилиндре Π^r. (Напомним, что оператор называется фредгольмовым, если его образ замкнут, а ядро и коядро конечномерны.)

Перейдем к описанию естественного принципа излучения. Пусть μ — непороговое значение спектрального параметра, $\mu \in (\tau',\tau'')$, $\mu \neq \tau$. Пусть еще δ — столь малое положительное число, что полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \delta\}$ содержит лишь вещественные собственные числа пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $r = 1,\dots,\mathcal{T}$; обозначим количество таких чисел (с учетом кратности) через $2M = 2M(\mu)$. В ядре $\ker\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ оператора $\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ существуют наборы элементов $\{Y_1^+(\cdot,\mu),\dots,Y_M^+(\cdot,\mu)\}$ и $\{Y_1^-(\cdot,\mu),\dots,Y_M^-(\cdot,\mu)\}$ такие, что

$$\Big(Y_j^+(\cdot,\mu) - u_j^+(\cdot,\mu) - \sum_{k=1}^{M} S_{jk}(\mu)u_k^-(\cdot,\mu)\Big) \in H_\delta^2(G), \tag{3.3}$$

$$\Big(Y_j^-(\cdot,\mu) - u_j^-(\cdot,\mu) - \sum_{k=1}^{M} T_{jk}(\mu)u_k^+(\cdot,\mu)\Big) \in H_\delta^2(G), \tag{3.4}$$

где $S(\mu) = \|S_{jk}(\mu)\|$ — унитарная матрица рассеяния и $S(\mu)^{-1} = T(\mu) = \|T_{jk}(\mu)\|$. Каждый из указанных наборов $\{Y_1^+(\cdot,\mu),\dots,Y_M^+(\cdot,\mu)\}$ и $\{Y_1^-(\cdot,\mu),\dots,Y_M^-(\cdot,\mu)\}$ является базисом (по модулю $\ker\mathcal{A}_\delta(\mu)$) в ядре $\ker\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$. Это означает, что любой элемент $v \in \ker\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ есть линейная комбинация функций $Y_1^+(\cdot,\mu),\dots,Y_M^+(\cdot,\mu)$ с точностью до слагаемого из $\ker\mathcal{A}_\delta(\mu)$; то же верно и для $Y_1^-(\cdot,\mu),\dots,Y_M^-(\cdot,\mu)$. Если число μ не оказывается собственным значением оператора (3.2), т.е. $\ker\mathcal{A}_\delta(\mu) = 0$, то каждый из наборов $\{Y_j^+\}$ и $\{Y_j^-\}$ — базис для $\ker\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ в обычном смысле.

Элементы $Y(\cdot,\mu)$ из $\ker\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)\setminus\ker\mathcal{A}_{\delta}(\mu)$ называются собственными функциями непрерывного спектра задачи (2.17), отвечающими числу μ.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ линейную оболочку $\mathfrak{L}(u_1^-,\dots,u_M^-)$. Норму элемента $u=\sum c_j u_j^- + v\in\mathfrak{N}\dot{+}H_\delta^2(G)$, где $c_j\in\mathbb{C}$ и $v\in H_\delta^2(G)$, определим равенством

$$\|u\|=\sum|c_j|+\|v;H_\delta^2(G)\|.$$

Пусть $\mathbf{A}(\mu)$ — сужение оператора $\mathcal{A}_{-\delta}(\mu)$ на пространство $\mathfrak{N}\dot{+}H_\delta^2(G)$. Отображение

$$\mathbf{A}(\mu):\mathfrak{N}\dot{+}H_\delta^2(G)\to H_\delta^0(G)\times H_\delta^{3/2}(\partial G)=:\mathcal{H}_\delta(G) \tag{3.5}$$

непрерывно. Следующая теорема доставляет корректную постановку краевой задачи (3.1) с естественными условиями излучения на бесконечности (предполагается, что числа μ и δ подчинены условиям, приведенным в последнем абзаце перед формулой (3.3)).

Теорема 3.1. *Пусть $z_1,\dots,z_d$ — базис в пространстве $\ker\mathcal{A}_\delta(\mu)$, $\{f,g\}\in\mathcal{H}_\delta(G)$ и $(f,z_j)_G+(g,-\partial_\nu z_j)_{\partial G}=0$, $j=1,\dots,d$. Тогда*

1. *Существует решение $u\in\mathfrak{N}\dot{+}H_\delta^2(G)$ уравнения $\mathbf{A}(\mu)u=\{f,g\}$, определенное с точностью до произвольного слагаемого из линеала $\mathfrak{L}(z_1,\dots,z_d)$.*

2. *Справедливо включение*

$$v\equiv u-c_1u_1^- -\dots-c_Mu_M^-\in H_\delta^2(G), \tag{3.6}$$

где $c_j=i(f,Y_j^-)_G+i(g,-\partial_\nu Y_j^-)_{\partial G}$.

3. *Для решения u выполняется неравенство*

$$\|v;H_\delta^2(G)\|+|c_1|+\dots+|c_M|\leqslant \mathrm{const}\left(\|\{f,g\};\mathcal{H}_\delta(G)\|+\|\rho_\delta v;L_2(G)\|\right). \tag{3.7}$$

Решение u_0, подчиненное дополнительным условиям $(u_0,z_j)_G=0$ для $j=1,\dots,d$, единственно, и для него верна оценка (3.7)с заменой правой части на $\mathrm{const}\|\{f,g\};\mathcal{H}_\delta(G)\|$.

4. *Если $\{f,g\}\in\mathcal{H}_\delta(G)\cap\mathcal{H}_{\delta'}(G)$, причем полоса $\{\lambda\in\mathbb{C}:\min\{\delta,\delta'\}\leqslant\operatorname{Im}\lambda\leqslant\max\{\delta,\delta'\}\}$ не содержит собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $r=1,\dots,\mathcal{T}$, то решения $u\in\mathfrak{N}\dot{+}H_\delta^2(G)$ и $u'\in\mathfrak{N}\dot{+}H_{\delta'}^2(G)$ совпадают, а от выбора между δ и δ' по существу зависит лишь постоянная в (3.7).*

Замечание 3.2. В теореме 3.1 показатель δ и постоянную const в оценке (3.7) можно выбрать неизменными для всех μ из отрезка $[\mu',\mu'']\subset(\tau,\tau'')$ (отрезка $[\mu',\mu'']\subset(\tau',\tau)$). Если слева приближать μ'' к порогу, то показатель δ приходится устремлять к нулю: допустимый интервал для δ сужается из-за приближения собственных чисел пучка по мнимой оси к нулю; постоянная в (3.7) при этом увеличивается. Если же μ' приближается (справа) к порогу, то „портится“ базис волн (2.6); из доказательства теоремы 3.1 в [1] можно усмотреть, что это приводит к росту постоянной в (3.7).

Обратимся к расширенному принципу излучения в окрестности порога τ. С этой целью построим устойчивый на пороге τ базис в пространстве волн для задачи (2.17). Такой базис составим из волн, порожденных функциями (2.10), (2.11), и волн, отвечающих вещественным собственным числам пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $r=2,\dots,\mathcal{T}$. Согласно предположению (см. начало §3) на отрезке $[\tau',\tau'']$ нет порогов для задач вида (2.1) в цилиндрах $\Pi^2,\dots,\Pi^{\mathcal{T}}$. Поэтому количество вещественных собственных чисел каждого из пучков $\mathbb{R}\ni\lambda\to\mathfrak{A}^r(\lambda,\mu)$, $r=2,\dots,\mathcal{T}$, остается постоянным при $\mu\in[\tau',\tau'']$. Значит, при переходе из цилиндра Π^1 в область G размерность пространства волн увеличивается на одну и ту же величину при всех $\mu\in(\tau',\tau'')$. Положим $2L=\dim\mathcal{W}(\mu,G)$ при $\mu\in(\tau',\tau)$ и $2M=\dim\mathcal{W}(\mu,G)$ при $\mu\in(\tau,\tau'')$; тогда $M-L=m-l$, где m и l — те же, что в (2.10), (2.11), и $\dim\mathcal{W}_a(\mu,G)=2M$ при $\mu\in(\tau',\tau)$.

Число γ для операторов $\mathcal{A}_{\pm\gamma}(\mu)$ будем выбирать так, чтобы оно годилось для всех μ из некоторой окрестности порога $\tau=\mu_m$. Поясним такой выбор.

Имеем $\lambda_k^{\pm}(\mu)=\pm(\mu-\mu_k)^{1/2}$, $\mu_{l+1}=\dots,\mu_m$, и потому $\lambda_k^{\pm}(\tau)=0$ при $k=l+1,\dots,m$. Интервал мнимой оси с концами $-i(\mu_{m+1}-\mu_m)^{1/2}$, $i(\mu_{m+1}-\mu_m)^{1/2}$, проколотый в начале координат, свободен от спектра пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot,\mu_m)$, $q=1,\dots,\mathcal{T}$. При малом сдвиге μ вдоль $\mathbb{R}$ мало перемещаются и собственные числа пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot,\mu)$, оставаясь на осях координат. Поэтому для (малого) $\alpha>0$ существует такое $\beta>0$, что при $\mu\in(\mu_m-\beta,\mu_m+\beta)$ на интервалах $iI_{\pm\alpha}:=\pm i(\alpha,(\mu_{m+1}-\mu_m)^{1/2}-\alpha)$ спектра пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot,\mu)$ нет. Значит, прямые $\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\lambda=\pm\gamma\}$, где $\gamma\in I_\alpha$, свободны от спектра пучков $\mathfrak{A}^q(\cdot,\mu)$, а полоса $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\mathrm{Im}\lambda|\leqslant\gamma\}$ содержит лишь вещественные собственные числа этих пучков и числа $\lambda_k^{\pm}(\mu)=\pm(\mu-\mu_k)^{1/2}=\pm(\mu-\mu_m)^{1/2}$ из формул (2.10), $k=l+1,\dots,m$.

Пусть $\mu\in(\tau-\beta,\tau+\beta)$, $\gamma\in I_\alpha$, и пусть $\{w_k^{\pm}(\cdot,\mu)\}$ — описанный выше устойчивый базис волн в G. В ядре $\ker\mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ существуют наборы элементов $\{\mathcal{Y}_1^+(\cdot,\mu),\dots,\mathcal{Y}_M^+(\cdot,\mu)\}$ и $\{\mathcal{Y}_1^-(\cdot,\mu),\dots,\mathcal{Y}_M^-(\cdot,\mu)\}$ такие, что

$$\Big(\mathcal{Y}_j^+(\cdot,\mu)-w_j^+(\cdot,\mu)-\sum_{k=1}^{M}\mathcal{S}_{jk}(\mu)w_k^-(\cdot,\mu)\Big)\in H_\gamma^2(G),\tag{3.8}$$

$$\Big(\mathcal{Y}_j^-(\cdot,\mu)-w_j^-(\cdot,\mu)-\sum_{k=1}^{M}\mathcal{T}_{jk}(\mu)w_k^+(\cdot,\mu)\Big)\in H_\gamma^2(G),\tag{3.9}$$

где $\mathcal{S}(\mu) = \|\mathcal{S}_{jk}(\mu)\|$ — унитарная матрица рассеяния и $\mathcal{S}(\mu)^{-1} = \mathcal{T}(\mu) = \|\mathcal{T}_{jk}(\mu)\|$. Каждый из указанных наборов $\{\mathcal{Y}_1^+(\cdot,\mu),\dots,\mathcal{Y}_M^+(\cdot,\mu)\}$ и $\{\mathcal{Y}_1^-(\cdot,\mu),\dots,\mathcal{Y}_M^-(\cdot,\mu)\}$ является базисом (по модулю $\ker\mathcal{A}_\gamma(\mu)$) в ядре $\ker\mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$.

Элементы $\mathcal{Y}(\cdot,\mu)$ из $\ker\mathcal{A}_{-\gamma}(\mu) \setminus \ker\mathcal{A}_\gamma(\mu)$ называются собственными функциями непрерывного спектра задачи (2.17), отвечающими числу μ. Матрицу $\mathcal{S}(\mu)$ (при $\mu \in (\tau-\beta,\tau)$) будем называть расширенной матрицей рассеяния.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ линейную оболочку $\mathfrak{L}(w_1^-,\dots,w_M^-)$. Норму элемента $w = \sum c_j w_j^- + v \in \mathfrak{K} \dotplus H_\gamma^2(G)$, где $c_j \in \mathbb{C}$ и $v \in H_\gamma^2(G)$, определим равенством

$$\|w\| = \sum |c_j| + \|v; H_\gamma^2(G)\|.$$

Пусть $\mathbf{A}(\mu)$ — сужение оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}(\mu)$ на пространство $\mathfrak{K} \dotplus H_\gamma^2(G)$; тогда непрерывно отображение

$$\mathbf{A}(\mu) : \mathfrak{K} \dotplus H_\gamma^2(G) \to H_\gamma^0(G) \times H_\gamma^{3/2}(\partial G) =: \mathcal{H}_\gamma(G). \tag{3.10}$$

Теорема 3.3. *Пусть* $\mu \in (\tau-\beta,\tau+\beta)$, $\gamma \in I_\alpha$, *и пусть* $\{w_k^\pm(\cdot,\mu)\}$ — *описанный выше устойчивый базис волн в* G. *Пусть* $z_1,\dots,z_d$ — *базис в пространстве* $\ker\mathcal{A}_\gamma(\mu)$, $\{f,g\} \in \mathcal{H}_\gamma(G)$ *и* $(f,z_j)_G + (g,-\partial_\nu z_j)_{\partial G} = 0$, $j = 1,\dots,d$. *Тогда*

1. *Существует решение* $w \in \mathfrak{K} \dotplus H_\gamma^2(G)$ *уравнения* $\mathbf{A}(\mu)w = \{f,g\}$, *определенное с точностью до произвольного слагаемого из линеала* $\mathcal{L}(z_1,\dots,z_d)$.

2. *Справедливо включение*

$$v \equiv w - c_1 w_1^- - \dots - c_M w_M^- \in H_\gamma^2(G), \tag{3.11}$$

где $c_j = i(f,\mathcal{Y}_j^-)_G + i(g,-\partial_\nu\mathcal{Y}_j^-)_{\partial G}$.

3. *Для решения* w *выполняется неравенство*

$$\|v; H_\gamma^2(G)\| + |c_1| + \dots + |c_M| \leqslant \mathrm{const}\left(\|\{f,g\};\mathcal{H}_\gamma(G)\| + \|\rho_\gamma v; L_2(G)\|\right). \tag{3.12}$$

Решение w_0, *подчиненное условиям* $(w_0,z_j)_G = 0$ *при* $j = 1,\dots,d$, *единственно, и для него верна оценка* (3.12) *с заменой правой части на* $\mathrm{const}\,\|\{f,g\};\mathcal{H}_\gamma(G)\|$.

4. *Если* $\{f,g\} \in \mathcal{H}_\gamma(G) \cap \mathcal{H}_{\gamma'}(G)$, *причем полоса* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \min\{\gamma,\gamma'\} \leqslant \mathrm{Im}\lambda \leqslant \max\{\gamma,\gamma'\}\}$ *не содержит собственных чисел пучков* $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $r = 1,\dots,\mathcal{T}$, *то решения* $w(\cdot,\mu) \in \mathfrak{K} \dotplus H_\gamma^2(G)$ *и* $w'(\cdot,\mu) \in \mathfrak{K} \dotplus H_{\gamma'}^2(G)$ *уравнения* $\mathbf{A}(\mu)w = \{f,g\}$ *совпадают, а от выбора между* γ *и* γ' *по существу зависит лишь постоянная в* (3.12).

Мы намерены распространить формулы вида (3.8), (3.9) на весь интервал (τ',τ'') с аналитическими функциями $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^{\pm}(\mu)$. В отличие от ситуации в замечании 3.2 распространить (3.8), (3.9) на произвольный интервал $[\mu',\mu''] \subset (\tau',\tau'')$ с одним и тем же показателем γ, вообще говоря, нельзя. Однако можно для этой цели обойтись конечным набором показателей на разных частях интервала $[\mu',\mu'']$. Составление такого набора описывается в следующей лемме.

Лемма 3.4. *Для любого отрезка $[\mu',\mu''] \subset (\tau',\tau'')$ существуют конечное покрытие $\{U_p\}_{p=0}^N$ открытыми интервалами и набор постоянных $\{\gamma^p\}_{p=0}^N$, подчиненные условиям (с некоторым неотрицательным целым числом N):*

1) *$\mu' \in U_0$, $\mu'' \in U_N$; $U_0 \cap U_p = \emptyset$, $p = 2,\dots,N$; $U_N \cap U_p = \emptyset$, $p = 0,\dots,N-2$; при этом U_p пересекается только с интервалами U_{p-1} и U_{p+1}, $1 \leqslant p \leqslant N-1$.*

2) *Прямая $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\lambda = \gamma^p\}$ свободна от спектра пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $r = 1,\dots,\mathcal{T}$, при всех $\mu \in U_p \cap [\mu',\mu'']$; здесь $p = 0,\dots,N$.*

3) *Полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : \gamma^p \leqslant \mathrm{Im}\lambda \leqslant \gamma^{p+1}\}$ свободна от спектра пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $r = 1,\dots,\mathcal{T}$, при всех $\mu \in U_p \cap U_{p+1}$ и $p = 0,\dots,N-1$.*

4) *При $\mu \in U_p \cap [\mu',\mu'']$ справедливо неравенство $|\mathrm{Im}(\mu-\tau)^{1/2}| < \gamma^p$ (напомним, что $\pm(\mu-\tau)^{1/2}$ — собственные числа пучка $\mathfrak{A}^1(\cdot,\mu)$, $\tau = \mu_{l+1} = \dots = \mu_m$); других собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $r = 1,\dots,\mathcal{T}$, кроме вещественных собственных чисел, в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \gamma^p\}$ нет, $p = 0,\dots,N$.*

Доказательство леммы наметим. Рассмотрим отрезок $[\mu',\mu'']$, считая, что $\tau \in (\mu',\mu'')$. Перед формулами (3.8) и (3.9) был определен интервал $(\tau-\beta,\tau+\beta)$, который можно взять одним из элементов искомого покрытия; как было ранее показано, в качестве γ для этого элемента годится любое число из интервала $I_\alpha = (\alpha,(\mu_{m+1}-\mu_m)^{1/2}-\alpha)$, где α — (малое) положительное число, а β зависит от α.

Выберем $\nu \in (\tau,\tau+\beta)$. Собственное число $\lambda_m(\mu) = (\mu-\mu_m)^{1/2}$ пучка $\mathfrak{A}^1(\cdot,\mu)$ вещественное при $\mu > \nu$, а число $\lambda_{m+1}(\mu) = i(\mu_{m+1}-\mu)^{1/2}$ этого пучка стремится к нулю с возрастанием μ от ν до $\tau'' = \mu_{m+1}$, причем интервал $\{z \in \mathbb{C} : z = it,\ 0 < t < (\mu_{m+1}-\mu'')^{1/2}\}$ мнимой оси остается свободным от спектра пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot,\mu)$, $\mu' \leqslant \mu \leqslant \mu''$, $r = 1,\dots,\mathcal{T}$. Поэтому можно взять интервал $(\nu,\tilde\nu)$, где $\mu'' < \tilde\nu < \tau''$, элементом покрытия, а показателем для этого интервала выбрать любое число $\gamma \in (0,(\mu_{m+1}-\mu'')^{1/2})$.

Осталось предъявить элементы U_p, расположенные слева от порога τ, и соответствующие показатели γ_p. Эти элементы и показатели можно выбрать так, чтобы графики функций $U_p \ni \mu \mapsto \gamma^p = \mathrm{const}$ располагались между графиками функций $(\tau', \tau) \ni \mu \mapsto \mathrm{Im}\lambda_k(\mu) = (\mu_k - \mu)^{1/2}$, $k = m, m+1$, а показатели составляли убывающую последовательность $\gamma^0 > \gamma^1 > \dots$ $\square$

3.2. Аналитичность матриц рассеяния как функций спектрального параметра. Мы рассмотрим базисы $\{\mathcal{Y}_j^+\}$ и $\{\mathcal{Y}_j^-\}$ в пространствах собственных функций непрерывного спектра (СФНС), определенные вблизи порога τ (см. (3.8) и (3.9)). Сначала покажем, что функции $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)$ допускают аналитическое продолжение на весь интервал (τ', τ''). Здесь и далее под аналитичностью функции на интервале понимается возможность аналитического продолжения функции в комплексную окрестность каждой точки интервала. Затем мы установим аналитичность матрицы рассеяния $\mu \mapsto \mathcal{S}(\mu)$ на том же интервале (τ', τ''). Этой аналитичности не вредит возможное присутствие собственных чисел задачи (2.17) на непрерывном спектре (произвол при выборе СФНС требованием аналитичности устраняется). Кроме того, устанавливается аналитичность элементов $\mu \mapsto Y_j^\pm(\cdot, \mu)$ базисов СФНС из (3.3) и (3.4) и соответствующей матрицы рассеяния $\mu \mapsto S(\mu)$ на интервалах (τ', τ) и (τ, τ'').

Оператор $\mathcal{A}_\gamma(\mu)$, нужный для формул вида (3.8) и (3.9), можно определить в окрестности любой точки интервала (τ', τ''). Показатель γ для этой цели доставляется леммой 3.4: одно и то же число γ^p может служить для всех $\mu \in U_p$. Поэтому при $\mu \in U_p$ существуют семейства $\{\mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)\} \subset \ker\mathcal{A}_{-\gamma^p}(\mu)$, удовлетворяющие соотношениям вида (3.8) и (3.9) с унитарной матрицей $\mathcal{S}(\mu)$; имеет место теорема 3.3 при $\mu \in U_p$. Таким образом, дело сводится к доказательству аналитичности „локальных семейств“ $\{\mathcal{Y}_j^\pm(\cdot, \mu)\}$ и $\mathcal{S}(\mu)$ на U_p и согласованности таких семейств на пересечениях окрестностей.

Предварительно мы получим представление оператора $\mathbf{A}(\mu)^{-1}$, где $\mathbf{A}(\mu)$ — оператор (3.5) или (3.10), в окрестности собственного числа задачи (2.17). Для этой цели напомним некоторые сведения из теории голоморфных оператор-функций (см., например, [9]). Пусть $\mathcal{D}$ — область на комплексной плоскости, B_1, B_2 — банаховы пространства и $\mathbb{A}$ — голоморфная оператор-функция $\mathcal{D} \ni \mu \mapsto \mathbb{A}(\mu) : B_1 \to B_2$. Спектр функции $\mathbb{A}(\cdot)$ есть множество таких точек $\mu \in \mathcal{D}$, для которых $\mathbb{A}(\mu)$ — необратимый оператор. Число μ_0 называется собственным для $\mathbb{A}$, если существует ненулевой вектор $\varphi_0 \in B_1$ такой, что $\mathbb{A}(\mu_0)\varphi_0 = 0$; вектор φ_0 называют собственным. Пусть μ_0 и φ_0 — собственные число и вектор. Элементы $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ называются присоединенными (или обобщенными собственными) векторами, если

$$\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} (\partial_\mu^q \mathbb{A})(\mu_0) \varphi_{n-q} = 0,$$

где $n = 1, \dots, m$. Говорят, что голоморфная функция $\mathbb{A}$ фредгольмова, если оператор $\mathbb{A}(\mu) : B_1 \to B_2$ фредгольмов для всех $\mu \in \mathcal{D}$ и обратим хотя бы для одного значения μ. Спектр фредгольмовой функции $\mathbb{A}$ составляют изолированные собственные значения конечной алгебраической кратности. Голоморфная функция $\mathbb{A}^*$, сопряженная с $\mathbb{A}$, задана на множестве $\{\mu : \bar{\mu} \in \mathcal{D}\}$ и определена равенством $\mathbb{A}^*(\mu) = (\mathbb{A}(\bar{\mu}))^* : B_1^* \to B_2^*$. Если одна из функций $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^*$ фредгольмова, то и вторая оказывается фредгольмовой. Число μ_0 — собственное для $\mathbb{A}$ в том и только в том случае, когда $\bar{\mu}_0$ — собственное число для $\mathbb{A}^*$; алгебраическая и геометрическая кратности $\bar{\mu}_0$ такие же, как у числа μ_0.

Мы будем рассматривать оператор-функцию $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ из формулы (3.5) или (3.10) на отрезке $[\mu', \mu'']$, который принадлежит хотя бы одному из интервалов (τ', τ) и (τ, τ''). Учитывая замечание 3.2, показатель δ в (3.5) и в теореме 3.1 выберем одним и тем же для всех $\mu \in [\mu', \mu'']$. Функция $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ из (3.10) рассматривается на отрезке $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$ столь малом, чтобы лемма 3.4 позволила выбрать единое число γ в (3.10) и в теореме 3.3 для всех $\mu \in [\mu', \mu'']$. Согласно предложению 2.1 волны из определений операторов (3.5) и (3.10) голоморфны в комплексной окрестности соответствующего отрезка $[\mu', \mu'']$. Значит, там же голоморфны и оператор-функции $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ из теорем 3.1 и 3.3.

Предложение 3.5. i) *Пусть $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ — оператор-функция из теоремы 3.3, μ_0 — собственное число оператора (3.2) и $(z_1, \dots, z_d)$ — базис собственного пространства $\ker \mathcal{A}_\gamma(\mu_0)$. Тогда в проколотой окрестности числа μ_0 справедливо представление*

$$\mathbf{A}^{-1}(\mu)\{f, g\} = (\mu - \mu_0)^{-1} \mathbf{P}\{f, g\} + \mathbf{R}(\mu)\{f, g\}, \tag{3.13}$$

где $\{f, g\} \in \mathcal{H}_\gamma(G)$,

$$\mathbf{P}\{f, g\} = -\sum_{j=1}^{d} \left((f, z_j)_G + (g, -\partial_\nu z_j)_{\partial G}\right) z_j, \tag{3.14}$$

а функция $\mathbf{R}(\mu) : \mathcal{H}_\gamma(G) \to \mathfrak{K} \dotplus H_\gamma^2(G)$ голоморфна в окрестности точки μ_0.

ii) *Пусть* $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ — *оператор-функция из теоремы* 3.1, μ_0 — *собственное число оператора* (3.2) *с индексом* δ *из интервала* (τ', τ) *или* (τ, τ'') *и* $(z_1, \dots, z_d)$ — *базис собственного пространства* $\ker \mathcal{A}_\delta(\mu_0)$. *Тогда в проколотой окрестности числа* μ_0 *справедливо представление* (3.13), *в котором* $\mathbf{P}\{f, g\}$ *определяется равенством* (3.14), *причем* $\mathbf{R}$ *есть оператор-функция* $\mathbf{R}(\mu) : \mathcal{H}_\delta(G) \to \mathfrak{N} \dotplus H^2_\delta(G)$, *голоморфная в окрестности точки* μ_0.

Доказательство. i) По теореме 3.3 оператор $\mathbf{A}(\mu)$ фредгольмов в каждой точке $\mu \in [\mu'_m, \mu''_m]$. Можно считать, что $\mathbf{A}(\mu)$ фредгольмов и в окрестности U (это свойство устойчиво относительно малых по норме возмущений оператора).

Теорема 3.3 обеспечивает обратимость оператора $\mathbf{A}(\mu)$ при всех $\mu \in [\mu'_m, \mu''_m]$, за исключением собственных чисел оператора (3.2), которые лежат на вещественной оси и являются изолированными. Значит, оператор-функция $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$ фредгольмова в окрестности точки μ_0 на комплексной плоскости. Из теоремы 3.3 следует, что собственные пространства операторов (3.10), (3.2) совпадают, т.е. $\ker \mathbf{A}(\mu_0) = \ker \mathcal{A}_\gamma(\mu_0) \subset H^2_\gamma(G)$. Легко проверяется, что присоединенных (обобщенных собственных) векторов в точке μ_0 оператор-функция $\mathbf{A}$ не имеет. Тогда из теоремы Келдыша о резольвенте голоморфной оператор-функции (см. [9]) вытекает равенство

$$\mathbf{A}^{-1}(\mu)\{f, g\} = (\mu - \mu_0)^{-1}\mathbf{T}\{f, g\} + \mathbf{R}(\mu)\{f, g\}; \tag{3.15}$$

здесь $\mathbf{T}\{f, g\} = \sum_{j=1}^{d} \langle \{f, g\}, \{\psi_j, \chi_j\} \rangle z_j$, причем $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственность на паре сопряженных пространств $\mathcal{H}_\gamma(G)$, $\mathcal{H}_\gamma(G)^*$, определенная равенством $\langle \{f, g\}, \{\psi, \chi\} \rangle = (f, \psi)_G + (g, \chi)_{\partial G}$, где $(\cdot, \cdot)_G$ и $(\cdot, \cdot)_{\partial G}$ — расширения скалярного произведения в $L_2(G)$ и $L_2(\partial G)$ на пары $H^0_\gamma(G), H^0_\gamma(G)^*$ и $H^{3/2}_\gamma(\partial G), H^{3/2}_\gamma(\partial G)^*$ соответственно. Элементы $\{\psi_j,\, \chi_j\} \in \ker \mathbf{A}(\mu_0)^* \subset W(G; \gamma)^*$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\langle (\partial_\mu \mathbf{A})(\mu_0) z_j, \{\psi_k, \chi_k\} \rangle = \gamma_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, d. \tag{3.16}$$

Далее, $(\partial_\mu \mathbf{A})(\mu_0) z_j = \{-z_j, 0\} \in W(G; \gamma)$. Элементы $\{\psi_k, \chi_k\}$ интерпретируются „в терминах формулы Грина“ и с учетом (3.16) переписываются в виде $\{\psi_k, \chi_k\} = \{-z_k, \partial_\nu z_k\}$ (ср., например, с [1]). Теперь $\mathbf{T}\{f, g\}$ совпадает с $\mathbf{P}\{f, g\}$ в (3.14), а формула (3.15) принимает вид (3.13).

ii) Можно повторить с очевидными изменениями рассуждения из первой части доказательства. □

Теперь мы готовы к обсуждению аналитичности базисов в пространствах собственных функций непрерывного спектра (СФНС). Займемся, например, базисом $\{\mathcal{Y}^+_j\}$ из формулы (3.8). Из определения волны w^+_j в G

(см. п. 2.2) следует, что носитель функции $G \ni x \mapsto w_j^+(x,\mu)$ сосредоточен в одном из выходов G на бесконечность, причем

$$\begin{aligned} -\Delta w_j^+(x,\mu) - \mu w_j^+(x,\mu) &= f_j(x,\mu), \quad x \in G, \\ w_j^+(x,\mu) &= 0, \quad x \in \partial G, \end{aligned}$$

а функция $x \mapsto f_j(x,\mu)$ имеет компактный носитель. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{A}(\mu) w(\cdot,\mu) = \{f_j(\cdot,\mu), 0\} \tag{3.17}$$

на интервале $[\mu',\mu''] \subset (\tau',\tau'')$, предполагая сначала, что отрезок $[\mu',\mu'']$ свободен от собственных чисел оператор-функции $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$. По теореме 3.3 для всех $\mu \in [\mu',\mu'']$ существует единственное решение $w = v + c_1 w_1^- + \dots + c_M w_M^-$ уравнения (3.17),

$$w(\cdot,\mu) = \{c_1(\mu),\dots,c_M(\mu), v(\cdot,\mu)\} \in \mathfrak{K} \dotplus H_\gamma^2(G). \tag{3.18}$$

Поскольку каждая из функций $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)^{-1}$ и $\mu \mapsto f_j(\cdot,\mu)$ голоморфна в комплексной окрестности интервала $[\mu',\mu'']$, голоморфными оказываются и компоненты вектор-функции $\mu \mapsto w(\cdot,\mu)$. Поэтому аналитичность функции $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^+(\cdot,\mu)$ в той же окрестности следует из равенства

$$\mathcal{Y}_j^+ = w_j^+ - w. \tag{3.19}$$

Теперь допустим, что на интервале $[\mu',\mu'']$ имеется собственное число μ_0 оператор-функции $\mu \mapsto \mathbf{A}(\mu)$. Для пары $\{f,g\} = \{f_j, 0\}$ из правой части (3.17) найдем вычет $\mathbf{P}\{f,g\}$ в (3.13). При $z \in \ker \mathcal{A}_\gamma(\mu_0)$ имеем

$$\begin{aligned} (f,z)_G + (g, -\partial_\nu z)_{\partial G} = (f_j, z)_G &= (-\Delta w_j^+ - \mu w_j^+, z)_G \\ &= (w_j^+, -\Delta z - \mu z)_G = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\mathbf{P}\{f_j, 0\} = 0$ и в силу (3.13)

$$w(\cdot,\mu) = \mathbf{A}(\mu)^{-1}\{f_j,0\} = \mathbf{R}(\mu)\{f_j,0\},$$

т.е. функция $\mu \mapsto w(\cdot,\mu)$ аналитическая в окрестности точки μ_0. Отсюда, как и в предыдущем случае, вытекает аналитичность функции $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^+(\cdot,\mu)$.

Аналитичность функций $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^-(\cdot,\mu)$ проверяется таким же путем. С очевидными изменениями устанавливается аналитичность функций вида $\mu \mapsto Y_j^+(\cdot,\mu)$ и $\mu \mapsto Y_j^-(\cdot,\mu)$ из (3.3) и (3.4) в комплексной окрестности отрезков $[\mu',\mu''] \subset (\tau',\tau)$ или $[\mu',\mu''] \subset (\tau,\tau'')$.

Применяя лемму 3.4 и утверждение 4 из теоремы 3.3, можно формулы (3.8) и (3.9) распространить на весь интервал (τ',τ'') для аналитических семейств $\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^\pm(\cdot,\mu)$, хотя и с „переменным“ показателем γ; впрочем, в окрестности любой точки $\mu \in (\tau', \tau'')$ можно показатель γ выбирать постоянным. Замечание 3.2 и утверждение 4 из теоремы 3.1 позволяют распространить формулы (3.3) и (3.4) на интервалы (τ', τ) и (τ, τ'') для аналитических семейств $\mu \mapsto Y_j^{\pm}(\cdot, \mu)$.

Теорема 3.6. *Пусть $\tau' < \tau < \tau''$ — три последовательных порога для задачи* (2.17) *и сохраняются предположения, введенные в начале* §3. *Тогда*

i) *На интервалах (τ', τ) и (τ, τ'') существуют аналитические базисы $\{\mu \mapsto Y_j^{\pm}(\cdot, \mu)\}$ в пространствах СФНС задачи* (2.17), *удовлетворяющие формулам* (3.3) *и* (3.4) *с матрицей рассеяния $\mu \mapsto S(\mu)$, аналитической на указанных интервалах.*

ii) *На интервале (τ', τ'') существуют аналитические базисы $\{\mu \mapsto \mathcal{Y}_j^{\pm}(\cdot, \mu)\}$ в пространствах СФНС задачи* (2.17), *удовлетворяющие формулам* (3.8) *и* (3.9) *с матрицей рассеяния $\mu \mapsto \mathcal{S}(\mu)$, аналитической на указанном интервале.*

Доказательство. Рассуждения, проведенные в п. 3.2, позволяют ограничиться проверкой аналитичности матриц рассеяния. Рассмотрим, например, матрицу $\mu \mapsto \mathcal{S}(\mu)$. Равенство (3.19), представление $w = v + c_1 w_1^- + \dots + c_M w_M^-$ и включение (3.18) означают, что

$$\mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu) = w_j^+(\cdot, \mu) - \sum_{k=1}^{M} c_k(\mu) w_k^-(\cdot, \mu) \in H_\gamma^2(G).$$

Поэтому $\mathcal{S}_{jk}(\mu) = -c_k(\mu)$, $k = 1, \dots, M$. Остается вспомнить, что $\mu \mapsto c_k(\mu)$ — аналитические функции на интервале (τ', τ''). Аналитичность матрицы $\mu \mapsto S(\mu)$ проверяется с очевидными изменениями. □

Для базиса $\{\mathcal{Y}_j^+(\cdot, \mu)\}_j^M$ в пространстве СФНС (см. теорему 3.6, ii)) введем столбцы $\mathcal{Y}_{(\mathbf{1})}^+ = (\mathcal{Y}_1^+, \dots, \mathcal{Y}_L^+)^t$ и $\mathcal{Y}_{(\mathbf{2})}^+ = (\mathcal{Y}_{L+1}^+, \dots, \mathcal{Y}_M^+)^t$ и в соответствии с этими обозначениями запишем при $\mu \in (\tau', \tau'')$ матрицу рассеяния в виде

$$\mathcal{S}(\mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu) & \mathcal{S}_{(12)}(\mu) \\ \mathcal{S}_{(21)}(\mu) & \mathcal{S}_{(22)}(\mu) \end{pmatrix},$$

где, например, $\mathcal{S}_{(11)}(\mu)$ — блок размера $L \times L$, а $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$ — блок размера $(M - L) \times (M - L)$. Положим еще

$$D = ((\mu - \tau)^{1/2} + 1)/((\mu - \tau)^{1/2} - 1),$$

причем $(\mu - \tau)^{1/2} = i(\tau - \mu)^{1/2}$ для $\mu \leqslant \tau$ и $(\tau - \mu)^{1/2} \geqslant 0$. Следующее утверждение используется в §4.

Лемма 3.7. *Пусть* $\mu \in (\tau', \tau]$ *и* $\mathcal{S}(\mu)$ *— матрица рассеяния из теоремы* 3.6, ii). *Тогда*

$$\ker(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) \subset \ker \mathcal{S}_{(12)}(\mu), \tag{3.20}$$

$$\operatorname{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)) \supset \operatorname{Im} \mathcal{S}_{(21)}(\mu). \tag{3.21}$$

Поэтому оператор $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}$ *определен на образе* $\operatorname{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))$.

Доказательство. Займемся включением (3.20). Пусть $h \in \ker(D+\mathcal{S}_{(22)}(\mu))$ и пусть $(0, h)^t \in \mathbb{C}^M$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu) & \mathcal{S}_{(12)}(\mu) \\ \mathcal{S}_{(21)}(\mu) & \mathcal{S}_{(22)}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{(12)}(\mu) h \\ -Dh \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $\mathcal{S}(\mu)$ унитарная и $|D| = 1$, то $\|h\|^2 = \|\mathcal{S}_{(12)}(\mu)h\|^2 + \|h\|^2$ и, значит, $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)h = 0$, т.е. соотношение (3.20) справедливо. Включение (3.21) равносильно формуле

$$\ker(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^* \subset \ker \mathcal{S}_{(21)}(\mu)^*. \tag{3.22}$$

Поскольку

$$\mathcal{S}(\mu)^* = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)}(\mu)^* & \mathcal{S}_{(21)}(\mu)^* \\ \mathcal{S}_{(12)}(\mu)^* & \mathcal{S}_{(22)}(\mu)^* \end{pmatrix}$$

и матрица $\mathcal{S}(\mu)^*$ унитарная, формула (3.22) доказывается таким же рассуждением, как и (3.20). □

§4. Другие свойства матриц рассеяния

В этом параграфе устанавливается связь матриц $\mathcal{S}(\mu)$ и $S(\mu)$ на интервале $\tau' < \mu < \tau$, доказывается существование односторонних конечных пределов $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau \pm 0$ и описывается преобразование матрицы рассеяния при замене базиса в пространстве волн $\mathcal{W}(\mu, G)$ для $\mu \in (\tau, \tau'')$. Мы сохраняем предположения, сделанные в самом начале §3.

4.1. Связь матриц $\mathcal{S}(\mu)$ и $S(\mu)$ при $\tau' < \mu < \tau$. Напомним описание (устойчивого) базиса, выбранного для определения матрицы $\mathcal{S}(\mu)$. В полуцилиндре Π_+^1 введем функции

$$\Pi_+^1 \ni (y, t) \mapsto e_k^{\pm}(y, t; \mu) := \chi(t) \exp\left(\pm it\sqrt{\mu - \mu_k}\right)\varphi_k(y), \tag{4.1}$$

где $k = l+1, \dots, m$ (обозначения такие же, как в (2.10); как и прежде, $\mu_{l+1} = \dots = \mu_m = \tau$). Распространим эти функции нулем на всю область G и положим

$$w_{L+j}^{\pm}(\cdot\,; \mu) = 2^{-1/2}\Big(\frac{e_{l+j}^{+}(\cdot\,;\mu) + e_{l+j}^{-}(\cdot\,;\mu)}{2} \mp \frac{e_{l+j}^{+}(\cdot\,;\mu) - e_{l+j}^{-}(\cdot\,;\mu)}{2\sqrt{\mu - \mu_{l+j}}}\Big) \tag{4.2}$$

при $j = 1, \dots, m - l = M - L$ (равенство $m - l = M - L$ объясняется после замечания 3.2). Все остальные волны с носителями в Π^1_+, полученные из функций (2.11), и волны такого же типа с носителями в $\Pi^2_+, \dots, \Pi^{\mathcal{T}}_+$ пронумеруем одним индексом $j = 1, \dots, L$ и обозначим через $w^\pm_1(\cdot\,;\mu), \dots, w^\pm_L(\cdot\,;\mu)$. Составленный таким образом набор $\{w^\pm_1, \dots, w^\pm_M\}$ является базисом волн в G, устойчивым в окрестности порога τ. Наконец, введем столбцы $\mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{1})} = (w^\pm_1, \dots, w^\pm_L)^t$, $\mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{2})} = (w^\pm_{L+1}, \dots, w^\pm_M)^t$ и $(\mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{1})}, \mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{2})}) = (w^\pm_1, \dots, w^\pm_M)^t$, где t обозначает транспонирование матрицы. Компоненты вектора $\mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{1})}$ ограничены, а компоненты вектора $\mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{2})}$ экспоненциально растут на бесконечности в полуцилиндре Π^1_+. Полагая $\mathbf{e}^\pm_{(\mathbf{1})} = (e^\pm_1, \dots, e^\pm_L)^t$, $\mathbf{e}^\pm_{(\mathbf{2})} = (e^\pm_{L+1}, \dots, e^\pm_M)^t$, придем к равенствам

$$\mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{2})} = D^\mp \mathbf{e}^+_{(\mathbf{2})} + D^\pm \mathbf{e}^-_{(\mathbf{2})}, \tag{4.3}$$

где

$$D^\pm = ((\mu - \tau)^{1/2} \pm 1)/2\sqrt{2}(\mu - \tau)^{1/2}.$$

Следующее утверждение по существу содержится в [7].

Предложение 4.1. *Пусть* $\mu \in (\tau', \tau)$, *а* $S(\mu)$ *и* $\mathcal{S}(\mu)$ — *матрицы рассеяния из теоремы* 3.6. *Тогда справедливо равенство*

$$S(\mu) = \mathcal{S}_{(11)}(\mu) - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\mu) \tag{4.4}$$

при

$$D = D^+/D^- = ((\mu - \tau)^{1/2} + 1)/((\mu - \tau)^{1/2} - 1).$$

Доказательство. Проверим равенство (4.4). Перепишем (3.8) в виде

$$\begin{aligned} &\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{1})} - \mathbf{w}^+_{(\mathbf{1})} - \mathcal{S}_{(11)}\mathbf{w}^-_{(\mathbf{1})} - \mathcal{S}_{(12)}\mathbf{w}^-_{(\mathbf{2})} \in H^2_\gamma(G), \\ &\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{2})} - \mathbf{w}^+_{(\mathbf{2})} - \mathcal{S}_{(21)}\mathbf{w}^-_{(\mathbf{1})} - \mathcal{S}_{(22)}\mathbf{w}^-_{(\mathbf{2})} \in H^2_\gamma(G). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Напомним, что параметр $\gamma > 0$ выбирается в соответствии с леммой 3.4, так что полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| < \gamma\}$ содержит собственные числа $\pm(\mu - \tau)^{1/2}$ пучка $\mathfrak{A}^1(\cdot, \mu)$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| < \delta\}$ содержала лишь вещественные собственные числа пучков $\mathfrak{A}^r(\cdot, \mu)$, $r = 1, \dots, \mathcal{T}$. Тогда $\delta < \gamma$, а $H^2_\gamma(G) \subset H^2_\delta(G)$. Подставим в формулы (4.5) вместо $\mathbf{w}^\pm_{(\mathbf{2})}$ их выражения из (4.3); при указанном δ вектор-функция $\mathbf{e}^+_{(\mathbf{2})}$ принадлежит пространству $H^2_\delta(G)$. В результате получаем

$$\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{1})} = \mathbf{w}^+_{(\mathbf{1})} + \mathcal{S}_{(11)}\mathbf{w}^-_{(\mathbf{1})} + \mathcal{S}_{(12)}D^-\mathbf{e}^-_{(\mathbf{2})} + \Re_{(\mathbf{1})}, \tag{4.6}$$

$$\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{2})} = \mathcal{S}_{(21)}\mathbf{w}^-_{(\mathbf{1})} + (D + \mathcal{S}_{(22)})D^-\mathbf{e}^-_{(\mathbf{2})} + \Re_{(\mathbf{2})}, \tag{4.7}$$

где $\Re_{(\mathbf{1})}, \Re_{(\mathbf{2})} \in H^2_\delta(G)$. Введем ортогональный проектор

$$\mathcal{P} : \mathbb{C}^{M-L} \to \operatorname{Im}(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu)).$$

Учитывая (3.21) и (4.7), приходим к равенству

$$\mathcal{P}\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{2})} = \mathcal{S}_{(21)}\mathbf{w}^-_{(\mathbf{1})} + (D + \mathcal{S}_{(22)})D^-\mathbf{e}^-_{(\mathbf{2})} + \mathcal{P}\Re_{(\mathbf{2})}. \tag{4.8}$$

К обеим частям (4.8) применим оператор $\mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}$ и полученное равенство вычтем из (4.6). Имеем

$$Z = \mathbf{w}^+_{(\mathbf{1})} + (\mathcal{S}_{(11)}(\mu) - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{(21)}(\mu))\mathbf{w}^-_{(\mathbf{1})} + R, \tag{4.9}$$

где

$$Z = \mathcal{Y}^+_{(\mathbf{1})} - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{P}\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{2})}, \tag{4.10}$$

$$R = \Re_{(\mathbf{1})} - \mathcal{S}_{(12)}(\mu)(D + \mathcal{S}_{(22)}(\mu))^{-1}\mathcal{P}\Re_{(\mathbf{2})}. \tag{4.11}$$

Компоненты векторов $\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{1})}$ и $\mathcal{Y}^+_{(\mathbf{2})}$ удовлетворяют задаче (2.17); ввиду (4.10) то же верно и для компонент вектора Z. Кроме того, из включений $\Re_{(\mathbf{1})}, \Re_{(\mathbf{2})} \in H^2_\delta(G)$ и равенства (4.11) вытекает, что $R \in H^2_\delta(G)$. Значит, формула (4.9) описывает рассеяние вектора $\mathbf{w}^+_{(\mathbf{1})}$ приходящих волн в „нерасширенном“ базисе $\mathbf{w}^+_{(\mathbf{1})}, \mathbf{w}^-_{(\mathbf{1})}$, как и формула (3.3), и потому выполняется равенство (4.4). $\square$

4.2. Связь матриц $\mathcal{S}(\mu)$ и $S(\mu)$ при $\tau < \mu < \tau''$. При $\tau < \mu < \tau''$ рассматриваются два базиса в пространстве волн $\mathcal{W}(\mu, G)$. Один из базисов составляют волны в G, отвечающие функциям вида $u^\pm_q(\cdot, \mu)$ из (2.6), а второй базис состоит из волн, порожденных функциями $w^\pm_q(\cdot, \mu)$ (см. (2.10), (2.11)). Как и прежде, матрицы рассеяния, определенные в указанных базисах, обозначаются через $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$ (см. теорему 3.6); теперь, т.е. при $\mu \in (\tau, \tau'')$, это матрицы одного и того же порядка M.

Матрицы рассеяния не зависят от выбора срезающей функции χ в определении пространства волн $\mathcal{W}(\mu, G)$. Можно исключить срезку из дальнейших рассуждений, отождествляя „эквивалентные“ волны. С этой целью введем фактор-пространство

$$\dot{\mathcal{W}}(\mu, G) := (\mathcal{W}(\mu, G) \dot{+} H^2_\gamma(G))/H^2_\gamma(G).$$

Через $\dot{v}$ обозначим класс из $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$, представителем которого является волна $v \in \mathcal{W}(\mu, G)$. Далее волны вида $\chi u^\pm_q(\cdot, \mu)$ и $\chi w^\pm_q(\cdot, \mu)$ в области G будем обозначать просто $u^\pm_q(\cdot, \mu)$ и $w^\pm_q(\cdot, \mu)$. Наборы $\{\dot{u}^\pm_q(\cdot, \mu)\}^M_{j=1}$ и $\{\dot{w}^\pm_k(\cdot, \mu)\}^M_{k=1}$ являются базисами в пространстве $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$, так что

$\dim \dot{\mathcal{W}}(\mu, G) = 2M$. Форма $q_G(u,v)$ из (2.18) не зависит от выбора представителей в классах $\dot{u}$, $\dot{v}$ и потому определена на произведении $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G) \times \dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$. Из (2.8), (2.9) следует, что

$$iq_G(\dot{u}_k^{\pm}(\cdot\,;\mu), \dot{u}_l^{\mp}(\cdot\,;\mu)) = 0 \ \text{ при всех } \ k,l = 1,\dots,M, \tag{4.12}$$

$$iq_G(\dot{u}_k^{\pm}(\cdot\,;\mu), \dot{u}_l^{\pm}(\cdot\,;\mu)) = \mp\delta_{kl}, \tag{4.13}$$

а формулы (2.12), (2.13) приводят к соотношениям

$$iq_G(\dot{w}_r^{\pm}(\cdot\,;\mu), \dot{w}_s^{\mp}(\cdot\,;\mu)) = 0 \ \text{ при всех } \ r,s = 1,\dots,M, \tag{4.14}$$

$$iq_G(\dot{w}_r^{\pm}(\cdot\,;\mu), \dot{w}_s^{\pm}(\cdot\,;\mu)) = \mp\delta_{rs}. \tag{4.15}$$

Итак, $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$ является $2M$-мерным комплексным пространством, наделенным индефинитным скалярным произведением $< \dot{u}, \dot{v} > := -iq_G(\dot{u}, \dot{v})$. Проекция

$$\pi : \mathcal{W}(\mu, G) \dot{+} H^2_\gamma(G)) \to \dot{\mathcal{W}}(\mu, G) \tag{4.16}$$

переводит пространство собственных функций непрерывного спектра в M-мерное подпространство в $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$; обозначим это подпространство через $\mathcal{E}(\mu)$.

Пусть $V_1, \dots, V_{2M}$ — базис в $\dot{\mathcal{W}}(\mu, G)$, подчиненный условиям ортогональности и нормировки

$$< V_j, V_l > = \delta_{j\,l}, \ < V_{j+M}, V_{l+M} > = -\delta_{j\,l} \ \text{ при } \ j,l = 1,\dots,M. \tag{4.17}$$

Элементы $V_1, \dots, V_M$ назовем приходящими волнами, а элементы $V_{M+1}, \dots, V_{2M}$ — уходящими. Пусть еще $X_1, \dots, X_M$ — базис в пространстве $\mathcal{E}(\mu)$, которому в базисе волн $V_1, \dots, V_{2M}$ отвечает $M \times M$-матрица рассеяния $\mathfrak{S}(\mu)$ (ср. с (3.3)). Векторы X_j представим строками координат и составим $M \times 2M$-матрицу $X = (X_1, \dots, X_M)^t$ (столбец из букв $X_1, \dots, X_M$). Наконец, пусть I обозначает единичную матрицу размера $M \times M$. В таких обозначениях формула вида (3.3) приводит к равенству

$$X = (I, \mathfrak{S}(\mu))V, \tag{4.18}$$

где V есть $2M \times 2M$-матрица $(V_1, \dots, V_{2M})^t$, составленная из координатных строк векторов V_j, а $(I, \mathfrak{S}(\mu))$ является матрицей размера $M \times 2M$.

Предположим, что $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_{2M}$ — другой базис волн, подчиненный условиям вида (4.17), а $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_M$ — базис в пространстве $\mathcal{E}(\mu)$ и $\tilde{\mathfrak{S}}(\mu)$ — соответствующая матрица рассеяния такие, что

$$\tilde{X} = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\tilde{V}. \tag{4.19}$$

Будем считать, что $\tilde{V} = \mathfrak{T}V$, и запишем $2M \times 2M$-матрицу $\mathfrak{T}$ в виде $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}_{k\,l})^2_{k,\,l=1}$ с блоками $\mathfrak{T}_{k\,l}$ размера $M \times M$.

Лемма 4.2. *Матрицы* $\mathfrak{T}_{11}+\tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{21}$ *и* $\mathfrak{T}_{12}+\tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{22}$ *обратимые, причем*

$$\mathfrak{S}(\mu) = (\mathfrak{T}_{11} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{21})^{-1}(\mathfrak{T}_{12} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{22}). \tag{4.20}$$

Доказательство. Для базисов $X_1, \dots, X_M$ и $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_M$ существует такая неособенная $M \times M$ матрица B, что $\tilde{X} = BX$. Поэтому в силу (4.19) имеем

$$BX = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\mathfrak{T}V.$$

Учитывая (4.18), отсюда выводим, что

$$B(I, \mathfrak{S}(\mu))V = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\mathfrak{T}V.$$

Значит,

$$B(I, \mathfrak{S}(\mu)) = (I, \tilde{\mathfrak{S}}(\mu))\mathfrak{T}.$$

Последнее равенство переписывается в виде

$$(B, B\mathfrak{S}(\mu)) = (\mathfrak{T}_{11} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{21}, \mathfrak{T}_{12} + \tilde{\mathfrak{S}}(\mu)\mathfrak{T}_{22}).$$

Теперь утверждения леммы очевидны. □

Мы намерены применить формулу (4.20), выбирая в качестве $\tilde{V}$ образ при канонической проекции (4.16) устойчивого базиса волн в пространстве $\mathcal{W}(\mu, G)$ из формулы (3.8), а в качестве V — образ базиса волн из формулы (3.3). Роль $\tilde{\mathfrak{S}}(\mu)$ будет играть матрица рассеяния $\mathcal{S}(\mu)$, а роль $\mathfrak{S}(\mu)$ отводится матрице $S(\mu)$. Займемся вычислением матрицы $\mathfrak{T}$ в равенстве $\tilde{V} = \mathfrak{T}V$. При этом вместо $\tilde{V}$ и V можно рассматривать их только что упомянутые прообразы в $\mathcal{W}(\mu, G)$. Положим

$$u_j := u_j^+, \quad u_{j+M} := u_j^-, \quad j = 1, \dots, M, \tag{4.21}$$

где $u_j^\pm$ — волны из пространства $\mathcal{W}(\mu, G)$, порожденные функциями вида (2.6). Введем еще

$$\begin{aligned} &w_j := w_j^+ = u_j^+, \quad w_{j+M} := w_j^- = u_j^-, \quad j = 1, \dots, L, \\ &w_p := w_p^+, \quad w_{p+M} := w_p^-, \quad p = L+1, \dots, M, \end{aligned} \tag{4.22}$$

причем $w_p^\pm$ — волны из $\mathcal{W}(\mu, G)$, порожденные функциями (2.10). Для матрицы $\mathfrak{T}$ справедливо равенство $w = \mathfrak{T}u$ с векторами-столбцами $w = (w_1, \dots, w_{2M})^t$ и $u = (u_1, \dots, u_{2M})^t$. Функции (2.10) (обозначая их здесь для удобства так же, как волны $w_p^\pm$) запишем в виде

$$w_p^\pm(\mu) = 2^{-1/2}((e^{it\lambda} + e^{-it\lambda})/2) \mp (e^{it\lambda} - e^{-it\lambda})/2\lambda)\varphi_p,$$

где $\lambda = \sqrt{\mu - \tau}$ и τ — порог; функции (2.6) записываются в виде

$$u_p^\pm(\mu) = (2\lambda)^{-1/2} e^{\mp it\lambda} \varphi_p.$$

Значит,

$$w_p^{\pm} = (1/2)(u_p^{+}(\lambda^{1/2} \pm \lambda^{-1/2}) + u_p^{-}(\lambda^{1/2} \mp \lambda^{-1/2})), \quad p = L+1, \dots, M,$$

причем в этом равенстве под $w_p^{\pm}$ и $u_p^{\pm}$ можно понимать как функции (в цилиндре), так и соответствующие волны в области G. Вместе с (4.21) и (4.22) это приводит к следующему описанию блоков $\mathfrak{T}_{ij}$ матрицы $\mathfrak{T}$.

Лемма 4.3. *Каждая из матриц $\mathfrak{T}_{ij}$ состоит из четырех блоков и является блочно диагональной. Справедливы равенства*

$$\mathfrak{T}_{11}(\mu) = \mathfrak{T}_{22}(\mu) = \operatorname{diag}\{I_L,\ 2^{-1}(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})I_{M-L}\}, \tag{4.23}$$

$$\mathfrak{T}_{21}(\mu) = \mathfrak{T}_{12}(\mu) = \operatorname{diag}\{O_L,\ 2^{-1}(\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2})I_{M-L}\}, \tag{4.24}$$

где I_K — единичная матрица размера $K \times K$, матрица O_L размера $L \times L$ состоит из нулей, $\lambda = \sqrt{\mu - \tau}$ и $\mu \in (\tau, \tau'')$.

Вернемся к формуле (4.20) с матрицами $\mathcal{S}$ и S вместо $\tilde{\mathfrak{S}}$ и $\mathfrak{S}$. Матрицу $\mathcal{S}$ разобьем на четыре блока с диагональными блоками $\mathcal{S}_{11}$ размера $L \times L$ и $\mathcal{S}_{22}$ размера $(M-L) \times (M-L)$. Положим еще $d^{\pm} = 2^{-1}(\lambda^{1/2} \pm \lambda^{-1/2})$. Тогда

$$\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}\mathfrak{T}_{21} = \begin{pmatrix} I_L & \mathcal{S}_{12}d^- \\ O & \mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+ \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Согласно лемме 4.2 матрица $\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}\mathfrak{T}_{21}$ обратима, следовательно, обратима и матрица $\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+$, так что

$$(\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}\mathfrak{T}_{21})^{-1} = \begin{pmatrix} I_L & -\mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1} \\ O & (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Теперь из формулы (4.20) вытекает

Предложение 4.4. *При $\mu \in (\tau, \tau'')$ для блоков S_{ij} матрицы рассеяния*

$$S(\mu) = (\mathfrak{T}_{11} + \mathcal{S}(\mu)\mathfrak{T}_{21})^{-1}(\mathfrak{T}_{12} + \mathcal{S}(\mu)\mathfrak{T}_{22})$$

справедливы представления

$$S_{11} = \mathcal{S}_{11} - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \tag{4.27}$$

$$S_{12} = \mathcal{S}_{12}d^+ - \mathcal{S}_{12}d^-(\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-), \tag{4.28}$$

$$S_{21} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}\mathcal{S}_{21}, \tag{4.29}$$

$$S_{22} = (\mathcal{S}_{22}d^- + I_{M-L}d^+)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+ + I_{M-L}d^-). \tag{4.30}$$

4.3. Пределы $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau \pm 0$. Для вычисления предела $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau - 0$ используем формулу (4.4), а при $\mu \to \tau + 0$ будем применять равенства (4.27)–(4.30). Процедура вычисления пределов зависит от того, является или не является число 1 собственным для матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$.

4.3.1. Пределы $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau \pm 0$ в случае, когда 1 не является собственным числом матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$. Напомним, что функции $\mu \mapsto \mathcal{S}_{kl}(\mu)$ аналитичны в окрестности точки $\mu = \tau$. Поэтому из (4.4) непосредственно получаем

$$\lim_{\mu\to\tau-0} S(\mu) = \mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1}\mathcal{S}_{21}(\tau). \tag{4.31}$$

Займемся вычислением пределов при $\mu \to \tau + 0$. В силу (4.27) и (4.31) имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\tau+0} S_{11}(\mu) &= \lim_{\mu\to\tau+0}(\mathcal{S}_{11}(\mu) - \mathcal{S}_{12}(\mu)(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+(\mu)/d^-(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{21}(\mu)) \\ &= \mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1}\mathcal{S}_{21}(\tau) = \lim_{\mu\to\tau-0} S(\mu).\end{aligned} \tag{4.32}$$

Согласно (4.30)

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\tau+0} S_{22}(\mu) &= \lim_{\mu\to\tau+0}(\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}(\mathcal{S}_{22}d^+/d^- + 1) \\ &= (\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1}(-\mathcal{S}_{22}(\tau) + 1) = -I_{M-L}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Из (4.29) выводим, что

$$S_{21}(\mu) = (\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}\mathcal{S}_{21}/d^-.$$

Поскольку $d^-(\mu) = 2^{-1}((\mu-\tau)^{1/2} - 1)/(\mu-\tau)^{1/4}$, приходим к формуле

$$S_{21}(\mu) = O((\mu-\tau)^{1/4}) \to 0 \ \text{ при } \ \mu \to \tau + 0. \tag{4.34}$$

Наконец, обратимся к блоку $S_{12}(\mu)$. Перепишем (4.28) в виде

$$\begin{aligned}S_{12} &= \mathcal{S}_{12}d^+(1 - (\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}(\mathcal{S}_{22} + d^-/d^+)) \\ &= \mathcal{S}_{12}d^+(\mathcal{S}_{22} + d^+/d^-)^{-1}(d^+/d^- - d^-/d^+).\end{aligned}$$

Так как

$$d^+(\mu)(d^+/d^- - d^-/d^+) = 2(\mu-\tau)^{1/4}/((\mu-\tau)^{1/2} - 1),$$

получаем

$$S_{12}(\mu) = O((\mu-\tau)^{1/4}) \to 0 \ \text{ при } \ \mu \to \tau + 0. \tag{4.35}$$

4.3.2. Пределы $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau \pm 0$ в случае, когда 1 — собственное число матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$. Положим $\lambda = \sqrt{\mu - \tau}$, $\mu = \tau + \lambda^2$ и рассмотрим функцию $\lambda \mapsto \Phi(\lambda) : \mathbb{C}^{M-L} \to \mathbb{C}^{M-L}$,

$$\Phi(\lambda) := \mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+(\mu)/d^-(\mu) = \mathcal{S}_{22}(\tau + \lambda^2) + (\lambda + 1)/(\lambda - 1). \tag{4.36}$$

Число $\lambda = 0$ является собственным для функции $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)$ в том и только том случае, если 1 есть собственное число матрицы $\mathcal{S}_{22}(\tau)$; при этом $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1) = \ker\Phi(0)$. Для вычисления пределов $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau \pm 0$

понадобятся сведения о резольвенте $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)^{-1}$ в окрестности точки $\lambda = 0$. Они приводятся ниже в предложениях 4.5 и 4.6.

Предложение 4.5. *Справедливо равенство*

$$\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1) = \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1). \tag{4.37}$$

Доказательство. Пусть $h \in \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$. Тогда, как было установлено в доказательстве леммы 3.7, вектор $(0, h)^t \in \mathbb{C}^M$ принадлежит ядру $\ker(\mathcal{S}(\tau) - 1)$ и $\mathcal{S}_{12}(\tau)h = 0$. Таким же рассуждением, примененным к матрице $\mathcal{S}(\tau)^*$ вместо $\mathcal{S}(\tau)$, проверяется, что если $g \in \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1)$, то $(0, g)^t \in \ker(\mathcal{S}(\tau)^* - 1)$ и $\mathcal{S}_{21}(\tau)^* g = 0$. Поскольку $\mathcal{S}(\tau)^* = \mathcal{S}(\tau)^{-1}$, имеем

$$\ker(\mathcal{S}(\tau) - 1) = \ker(\mathcal{S}(\tau)^* - 1). \tag{4.38}$$

Пусть $h_1, \ldots, h_\varkappa$ — базис ядра $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$, а $g_1, \ldots, g_\varkappa$ — базис ядра $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1)$. Положим $\tilde{h}_j = (0, h_j)^t$ и $\tilde{g}_j = (0, g_j)^t$. Из формулы (4.38) и сказанного перед ней следует, что

$$\tilde{h}_j, \tilde{g}_j \in \ker(\mathcal{S}(\tau) - 1) = \ker(\mathcal{S}(\tau)^* - 1), \quad j = 1, \ldots, \varkappa.$$

Поэтому всякий вектор набора $h_1, \ldots, h_\varkappa$ является линейной комбинацией векторов из набора $g_1, \ldots, g_\varkappa$ и наоборот. □

Заметим, что из доказательства предложения 4.5 следуют, между прочим, равенства $\mathcal{S}_{12}(\tau)h = 0$ и $\mathcal{S}_{21}(\tau)^* h = 0$ для элементов ядер (4.37).

Предложение 4.6. *Пусть* Φ *— матрица-функция из* (4.36) *и*

$$\dim\ker\Phi(0) = \varkappa > 0.$$

Тогда в проколотой окрестности точки $\lambda = 0$ *для резольвенты* $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)^{-1}$ *справедливо представление*

$$\Phi(\lambda)^{-1} = -(2\lambda)^{-1} \sum_{j=1}^{\varkappa} \{\cdot, h_j\} h_j + \Gamma(\lambda); \tag{4.39}$$

здесь $h_1, \ldots, h_\varkappa$ *— ортонормированный базис ядра* $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$, $\{u, v\}$ *— скалярное произведение в пространстве* $\mathbb{C}^{M-L}$, *а* $\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) : \mathbb{C}^{M-L} \to \mathbb{C}^{M-L}$ *— матрица-функция, голоморфная в окрестности точки* $\lambda = 0$.

Доказательство. Согласно известной формуле (см., например, [9, 10]) резольвента $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$ голоморфной оператор-функции $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda)$ в проколотой окрестности изолированного собственного значения λ_0 при определенных условиях допускает представление

$$\mathfrak{A}(\lambda)^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} \sum_{j=1}^{\varkappa} (\cdot, \psi_j)\phi_j + \Gamma(\lambda), \tag{4.40}$$

где $\phi_1, \dots, \phi_\varkappa$ и $\psi_1, \dots, \psi_\varkappa$ — базисы в пространствах $\ker \mathfrak{A}(\lambda_0)$ и $\ker \mathfrak{A}(\lambda_0)^*$, подчиненные условиям ортогональности и нормировки

$$(\partial_\lambda \mathfrak{A}(\lambda_0)\phi_j, \psi_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, \varkappa, \tag{4.41}$$

а Γ — оператор-функция, голоморфная в окрестности точки λ_0. Формула (4.40) относится к случаю, когда в точке λ_0 нет присоединенных векторов оператор-функции $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda)$. Для того чтобы обосновать формулу (4.39), мы должны убедиться в отсутствии присоединенных векторов у функции $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ и проверить совпадение (4.39) с представлением вида (4.40).

Займемся сначала присоединенными векторами. Пусть $0 \neq h^0 \in \ker \Phi(0)$. Уравнение $\Phi(0)h^1 + (\partial_\lambda \Phi)(0)h^0 = 0$ для присоединенного вектора h^1 переписывается в виде

$$(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)h^1 = 2h^0.$$

Необходимым условием разрешимости такого уравнения является ортогональность вектора h^0 линеалу $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)^* - 1) = \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$ (см. (4.37)). Поскольку $0 \neq h^0 \in \ker \Phi(0) = \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$, условие разрешимости не выполнено и, значит, присоединенных векторов нет.

Сравним формулы (4.39) и (4.40). Имеем $(\partial_\lambda \Phi)(0) = -2I_{M-L}$. Кроме того, учитывая (4.37), базисы $\phi_1, \dots, \phi_\varkappa$ и $\psi_1, \dots, \psi_\varkappa$ в (4.40) можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства $\phi_j = -\psi_j = h_j/\sqrt{2}$, а в качестве $h_1, \dots, h_\varkappa$ взять ортонормированный базис ядра $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$. Тогда

$$\{(\partial_\lambda \Phi)(0)\phi_j, \psi_k\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, \varkappa,$$

а представление (4.40) принимает вид (4.39). □

Обратимся к вычислению предела $\lim S(\mu)$ при $\mu \to \tau - 0$. Согласно лемме 3.7 $\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1) \supset \operatorname{Im}\mathcal{S}_{21}(\tau)$. Поэтому из предложения 4.5 следуют равенства $\{\mathcal{S}_{21}(\tau)f, h_j\} = 0$ для любого вектора $f \in \mathbb{C}^L$ и векторов $h_1, \dots, h_\varkappa$ из (4.39). Благодаря аналитичности функции $\mu \to \mathcal{S}_{21}(\mu)$ имеем $\mathcal{S}_{21}(\mu) = \mathcal{S}_{21}(\tau) + O(|\mu - \tau|)$; напомним,что $|\mu - \tau| = |\lambda|^2$. Применяя формулу (4.39), получаем

$$(\mathcal{S}_{22}(\mu) + D(\mu))^{-1}\mathcal{S}_{21}(\mu) = \Gamma(\lambda)\mathcal{S}_{21}(\mu) + O(|\lambda|). \tag{4.42}$$

Теперь из (4.4) вытекает соотношение

$$\lim_{\mu \to \tau - 0} S(\mu) = \mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)\Gamma(0)\mathcal{S}_{21}(\tau); \tag{4.43}$$

с помощью леммы 3.7 правую часть можно интерпретировать как оператор $\mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)^{-1}\mathcal{S}_{21}(\tau)$ (ср. с формулой (4.31)). При $\mu \to \tau - 0$ имеет место оценка

$$S(\mu) - (\mathcal{S}_{11}(\tau) - \mathcal{S}_{12}(\tau)\Gamma(0)\mathcal{S}_{21}(\tau)) = O(|\mu - \tau|^{1/2}). \tag{4.44}$$

Переходим к вычислению пределов при $\mu \to \tau + 0$. Предел $\lim_{\mu \to \tau+0} S_{11}(\mu)$ вычисляется так же, как $\lim_{\mu \to \tau-0} S(\mu)$, и получается равенство

$$\lim_{\mu \to \tau+0} S_{11}(\mu) = \lim_{\mu \to \tau-0} S(\mu). \tag{4.45}$$

По формуле (4.30)

$$\begin{aligned} S_{22}(\mu) &= \left(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+/d^-\right)^{-1}\left(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^-/d^+\right) d^+/d^- \\ &= d^+/d^- + \left(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+/d^-\right)^{-1}\left(d^-/d^+ - d^+/d^-\right) d^+/d^-. \end{aligned}$$

Применяя представление (4.39) для резольвенты, переписываем последнее равенство в виде

$$S_{22}(\mu) = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\Big(I + \frac{2}{\lambda^2-1}\sum_{j=1}^{\varkappa}(\cdot, h_j)h_j - \frac{4\lambda}{\lambda^2-1}\Gamma(\lambda)\Big). \tag{4.46}$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu \to \tau+0} S_{22}(\mu) = 2\sum_{j=1}^{\varkappa}(\cdot, h_j)h_j - I = P - Q, \tag{4.47}$$

где $P = \sum_{j=1}^{\varkappa}(\cdot, h_j)h_j$ — ортогональный проектор $\mathbb{C}^{M-L}$ на ядро $\ker(\mathcal{S}_{22}(\tau) - 1)$ и $Q = I - P$. Кроме того, при $\mu \to \tau + 0$ из (4.46) вытекает оценка

$$S_{22}(\mu) - P + Q = O(|\mu - \tau|^{1/2}). \tag{4.48}$$

Согласно (4.29)

$$S_{21}(\mu) = (\mathcal{S}_{22}(\mu) + I_{M-L}d^+/d^-)^{-1}\mathcal{S}_{21}/d^-.$$

С учетом формулы (4.42) и равенства $d^- = (\lambda - 1)/2\sqrt{\lambda}$ получаем

$$S_{21}(\mu) = (\Gamma(\lambda)\mathcal{S}_{21}(\mu) + O(|\lambda|))\, 2\sqrt{\lambda}/(\lambda - 1).$$

Таким образом,

$$S_{21}(\mu) = O(|\mu - \tau|^{1/4}) \to 0 \ \text{ при } \ \mu \to \tau + 0. \tag{4.49}$$

Осталось вычислить предел блока $S_{12}(\mu)$. Ввиду (4.28)

$$S_{12}(\mu) = \mathcal{S}_{12}(\mu)d^+\left(I - (\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+/d^-)^{-1}(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^-/d^+)\right).$$

Поскольку

$$(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+/d^-)^{-1}(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^-/d^+) = I - \frac{4\lambda}{\lambda^2-1}(\mathcal{S}_{22}(\mu) + d^+/d^-)^{-1},$$

приходим к равенству

$$S_{12}(\mu) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\mathcal{S}_{12}(\mu)\Big(- \frac{1}{2\lambda}\sum(\cdot, h_j)h_j + \Gamma(\lambda)\Big).$$

Вспомним, что $h_j \in \ker(\mathcal{S}_{22}(\tau)-1) \subset \ker\mathcal{S}_{12}(\tau)$ (см. (3.20)), $\mathcal{S}_{12}(\mu) = \mathcal{S}_{12}(\tau) + O(|\mu-\tau|)$ и $\mu-\tau=\lambda^2$. Поэтому при $\mu \to \tau+0$ имеем

$$S_{12}(\mu) = O(|\mu-\tau|^{1/4}) \to 0. \tag{4.50}$$

§5. Метод вычисления матрицы рассеяния

Сначала напомним метод вычисления матрицы рассеяния $S(\mu)$ из теоремы 3.6, i) для $\mu' \leqslant \mu \leqslant \mu''$, причем $[\mu',\mu''] \subset (\tau',\tau)$ или $[\mu',\mu''] \subset (\tau,\tau'')$. Отрезок $[\mu',\mu'']$ может содержать собственные числа оператора (3.5). В случае задачи Дирихле для оператора Лапласа метод был обоснован в работе [2] и обобщен на случай произвольной эллиптической системы в [3]. Положим

$$\Pi_+^{r,R} = \{(y^r,t^r) \in \Pi^r : t^r > R\}, \quad G^R = G \setminus \cup_{r=1}^{\mathcal{T}} \Pi_+^{r,R},$$
$$\partial G^R \setminus \partial G = \Gamma^R = \cup_r \Gamma^{r,R}, \quad \Gamma^{r,R} = \{(y^r,t^r) \in \Pi^r : t^r = R\}$$

при больших R и введем краевую задачу

$$\begin{aligned} -\Delta X_j^R(x,\mu) - \mu X_j^R(x,\mu) &= 0, \quad x \in G^R;\\ X_j^R(x,\mu) &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R;\\ (-\partial_n + i\zeta) X_j^R(x,\mu) &= (-\partial_n + i\zeta)\Big(u_j^+(x,\mu) + \sum_{k=1}^M a_k u_k^-(x,\mu)\Big), \quad x \in \Gamma^R; \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — произвольное фиксированное число, a_k — комплексные числа и $u_j^\pm$ — волны из формулы (2.6). Приближением для строки $(S_{j1},\dots,S_{jM})$ служит минимизатор $a^0(R,\mu) = (a_1^0(R,\mu),\dots,a_M^0(R,\mu))$ функционала

$$J_j^R(a_1,\dots,a_M;\mu) = \Big\| X_j^R(\cdot,\mu) - u_j^+(\cdot,\mu) - \sum_{k=1}^M a_k u_k^-(\cdot,\mu); L_2(\Gamma^R)\Big\|^2, \tag{5.2}$$

где X_j^R — решение задачи (5.1). Чтобы выписать зависимость X_j^R от параметров $a_1,\dots,a_M$, рассмотрим задачи

$$\begin{aligned} -\Delta v_j^\pm - \mu v_j^\pm &= 0, \quad x \in G^R;\\ v_j^\pm &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R;\\ (-\partial_n + i\zeta) v_j^\pm &= (-\partial_n + i\zeta) u_j^\pm, \quad x \in \Gamma^R; \quad j = 1,\dots,M. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Имеем $X_j^R = v_{j,R}^+ + \sum_k a_k v_{k,R}^-$. Введем $M \times M$-матрицы с элементами

$$\mathbf{E}_{jk}^R = \left(v_j^- - u_j^-, v_k^- - u_k^-\right)_{\Gamma^R},$$
$$\mathbf{F}_{jk}^R = \left(v_j^+ - u_j^+, v_k^- - u_k^-\right)_{\Gamma^R}.$$

Положим еще

$$\mathbf{G}_j^R = \left(v_j^+ - u_j^+, v_j^+ - u_j^+\right)_{\Gamma^R}.$$

Теперь функционал (5.2) можно записать в виде

$$J_j^R(a) = \langle a\mathbf{E}^R, a\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle \mathbf{F}_j^R, a\rangle + \mathbf{G}_j^R,$$

где $\mathbf{F}_j^R$ — строка с номером j матрицы $\mathbf{F}^R$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^M$. Минимум реализуется на строке $a^0(R,\mu)$, удовлетворяющей системе $a^0(R,\mu)\mathbf{E}^R + \mathbf{F}_j^R = 0$; матрица $\mathbf{E}^R$ невырождена.

В [2] показано, что минимизатор $a^0(R,\mu)$ стремится к строке $(S_{j1},\ldots,S_{jM})$ при $R \to +\infty$ с экспоненциальной скоростью. Более точно, имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^M |S_{jk}(\mu) - a_k^0(R,\mu)| \leqslant Ce^{-\Lambda R}$$

для любых $R \geqslant R_0$ и $0 < \Lambda < \delta$, где δ — постоянная из (3.3), R_0 — достаточно большое положительное число, постоянная $C = C(\Lambda)$ не зависит ни от R, ни от $\mu \in [\mu',\mu'']$. Напомним, что при сделанных предположениях можно число δ в (3.3) выбрать не зависящим от $\mu \in [\mu',\mu'']$. Если μ'', возрастая, приближается к порогу, то δ стремится к нулю и описанный метод становится непригодным.

Теперь обратимся к вычислению матрицы $\mathcal{S}(\mu)$ из теоремы 3.6, ii) при $\mu \in [\mu',\mu''] \subset (\tau',\tau'')$. Порог τ может лежать на отрезке $[\mu',\mu'']$; кроме того, на этом отрезке могут содержаться собственные числа оператора (3.10). Введем краевую задачу

$$\begin{aligned}
-\Delta\mathcal{X}_j^R - \mu\mathcal{X}_j^R = 0, &\quad x \in G^R;\\
\mathcal{X}_j^R = 0, &\quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R;\\
(-\partial_n + i\zeta)\mathcal{X}_j^R = (-\partial_n + i\zeta)\Big(w_j^+ + \sum_{k=1}^M a_k w_k^-\Big), &\quad x \in \Gamma^R,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $w_j^\pm$ — устойчивый базис (2.10), (2.11) в пространстве волн, $\zeta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a_k \in \mathbb{C}$. В качестве приближения для строки $(\mathcal{S}_{j1},\ldots,\mathcal{S}_{jM})$ предлагается минимизатор $a^0(R) = (a_1^0(R), \dots, a_M^0(R))$ функционала

$$\mathcal{J}_j^R(a_1, \dots, a_M) = \Big\| \mathcal{X}_j^R - w_j^+ - \sum_{k=1}^{M} a_k w_k^-; L_2(\Gamma^R) \Big\|^2, \tag{5.5}$$

где $\mathcal{X}_j^R$ — решение задачи (5.4). Рассмотрим задачи

$$\begin{aligned} -\Delta z_j^\pm - \mu z_j^\pm &= 0, \quad x \in G^R; \\ z_j^\pm &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (-\partial_n + i\zeta) z_j^\pm &= (-\partial_n + i\zeta) w_j^\pm, \quad x \in \Gamma^R; \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

положим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{jk}^R &= \left(z_j^- - w_j^-, z_k^- - w_k^- \right)_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{F}_{jk}^R &= \left(z_j^+ - w_j^+, z_k^- - w_k^- \right)_{\Gamma^R}, \\ \mathcal{G}_j^R &= \left(z_j^+ - w_j^+, z_j^+ - w_j^+ \right)_{\Gamma^R} \end{aligned} \tag{5.6}$$

и перепишем функционал (5.5) в виде

$$\mathcal{J}_j^R(a) = \langle a \mathcal{E}^R, a \rangle + 2 \mathrm{Re}\, \langle \mathcal{F}_j^R, a \rangle + \mathcal{G}_j^R,$$

где $\mathcal{F}_j^R$ — строка с номером j матрицы $\mathcal{F}^R$. Таким образом, минимизатор $a^0(R)$ является решением системы $a^0(R)\mathcal{E}^R + \mathcal{F}_j^R = 0$.

Схема обоснования метода подобна схеме, использованной в работе [3]. Следующие предложения 5.1 и 5.2 проверяются дословным повторением доказательств аналогичных утверждений из [3].

Предложение 5.1. *Матрица $\mathcal{E}^R(\mu)$ с элементами* (5.6) *не вырождается при всех $\mu \in [\mu', \mu'']$ и $R \geqslant R_0$, где R_0 — достаточно большое число.*

Предложение 5.2. *Пусть u — решение задачи*

$$\begin{aligned} -\Delta u - \mu u &= 0, \quad x \in G^R; \\ u &= 0, \quad x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R; \\ (-\partial_n + i\zeta) u &= h, \quad x \in \Gamma^R; \end{aligned}$$

где $h \in L_2(\Gamma^R)$. Тогда

$$\|u; L_2(\Gamma^R)\| \leqslant \frac{1}{|\zeta|} \|h; L_2(\Gamma^R)\|. \tag{5.7}$$

Предложение 5.3. *Пусть вектор $a^0(R,\mu) = (a_1^0(R,\mu),\dots,a_M^0(R,\mu))$ доставляет минимум функционалу $\mathcal{J}_l^R$ из формулы (5.5). Тогда*

$$\mathcal{J}_l^R\left(a^0(R,\mu)\right) \leqslant Ce^{-2\gamma R} \ \text{ при } \ R\to\infty, \tag{5.8}$$

с постоянной C, не зависящей от $R \geqslant R_0$ и $\mu \in [\mu',\mu'']$; γ — число из формулы (3.8). Для всех $R \geqslant R_0$ и $\mu \in [\mu',\mu'']$ компоненты вектора $a^0(R,\mu)$ равномерно ограничены,

$$|a_j^0(R,\mu)| \leqslant \mathrm{const} < \infty, \quad j=1,\dots,M.$$

Доказательство. Соотношение (5.8) получается тем же путем, что и в [3]. Проверим равномерную ограниченность минимизатора $a(R)$. Согласно лемме 3.4 существует конечное покрытие отрезка $[\mu',\mu'']$ интервалами I_p, на каждом из которых можно выбрать число $\gamma(\mu)$ в (3.8) (а следовательно, и в (5.8)) не зависящим от μ, при этом $\max_{\mu\in I_p}\mathrm{Re}\sqrt{\tau-\mu} < \gamma < \min_{\mu\in I_p}\mathrm{Re}\sqrt{\tau''-\mu}$. Считаем, что μ пробегает однин из интервалов этого покрытия. Обозначим через Z_l^R решение задачи (5.4), отвечающее вектору $a^0(R,\mu) = (a_1^0(R,\mu),\dots,a_M^0(R,\mu))$. В формуле Грина положим $u=v=Z_l^R$. Имеем

$$(-\partial_\nu Z_l^R, Z_l^R)_{\Gamma^R} - (Z_l^R, -\partial_\nu Z_l^R)_{\Gamma^R} = 0. \tag{5.9}$$

В силу (5.8)

$$\Big\|Z_l^R - \Big(w_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j(R,\mu)w_j^-\Big); L_2(\Gamma^R)\Big\| = O(e^{-\gamma R}), \quad R\to\infty, \tag{5.10}$$

равномерно относительно μ. Поскольку

$$(-\partial_\nu + i\zeta)Z_l^R|_{\Gamma^R} = (-\partial_\nu + i\zeta)\Big(w_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j^0(R)w_j^-\Big)|_{\Gamma^R},$$

из (5.9) получаем

$$\Big\| -\partial_\nu\Big(Z_l^R - \Big(w_l^+ + \sum_{j=1}^M a_j^0(R)w_j^-\Big)\Big); L_2(\Gamma^R)\Big\| = O(e^{-\gamma R}), \quad R\to\infty. \tag{5.11}$$

Напомним, что при $\mu>\tau$ волны $w_l^\pm$ являются ограниченными функциями; при $\mu<\tau$ волны $w_l^\pm$ с номерами $L<l\leqslant M$, определенные равенствами (4.2), растут на бесконечности как $O(e^{\sqrt{\tau-\mu}\,|x|})$ и как $O(|x|)$ при $\mu=\tau$. Используя (5.10) и (5.11), приведем (5.9) к виду

$$(-\partial_\nu\varphi_l,\varphi_l)_{\Gamma^R} - (\varphi_l, -\partial_\nu\varphi_l)_{\Gamma^R} = |a^0(R)|\,O(e^{-(\gamma-\sqrt{\tau-\mu}-\delta)R}),$$

где $\varphi_l = w_l^+ + \sum a_j^0(R)w_j^-$; как и ранее, $\sqrt{\tau-\mu} = i\sqrt{\mu-\tau}$ при $\mu > \tau$; δ — произвольно малое положительное число. В силу (2.12), (2.13) левая часть равна $-i(1-\sum|a_j^0(R)|^2)$. Итак,

$$|a^0(R)|^2 = 1 + o(|a^0(R)|),$$

откуда следует, что $|a^0(R)| = 1 + o(1)$. Перебирая все элементы покрытия, получаем нужную оценку на всем отрезке $[\mu', \mu'']$. □

Теорема 5.4. *Для всех $R \geqslant R_0$, где R_0 — достаточно большое положительное число, и всех $\mu \in [\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$ существует единственный вектор $a^0(R,\mu) = (a_1^0(R,\mu), \ldots, a_M^0(R,\mu))$, минимизирующий функционал $\mathcal{J}_l^R$ из* (5.2). *Справедливы оценки*

$$\sum_{k=1}^{M} |\mathcal{S}_{jk}(\mu) - a_k^0(R,\mu)| \leqslant Ce^{-\Lambda R} \tag{5.12}$$

при всех $R \geqslant R_0$, $\mu \in [\mu', \mu'']$ и $0 < \Lambda < \min_{\mu\in[\mu',\mu'']}\mathrm{Re}\,(\sqrt{\tau''-\mu} - \sqrt{\tau-\mu})$, где $\sqrt{\tau-\mu} = i\sqrt{\mu-\tau}$ при $\mu > \tau$, постоянная $C = C(\Lambda)$ не зависит от R и μ.

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущего утверждения, считаем, что μ меняется на некотором элементе I_p покрытия отрезка $[\mu', \mu'']$, построенного в лемме 3.4, так что число γ из (3.8), (5.10) и (5.11) не зависит от μ, причем $\max_{\mu\in I_p}\mathrm{Re}\,\sqrt{\tau-\mu} < \gamma < \min_{\mu\in I_p}\mathrm{Re}\,\sqrt{\tau''-\mu}$.

Пусть Y_l^R — решение задачи (5.4), где в качестве a_j, $j = 1, \ldots, M$, взяты элементы $\mathcal{S}_{lj}$ матрицы рассеяния $\mathcal{S}$, и пусть Z_l^R и $(a_1^0(R,\mu), \ldots, a_M^0(R,\mu))$ — те же, что в предложении 5.3. Подставим $u = v = U_l := Y_l - Z_l^R$ в формулу Грина. Поскольку U_l удовлетворяет первым двум уравнениям (5.4), имеем

$$(-\partial_\nu U_l, U_l)_{\Gamma^R} - (U_l, -\partial_\nu U_l)_{\Gamma^R} = 0. \tag{5.13}$$

Положим

$$\varphi_l = w_l^+ + \sum_{j=1}^{M} a_j^0(R,\mu)w_j^-, \quad \psi_l = w_l^+ + \sum_{j=1}^{M} S_{lj}(\mu)w_j^- \tag{5.14}$$

и запишем U_l в виде

$$U_l = Y_l - Z_l^R = (Y_l - \psi_l) + (\psi_l - \varphi_l) + (\varphi_l - Z_l^R).$$

Заметим, что $(Y_l - \psi_l)|_{\Gamma^R} = O(e^{-\gamma R})$ в силу (3.8). Кроме того, примем во внимание, что по предложению 5.3 компоненты минимизатора $a_j(R,\mu)$

равномерно ограничены. С учетом оценок (5.10), (5.11) это позволяет перейти от (5.13) к соотношению

$$(-\partial_\nu(\psi_l-\varphi_l),(\psi_l-\varphi_l))_{\Gamma^R}-((\psi_l-\varphi_l),-\partial_\nu(\psi_l-\varphi_l))_{\Gamma^R}=O(e^{-(\gamma-\sqrt{\tau-\mu}-\delta)R}), \tag{5.15}$$

где δ — сколь угодно малое положительное число. Здесь левая часть вычисляется непосредственно и равна $i\sum_{j=1}^M|a_j^0(R,\mu)-\mathcal{S}_{lj}(\mu)|^2$ (достаточно воспользоваться равенствами (5.13) и (2.12), (2.13)). Значит,

$$\sum_{j=1}^M|a_j^0(R,\mu)-\mathcal{S}_{lj}(\mu)|^2=O(e^{-(\gamma-\sqrt{\tau-\mu}-\delta)R}),$$

и мы приходим к неравенству (5.12) при $\mu\in I_p$ и $\Lambda\leqslant\min_{\mu\in I_p}(\gamma-\operatorname{Re}\sqrt{\tau-\mu}-\delta)/2$.

Покажем теперь, что имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^M|a_j(R,\mu)-\mathcal{S}_{lj}(\mu)|^2=O(e^{-2(\gamma-\sqrt{\tau-\mu}-\delta)(1-2^{-N})R}) \tag{5.16}$$

для любого целого положительного N. Для этого выведем из нее аналогичную оценку с заменой N на $N+1$. Имеем

$$\psi_l-\varphi_l=\sum_{j=1}^M(\mathcal{S}_{lj}(\mu)-a_j(R,\mu))w_j^-=O(e^{-[(\gamma-\sqrt{\tau-\mu})(1-2^{-N})-\sqrt{\tau-\mu}-\delta]R}).$$

Поэтому можно перейти от (5.13) к оценке вида (5.15), в правой части которой экспонента с показателем $-[(\gamma-\sqrt{\tau-\mu}-\delta)(1-2^{-N})-\sqrt{\tau-\mu}-\delta+\gamma]R=-2(\gamma-\sqrt{\tau-\mu}-\delta)(1-2^{-N-1})R$. Снова вычисляя левую часть (5.15), получаем

$$\sum_{j=1}^M|a_j(R,\mu)-\mathcal{S}_{lj}(\mu)|^2=O(e^{-2(\gamma-\sqrt{\tau-\mu}-\delta)(1-2^{-N-1})R}),$$

что и требовалось. Таким образом, (5.12) доказано при $\mu\in I_p$ и $\Lambda\leqslant\min_{\mu\in I_p}(\gamma-\operatorname{Re}\sqrt{\tau-\mu}-\delta)(1-2^{-N})$ для любого целого положительного N. Увеличивая N и уменьшая δ, можно сделать Λ сколь угодно близким к $\gamma-\operatorname{Re}\sqrt{\tau-\mu}$. Перебирая все элементы разбиения, получаем требуемую оценку на всем отрезке $[\mu',\mu'']$ при $\Lambda<\min_{\mu\in[\mu',\mu'']}(\gamma(\mu)-\operatorname{Re}\sqrt{\tau-\mu})$. Наконец, измельчая разбиение отрезка $[\mu',\mu'']$, можно добиться, чтобы $\gamma(\mu)$ сколь угодно мало отличалось от $\operatorname{Re}\sqrt{\tau''-\mu}$. $\square$

В окрестности порога τ вычисление матрицы $\mathcal{S}(\mu)$ не встречает затруднений. Так как $S(\mu)$ имеет конечные пределы при $\mu\to\tau\pm0$, то, используя связь между $S(\mu)$ и $\mathcal{S}(\mu)$, можно вычислить $S(\mu)$ для μ, сколь угодно близких к τ.

Список литературы

[1] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991.

[2] Пламеневский Б. А., Сарафанов О. В., *О методе вычисления матриц рассеяния для волноводов*, Алгебра и анализ **23** (2011), №1, 200–231.

[3] Пламеневский Б. А., Сарафанов О. В., *О методе вычисления матриц рассеяния для волноводов в присутствии точечного спектра*, Функц. анал. и его прил. **47** (2013) (принята к печати).

[4] Costabel M., Dauge M., *Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), no. 9-10, 1677–1726.

[5] Maz'ya V., Rossmann J., *On a problem of Babuška* (*stable asymptotics of the solution to the Dirichlet problem for elliptic equations of second order in domains with angular points*), Math. Nachr. **155** (1992), 199–220.

[6] Камоцкий И. В., Назаров С. А., *Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе.* 1, II, Мат. сб. **190** (1999), №1, 109–138; **190** (1999), №2, 43–70.

[7] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы*, Алгебра и анализ **4** (1992), №3, 196–225.

[8] Камоцкий И. В., Назаров С. А., *Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области*, Зап. науч. семин. ПОМИ **264** (2000), 66–82.

[9] Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A., *Classes of linear operators*, vol. 1, Oper. Theory: Adv. Appl., vol. 49, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1990.

[10] Гохберг И. Ц., Сигал Е. И., *Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше*, Мат. сб. **84** (1971), 607–629.

E-mail: boris.plamen@gmail.com

Поступило 31 сентября 2013 г.

E-mail: poras1990@list.ru

E-mail: osarafanov@rambler.ru