п. 2. Вспомогательные результаты. В этом пункте формулируются леммы, используемые для доказательств теорем из п. 1.

Лемма 1. *Если система (1) такова, что* $\lambda_1 \neq 0$, $[\pi\lambda_1]^{-1}p'_{sk} = o(1)$, $s, k = 1, \ldots, n$, *то существует преобразование вида*

$$X = F(t)\,Y, \tag{2}$$

$Y = \operatorname{colon}(y_1, \ldots, y_n)$, $F = \|f_{sk}\|$, $f_{sk} : \Delta \to K$, $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} f_{sk} = f_{0sk}$, $|f_{0sk}| \neq +\infty$, $\det F_0 \neq 0$, $F_0 = \|f_{0sk}\|$, $s, k = 1, \ldots, n$, *приводящее линейную часть системы (1) к системе вида*

$$Y' = \pi Q Y, \tag{3}$$

где $Q = \|q_{sk}\|$, $q_{sk} : \Delta \to K$, $s, k = 1, \ldots, n$, $q_{11} = \lambda_1 + \varepsilon_0$; $\pi\varepsilon_0$, $\pi q_{1r} \in \Omega_1\{p_{sk}; s, k = 1, \ldots, n\}$, $r = 2, \ldots, n$, *корни уравнения* $\det(Q_1 - \mu E) = 0$, $Q_1 = \|q_{sk}\|$, $s, k = 2, \ldots, n$, *обладают свойством* $\operatorname{Re}\mu_s : \Delta \to]-\infty, -\gamma_0[$, $\gamma_0 \in]0, +\infty[$, $s = 2, \ldots, n$.

Лемма 2. *Существует рекуррентное преобразование вида*

$$\begin{cases} y_{1,j} = y_{1,j+1} + \sum\limits_{s=2}^{n} r_{s,j+1}\, y_{s,j+1}, \\ y_{s,j} = y_{s,j+1}, \\ s = 2, \ldots, n,\ 0 \leqslant j \leqslant s_0 - 1,\ s_0 \leqslant \alpha, \end{cases} \tag{4}$$

где $y_{s,0} = y_s$, $s = 1, \ldots, n$, $r_{s,j} : \Delta \to K$, $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} |r_{s,j}| \neq +\infty$, $s = 2, \ldots, n$, *и* $r_{s,j}$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\sum_{k=2}^{n} q_{sk,j}\, r_{k,j+1} - q_{11,j}\, r_{s,j+1} = -q_{1s,j},\ s = 2, \ldots, n,$$

приводящее систему (3) к системе вида $Y'_{s_0} = \pi Q_{s_0} Y_{s_0}$, $Y_{s_0} = \operatorname{colon}(y_{1,s_0}; \ldots; y_{n,s_0})$, *у которой* $Q_{s_0} = \|q_{sk,s_0}\|$, $s, k = 1, \ldots, n$, $q_{11,s_0} = \lambda_1 + \sum\limits_{k=0}^{s_0-1} \pi^{-k}\varepsilon_k$, $q_{1k,s_0} = \pi^{-s_0} c_{s_0}$; $\varepsilon_k \in \Omega_k\{\ln\pi, p_{sr}; s, r = 1, \ldots, n\}$, $k = 1, \ldots, s_0 - 1$,

$$c_{s_0} \in \Omega_{s_0}\{\ln\pi, p_{sr}; s, r = 1, \ldots, n\}.$$

Замечание 1. Преобразования (2), (4) эффективно применяются к системам типа (1), у которых, например, $\pi = t^{\omega}$, $p_{sk} = p_{0sk} = q_{0sk} t^{-\omega_{sk}} (\ln t)^{\nu_{sk}} \sin t^{\mu_{sk}}$, $p_{0sk}, q_{0sk} \in K$, $\omega, \nu_{sk}, \mu_{sk} \in]-\infty, +\infty[$, $\omega_{sk} \in]0, +\infty[$.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 1 использовалась лемма об устойчивости из [2]. Доказательство теоремы 2 основано на специальном выборе начальных условий и применении метода доказательства от противного.

Литература

1. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1954.
2. Костин А. В.— Дис. ...канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1962.

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

Поступила в редакцию 5 апреля 1982 г.

УДК 517.95

А. В. ГЛАЗОВ

О СТРУКТУРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дано обоснование структурного метода расчета двухмерных стационарных полей температуры.

В ограниченной области $\Omega(x, y)$ с границей Γ рассмотрим смешанную краевую задачу [1]

$$\Delta v - pv = F \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\text{на } \gamma_1: \ \frac{\partial v}{\partial n} = f_1(x, y), \tag{2}$$

$$\text{на } \gamma_2: \ \frac{\partial v}{\partial n} + hv = f_2(x, y), \tag{3}$$

где F, $p \in L_2(\overline{\Omega})$ и заданы в $\overline{\Omega}$; функции $f_1 \in W_2^2(\gamma_1)$, $f_2 \in W_2^2(\gamma_2)$ и заданы соответственно на γ_1 и γ_2; $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \Gamma$; n — внешняя нормаль к Γ; $h = \text{const} > 0$.

Для нахождения приближенного решения задачи (1) — (3) воспользуемся вариационным методом с использованием аппарата R-функций, но предварительно перейдем к случаю однородных граничных условий.

Используя функции [2] $f = \dfrac{f_2\omega_1 + f_1\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$ и $h_1 = \dfrac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} h$, где $\omega_{1,2} = 0$ — уравнение линий $\gamma_{1,2}$, запишем граничные условия (2), (3) в эквивалентной форме $\dfrac{\partial v}{\partial n} + h_1 v = f$.

Непосредственная проверка показывает, что функция $u = v + \omega f$, где $\omega = 0$ — нормализованное до первого порядка уравнение границы Γ [3], является решением задачи с однородными граничными условиями

$$Au = -\Delta u + pu = g, \tag{4}$$

$$\Gamma: \mathscr{L}u = \frac{\partial u}{\partial n} + h_1 u = 0, \tag{5}$$

где $g = \Delta(\omega f) - p\omega f + F$.

Далее, введем множество функций $M \subset C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих граничному условию (5). На множестве M определим норму

$$\|u\|_+^2 = (u, Au) = \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \int_\Omega pu^2 d\Omega + \int_\Gamma h_1 u^2 ds, \tag{6}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Пополнение M по норме (6) есть энергетическое пространство H_+ оператора A [4].

Вариационная постановка задачи (4), (5) заключается в следующем. В пространстве H_+ нужно найти минимум функционала $G(u) = \|u\|_+^2 - 2(u, g)$. (7)

Линейный функционал (u, g) при этом должен быть ограничен в H_+. При $g \in L_2(\Omega)$ требуемый результат следует из [3].

Теорема 1. *Существует постоянная $c > 0$ такая, что при $p > -c$ оператор A является положительно определенным.*

Доказательство. Используя неравенство Коши — Буняковского [5, с. 47], имеем оценку

$$\int_\Gamma h_1 u^2 ds \geqslant \left[\frac{h}{\text{mes}\,\Gamma + h\,\text{mes}\,\gamma_1}\right]\left(\int_\Gamma u ds\right)^2. \tag{8}$$

Далее, в силу неравенства (8) и теоремы Соболева об эквивалентности норм в пространстве W_p^l [6, с. 64] справедливы неравенства

$$\|u\|_+^2 - \int_\Omega pu^2 d\Omega \geqslant \min\left[1, \frac{h}{\text{mes}\,\Gamma + h\,\text{mes}\,\gamma_1}\right]\left[\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \left(\int_\Gamma u ds\right)^2\right] \geqslant c\int_\Omega u^2 d\Omega,$$

где $c = \text{const} > 0$. Отсюда $\|u\|_+^2 \geqslant (\min\limits_\Omega p + c)\|u\|^2$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\Omega)$. Теорема 1 доказана.

В работе [1] положительная определенность оператора A доказана при $p > p_0 > 0$.

Минимум функционала (7) будем искать на линейном множестве функций $\{S\} \subset C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих граничному условию (5). Множество $\{S\}$ описывается с помощью структуры решения краевой задачи (4), (5), которая строится с использованием аппарата R-функций и имеет вид [1]

$$S(x, y) = \Phi - \frac{\omega}{D_n\omega + \omega}[\omega\Psi + D_n\Phi - h_1\Phi],$$

где $D_n = \dfrac{\partial\omega}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y}$, функции $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$, произвольны и независимы. Для построения приближенного решения задачи в качестве функций Φ и Ψ можно взять полиномы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и найти их коэффициенты методом Ритца. Для сходимости метода Ритца необходимо, чтобы линейное множество $\{S(P, Q)\}$ было всюду плотно в H_+.

Теорема 2. *Множество* $\{S(P, Q)\}$ *всюду плотно в* H_+.

Доказательство. Достаточно показать, что из равенства $(S, \xi)_+ = 0 \ \forall P, Q$ следует $\xi = 0$, где $\xi \in M$.

Используя симметричность оператора A, по формуле Грина имеем $(S, \xi)_+ = (AS, \xi) = (S, A\xi) = 0 \ \forall P, Q$.

В силу положительной определенности оператора A решение задачи (4), (5) единственно, поэтому достаточно показать, что $\eta = A\xi = 0$.

Интегрируя по частям, получим

$$(S, \eta) = (Q, \eta\lambda) + (P, R\eta) = 0 \quad \forall P, Q. \tag{9}$$

Здесь $S = (1+\beta)P + \mu \dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial P}{\partial y}$, где $\alpha = \dfrac{\omega}{D_n\omega + \omega}$, $\mu = \alpha \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$, $\nu = \alpha \dfrac{\partial \omega}{\partial y}$, $\lambda = \alpha\omega$, $\lambda \neq 0$ в Ω, $\beta = \alpha h_1$, $R\eta = (1+\beta)\eta + \dfrac{\partial(\nu\eta)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\mu\eta)}{\partial y}$.

Из (9) и теоремы Вейерштрасса о полноте множества многочленов в $C(\overline{\Omega})$ следует, что $\eta = 0$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит А. В. Костерина за помощь и советы, оказанные при выполнении работы.

Литература

1. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах.— Киев: Наукова думка, 1976.—289 с.
2. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 4, с. 771—773.
3. Кравченко В. Ф., Слесаренко А. П., Рвачев В. Л.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 10, с. 1851—1858.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.—512 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа.— М.: Наука, 1972.—496 с.
6. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1950.—255 с.

Институт математики и механики Казанского университета

Поступила в редакцию 24 декабря 1979 г.

УДК 517.925

П. Н. ЗЮКИН

К ТЕОРЕМЕ КУЗНЕЦОВА—МАЛЬГРАНЖА

А. Н. Кузнецов [1] и Б. Мальгранж [2] доказали следующую фундаментальную теорему:

Теорема. *Если система обыкновенных дифференциальных уравнений* $x^k y' + f(x, y) = 0$ *с гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией* $f(x, y)$ *имеет формальное решение, то в окрестности нуля существует гладкое решение, для которого коэффициенты ряда Тейлора совпадают с коэффициентами ряда формального решения.*

Доказательство теоремы опирается на исследование глубоких алгебраических свойств кольца дифференциальных полиномов.

В настоящей заметке эта теорема для случая $k=1$ обобщается на дифференциальное уравнение в банаховом пространстве и доказывается без привлечения алгебраических средств с использованием одного результата В. П. Глушко [3].

В банаховом пространстве E рассматривается дифференциальное уравнение

$$xy' + f(x, y) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция на $[0, a] \times E$ со значениями в E, а $y(x)$ — искомая функция со значениями в E.

Теорема 1. *Предположим, что существуют первые* $k (k \geqslant 1)$ *коэффициентов ряда формального решения уравнения (1):*

$$y(0), \frac{y'(0)}{1!}, \ldots, \frac{y^{(k-1)}(0)}{(k-1)!},$$

и что спектр оператора $f'_y(0, y(0))$ *лежит в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > -k$.