Алгебра и анализ
Том 15 (2003), вып. 4

О ПРОЦЕДУРЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ВНУТРЕННЕЙ ЛАКУНЫ

© М. Ш. Бирман

§0. Введение

1. Задача об усреднении для периодических операторов математической физики представляет значительный интерес для приложений. В то же время она интересна и в общетеоретическом плане. Типичной и популярной моделью здесь является семейство операторов

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(x/\varepsilon) \operatorname{grad}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ \varepsilon > 0, \tag{0.1}$$

где $g(x)$ — положительно определенная матрица-функция, периодическая относительно какой-либо решетки в $\mathbb{R}^d$. Обычно речь идет либо об уравнении

$$\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — фиксированная ограниченная область, а на $\partial\Omega$ ставятся какие-нибудь граничные условия, либо об уравнении

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2) u_\varepsilon = f, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ \varkappa > 0. \tag{0.2}$$

Мы будем говорить здесь только о втором варианте, рассматривая уравнение (0.2) в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Пусть A_ε — оператор, порожденный выражением (0.1) в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $A = A_1$. Исходная постановка задачи об усреднении следующая. Требуется указать такую *постоянную матрицу* g^0, что решение u^0 задачи

$$(\mathcal{A}^0 + \varkappa^2) u^0 = f, \quad \mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \operatorname{grad}, \tag{0.3}$$

Ключевые слова: периодические операторы, усреднение, внутренние лакуны, пороговые эффекты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00798).

является пределом для решений u_ε задачи (0.2) при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u^0. \tag{0.4}$$

Задачам усреднения (гомогенизации) посвящена обширная литература. В первую очередь отметим книги [1–3]. Гомогенизация имеет различные аспекты (например, построение для $u_\varepsilon - u^0$ разложения по степеням ε, оценка погрешности в (0.4)). Класс периодических задач математической физики, изучаемых с точки зрения гомогенизации, очень широк.

2. Несомненную пользу в обсуждаемой тематике приносит использование теории Флоке. Отметим, в частности, работы [4–6]. В [6] для широкого класса задач выяснено, что возможность усреднения представляет собой *пороговый эффект* вблизи нижнего края спектра оператора. С абстрактной точки зрения это соответствует изучению поведения резольвенты $(A + \varepsilon^2 \varkappa^2 I)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$. В [6] такое изучение в абстрактных терминах продвинуто достаточно далеко. В применении к задаче (0.2) это приводит к оценке

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \tag{0.5}$$

с явно контролируемой постоянной C.

3. Ясное понимание порогового характера проблемы усреднения влечет следующий естественный вопрос. Спектр периодического оператора A имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Имеет ли смысл связывать с краями внутренних лакун аналоги задач усреднения? Ниже этот вопрос обсуждается для семейства (0.1) при $d = 1$. Возможность широких обобщений очевидна. Мы, однако, полностью используем в настоящем изложении специфику случая $d = 1$, желая добиться большей простоты. Применяемая техника не опирается на работу [6]. Она скорее ближе к приемам, использованным в [7] по другому поводу. В §1 собраны хорошо известные факты о разложении по собственным функциям оператора A при $d = 1$.

4. Пусть ν — край внутренней лакуны в спектре A; для определенности — правый край „периодической" лакуны. Для A_ε этот край перейдет в точку $\varepsilon^{-2}\nu$, то есть в область высоких энергий (высоких частот). Соответственно вместо (0.2) потребуется рассматривать уравнение

$$(A_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\nu + \varkappa^2) u_\varepsilon = f. \tag{0.6}$$

В итоге дело сводится к изучению резольвенты $(A-(\nu-\varepsilon^2\varkappa^2)I)^{-1}$ при малых ε. Такое изучение проводится в §2. В §3 обсуждаются применения к аналогам задач гомогенизации. С каждым краем ν связан свой усредненный оператор A^0_ν. Однако вместо (0.5) теперь появляется оценка

$$\|u_\varepsilon - u^0_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.7}$$

Здесь $u^0_\varepsilon = [\varphi_0^{(\varepsilon)}](A^0_\nu + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^{(\varepsilon)}]f$, а $[\varphi_0^{(\varepsilon)}]$ — оператор умножения на функцию $\varphi_0(x/\varepsilon)$, где φ_0 — вещественное периодическое решение уравнения $(\mathcal{A}_1 - \nu)\varphi_0 = 0$. Можно попытаться избавиться от множителей $\varphi_0^{(\varepsilon)}$, вычисляя *слабый предел* для u_ε. Оказывается, однако, что такой предел равен нулю. Поэтому следует считать, что замена u^0 в (0.5) на u^0_ε в (0.7) лежит в существе дела. При $\nu = 0$ „сдвиг" $\varepsilon^{-2}\nu$ в (0.6) исчезает, а $\varphi_0 = 1$. Поэтому (0.7) переходит в (0.5).

Наличие сдвига $\varepsilon^{-2}\nu$ в (0.6) показывает, что при $\nu \neq 0$ пороговый эффект взаимодействует с высокочастотными эффектами. В связи с этим отметим, что в [1] рассматриваются нестационарные периодические задачи в высокочастотном приближении. Однако различия (по сравнению с настоящей статьей) в постановке задачи, технике и характере результатов очень велики.

5. Ниже H^1 — класс Соболева, $\widetilde{H}^1(0,1)$ — подпространство тех функций из $H^1(0,1)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Символ $\int$ подразумевает интегрирование по $\mathbb{R}$. Используется обозначение $D = -id/dx$.

6. Автор искренне благодарит П. Кучмента и Т. Суслину, беседы с которыми стимулировали появление предлагаемого текста.

§1. Спектральные свойства периодического оператора

1. В $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряженный оператор A, порожденный периодическим дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = Dg(x)D, \tag{1.1}$$

где g — измеримая функция, такая что

$$0 < g_0 \leqslant g(x) \leqslant g_1 < \infty, \quad g(x+1) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Точное определение оператора A дается через квадратичную форму

$$a[u,u] = \int g(x)|Du|^2\,dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}).$$

Наряду с A рассматривается семейство операторов A_ξ, самосопряженных в $L_2(0,1)$. Здесь $\xi \in \mathbb{R}$ — квазиимпульс, а оператор A_ξ определяется формой

$$a_\xi[u,u] = \int\limits_{(0,1)} g(x)|Du|^2\,dx, \quad u \in H^1(0,1),\ u(1) = e^{i\xi}u(0). \tag{1.2}$$

Таким образом, A_ξ соответствует дифференциальному выражению (1.1), а граничное условие в (1.2) равносильно тому, что функция $\exp(-i\xi x)u(x)$ принадлежит классу $\widetilde{H}^1(0,1)$. Спектр оператора A_ξ дискретен. Пусть $\lambda_n(\xi)$, $\psi_n(\xi,x)$ — последовательные собственные значения и нормированные собственные функции для A_ξ. Функции λ_n (2π)-периодичны. Собственные функции ψ_n также можно выбрать (2π)-периодическими по ξ. Положим $\alpha_n = \lambda_n(0)$, $\beta_n = \lambda_n(\pi)$. Тогда

$$0 = \alpha_1 < \beta_1 \leqslant \beta_2 < \alpha_2 \leqslant \alpha_3 < \beta_3 \leqslant \beta_4 < \dots .$$

Спектр оператора A абсолютно непрерывен и состоит из отрезков (зон) $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\beta_2,\alpha_2]$, $[\alpha_3,\beta_3]$, $\dots$. Интервалы

$$(\beta_1,\beta_2),\ (\alpha_2,\alpha_3),\ (\beta_3,\beta_4),\ \dots,$$

при условии, что они не пусты, представляют собой лакуны в спектре. Все собственные значения $\lambda_n(\xi)$ — простые, если $\xi \neq 0$, $\pi \pmod{2\pi}$.

2. Пусть Λ — фиксированная лакуна и ν — ее край. Для определенности будем считать, что $\nu = \alpha_{2s+1}$ при каком-либо $s \in \mathbb{N}$. Это означает, что ν — *правый* край „*периодической*“ лакуны. Рассмотрения в трех других возможных вариантах вполне аналогичны, и мы приведем для них (см. п. 3.3) лишь окончательные выводы. Будем считать $|\xi| \leqslant \pi$ и обозначим $\lambda_{2s+1}(\xi) = \lambda(\xi)$, $\psi_{2s+1}(\xi,x) = \psi(\xi,x)$. Отметим, что $\psi(\xi,x) = \exp(ix\xi)\varphi(\xi,x)$, где функция φ периодична по x: $\varphi(\xi,x+1) = \varphi(\xi,x)$. Отображение $\xi \mapsto \lambda(\xi)$ покрывает (дважды) зону M, для которой ν — левый конец. Выделим следующие факты. 1) Функция λ непрерывна и четна при $|\xi| \leqslant \pi$. Она вещественно аналитична при $|\xi| < \pi$. 2) Функцию $\psi(\xi,x)$ можно выбрать так, чтобы она была измеримой по паре переменных (ξ,x) и вещественно аналитической вектор-функцией со значениями в $H^1(0,1)$ (а тогда и в $C[0,1]$) при $|\xi| < \pi$. То же относится и к функции $\varphi(\xi, x)$. 3) При $\xi = 0$ функция $\lambda(\xi)$ имеет невырожденный минимум; при $0 \leqslant \xi \leqslant \pi$ она строго монотонна. Таким образом,

$$\lambda(\xi) - \nu = b\xi^2 + \xi^4\gamma(\xi), \quad |\xi| \leqslant \pi, \ \ b = b_\nu > 0, \tag{1.3}$$

где $\gamma(\xi)$ непрерывна, а при $|\xi| < \pi$ вещественно аналитична. 4) Периодическую функцию $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = \psi(0, x)$ можно выбрать вещественной. При этом

$$\varphi(\xi, x) - \varphi_0(x) = \xi\theta(\xi, x), \quad |\xi| < \pi, \tag{1.4}$$

где θ — вещественно аналитическая по ξ функция со значениями в $\widetilde{H}^1(0,1)$.

3. Обозначим через $F(A, \delta)$ спектральный проектор для оператора A и промежутка δ. Положим

$$M_\sigma = [\nu, \lambda(\sigma)], \ \ F_\sigma = F(A, M_\sigma), \quad 0 < \sigma \leqslant \pi;$$

отметим, что $M = M_\pi$. Для ортопроектора F_σ запишем интегральное представление. Пусть X_σ — интегральный оператор, $X_\sigma : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(-\sigma, \sigma)$, с ядром

$$(2\pi)^{-1/2}\chi_\sigma(\xi)\overline{\psi(\xi, x)} = (2\pi)^{-1/2}\chi_\sigma(\xi)\exp(-i\xi x)\overline{\varphi(\xi, x)}; \tag{1.5}$$

здесь χ_σ — индикатор промежутка $(-\sigma, \sigma)$, а x — переменная интегрирования. Тогда $\|X_\sigma\| = 1$ и

$$F_\sigma = X_\sigma^* X_\sigma, \quad 0 < \sigma \leqslant \pi. \tag{1.6}$$

Пусть теперь $\nu - \varkappa^2 \in \Lambda$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ — параметр. Тогда число $\nu - \varepsilon^2\varkappa^2$ — регулярная точка для A. В соответствии с (1.6) имеет место равенство

$$(A - (\nu - \varepsilon^2\varkappa^2)I)^{-1}F_\sigma = X_\sigma^*[(\lambda(\xi) - \nu + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_\sigma. \tag{1.7}$$

Здесь и в дальнейшем $[f]$ обозначает оператор умножения на функцию f.

§2. Приближение для оператора $(A-(\nu-\varepsilon^2\varkappa^2)I)^{-1}$

1. Задача усреднения сводится (см. §3) к построению подходящего приближения для оператора

$$S_\nu(\varepsilon)=(A-(\nu-\varepsilon^2\varkappa^2)I)^{-1}. \tag{2.1}$$

Ключевым является изучение оператора (1.7), то есть оператора $S_\nu(\varepsilon)F_\sigma$, при малых $\varepsilon>0$. Пусть X_σ^0 — интегральный оператор с ядром

$$(2\pi)^{-1/2}\chi_\sigma(\xi)\exp(-ix\xi)\varphi_0(x), \tag{2.2}$$

которое отличается от ядра (1.5) заменой функции $\varphi(\xi,x)$ на функцию $\varphi_0(x)$. Наша ближайшая цель состоит в оценке разности

$$G_{\sigma,\varepsilon}=X_\sigma^*[(\lambda(\xi)-\nu+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_\sigma-(X_\sigma^0)^*[(b\xi^2+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_\sigma^0 \tag{2.3}$$

в зависимости от ε. В дальнейшем через C, c (возможно, с индексами) обозначаются различные постоянные, не зависящие от ε. В силу (1.3), $\lambda(\xi)-\nu+\varepsilon^2\varkappa^2=b\xi^2+\varepsilon^2\varkappa^2+\xi^4\gamma(\xi)$. Фиксируем $\sigma<\pi$ так, чтобы было $2\xi^4|\gamma(\xi)|\leqslant b\xi^2$ при $|\xi|\leqslant\sigma$. Ясно, что тогда

$$|(\lambda(\xi)-\nu+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}-(b\xi^2+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}|\leqslant c_1.$$

Отсюда следует, что для нормы действующего в $L_2(\mathbb{R})$ оператора

$$G_{\sigma,\varepsilon}^{(1)}=X_\sigma^*[(\lambda(\xi)-\nu+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}-(b\xi^2+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_\sigma \tag{2.4}$$

справедлива оценка

$$\|G_{\sigma,\varepsilon}^{(1)}\|\leqslant c_1. \tag{2.5}$$

2. Рассмотрим теперь оператор

$$X_\sigma^*[(b\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_\sigma = W_{\sigma,\varepsilon}^* W_{\sigma,\varepsilon}, \tag{2.6}$$

где оператор $W_{\sigma,\varepsilon} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(-\sigma,\sigma)$ определяется равенством

$$W_{\sigma,\varepsilon} = [(b\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2}\chi_\sigma(\xi)]X_\sigma. \tag{2.7}$$

Далее, положим

$$W_{\sigma,\varepsilon}^0 = [(b\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2}\chi_\sigma(\xi)]X_\sigma^0 \tag{2.8}$$

и оценим разность

$$W_{\sigma,\varepsilon} - W_{\sigma,\varepsilon}^0 = [(b\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2}\xi\chi_\sigma(\xi)]U_\sigma.$$

Здесь U_σ — оператор с ядром (см. (1.4))

$$(2\pi)^{-1/2}\chi_\sigma(\xi)\exp(-ix\xi)\overline{\theta(\xi,x)}.$$

Проверим прежде всего, что оператор U_σ ограничен. Для оператора с ядром $(2\pi)^{-1/2}\chi_\sigma(\xi)\exp(-ix\xi)$ ограниченность очевидна. Остается учесть, что функция $\overline{\theta(\xi,x)}$ — *мультипликатор* на множестве ядер ограниченных интегральных операторов, переводящих $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\sigma,\sigma)$. Аналитическая по $\xi \in [-\sigma,\sigma]$ и непрерывная периодическая по x функция $\overline{\theta(\xi,x)}$ заведомо является мультипликатором, поскольку

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \|\theta(\cdot,x)\|_{C^1[-\sigma,\sigma]} < \infty.$$

Подробности по поводу мультипликаторов для интегральных ядер можно найти, например, в [8, §8,9].

Заметим теперь, что $|\xi|(b\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2} \leqslant b^{-1/2}$, а потому

$$\|W_{\sigma,\varepsilon} - W_{\sigma,\varepsilon}^0\| \leqslant c_2. \tag{2.9}$$

3. Запишем (см. (2.2), (2.3), а также (2.4), (2.6), (2.8)) равенство

$$\begin{aligned} G_{\sigma,\varepsilon} &= G^{(1)}_{\sigma,\varepsilon} + W^*_{\sigma,\varepsilon} W_{\sigma,\varepsilon} - (W^0_{\sigma,\varepsilon})^* W^0_{\sigma,\varepsilon} \\ &= G^{(1)}_{\sigma,\varepsilon} + W^*_{\sigma,\varepsilon}(W_{\sigma,\varepsilon} - W^0_{\sigma,\varepsilon}) + (W_{\sigma,\varepsilon} - W^0_{\sigma,\varepsilon})^* W^0_{\sigma,\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Отметим, что $\varepsilon(b\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2} \leqslant \varkappa^{-1}$, а потому, согласно (2.7), (2.8),

$$\varepsilon\|W_{\sigma,\varepsilon}\| \leqslant \varkappa^{-1}, \qquad \varepsilon\|W^0_{\sigma,\varepsilon}\| \leqslant c_3. \tag{2.11}$$

Теперь, используя (2.10), а также оценки (2.5), (2.9), (2.11), получаем следующее

Предложение 2.1. *Для оператора* (2.3) *справедлива оценка*

$$\varepsilon\|G_{\sigma,\varepsilon}\| \leqslant C_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{2.12}$$

4. Теперь нетрудно получить удобное приближение для полной резольвенты (2.1). Очевидно, справедлива оценка

$$\|S_\nu(\varepsilon)(I - F_\sigma)\| \leqslant c_4, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{2.13}$$

Далее, введем в рассмотрение самосопряженный в $L_2(\mathbb{R})$ оператор A^0_ν, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}^0_\nu = b_\nu D^2.$$

В силу (2.2) справедливо равенство

$$\begin{aligned} (X^0_\sigma)^*[(b_\nu\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X^0_\sigma &= [\varphi_0]\Phi^*[(b_\nu\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}\chi_\sigma(\xi)]\Phi[\varphi_0] \\ &= [\varphi_0]\Phi^*[(b_\nu\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]\Phi[\varphi_0] \\ &\quad - [\varphi_0]\Phi^*[(b_\nu\xi^2 + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}(1 - \chi_\sigma(\xi))]\Phi[\varphi_0]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь Φ — оператор Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Очевидно, первое слагаемое справа в (2.14) совпадает с оператором $[\varphi_0](A^0_\nu + \varepsilon^2\varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0]$, а норма второго слагаемого оценивается постоянной, не зависящей от $\varepsilon \in (0, 1]$. Вместе с (2.3), (2.12), (2.13) сказанное приводит к следующему утверждению.

Предложение 2.2. *Справедлива оценка*

$$\varepsilon\|S_\nu(\varepsilon) - [\varphi_0](A^0_\nu + \varepsilon^2\varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0]\| \leqslant C, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{2.15}$$

§3. Усреднение вблизи внутреннего края лакуны

1. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ самосопряженный оператор $A(\varepsilon)$, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = Dg(x/\varepsilon)D, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Ясно, что $A(1) = A$ порождается выражением (1.1). Оператор $A(\varepsilon)$, очевидно, имеет лакуну $\Lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\Lambda$, правый край которой есть $\varepsilon^{-2}\nu$. Усреднение для $A(\varepsilon)$ вблизи края внутренней лакуны требует учета перемещения этого края в точку $\varepsilon^{-2}\nu$. Соответственно надлежит исследовать приближение для оператора

$$R_\nu(\varepsilon) := (A(\varepsilon) - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Масштабное преобразование сводит этот вопрос к оценке (2.15). Действительно, пусть T_ε, $\varepsilon > 0$, — семейство унитарных в $L_2(\mathbb{R})$ операторов T_ε : $u(x) \mapsto \varepsilon^{1/2}u(\varepsilon x)$. Далее, положим $\varphi_0^{(\varepsilon)}(x) = \varphi_0(x/\varepsilon)$ и

$$R_\nu^0(\varepsilon) := [\varphi_0^{(\varepsilon)}](A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^{(\varepsilon)}]. \tag{3.2}$$

Тогда, очевидно, для операторов (2.1), (3.1) выполнено

$$R_\nu(\varepsilon) = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* S_\nu(\varepsilon) T_\varepsilon, \tag{3.3}$$

и аналогично

$$R_\nu^0(\varepsilon) = \varepsilon^2 T_\varepsilon^*[\varphi_0](A_\nu^0 + \varepsilon^2\varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0]T_\varepsilon. \tag{3.4}$$

Теперь из (2.15) непосредственно вытекает наш основной результат.

Предложение 3.1. *Для разности операторов* (3.1), (3.2) *справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\varepsilon) - R_\nu^0(\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{3.5}$$

2. Оценка (3.5) позволяет говорить об *усреднении* (гомогенизации) для оператора $A(\varepsilon)$. Действительно, в (3.2) входит резольвента независящего от ε оператора $A^0_\nu = b_\nu D^2$ с постоянным коэффициентом b_ν. Полностью, однако, избежать в $R^0_\nu(\varepsilon)$ зависимости от ε не удалось из-за множителей $[\varphi_0^{(\varepsilon)}]$. В случае $\nu = 0$, очевидно, $\varphi_0 = 1$, что соответствует усреднению в обычном понимании: при $\nu = 0$ оператор (3.2) сводится к $(A^0 + \varkappa^2 I)^{-1}$, где $A^0 = b_0 D^2$, а в (3.1) исчезает сдвиг на $\varepsilon^{-2}\nu$.

Присутствие в (3.2) множителей $[\varphi_0^{(\varepsilon)}]$ при $\nu \neq 0$ лежит в существе дела. На первый взгляд зависимости от ε можно избежать за счет перехода к слабой сходимости. Действительно, пусть $f \in L_\infty(\mathbb{R})$, $f(x) = f(x+h)$ и $f^{(\varepsilon)}(x) = f(x/\varepsilon)$. Хорошо известно, что $f^{(\varepsilon)}$ слабо в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ сходится к своему среднему значению $\langle f\rangle$ по периоду. Отсюда легко выводится, что существует слабый в $L_2(\mathbb{R})$ предел

$$\text{w-}\lim_{\varepsilon\to 0}[f^{(\varepsilon)}](A^0_\nu + \varkappa^2 I)^{-1}[f^{(\varepsilon)}] = \langle f\rangle^2 (A^0_\nu + \varkappa^2 I)^{-1}.$$

Из (3.5) тогда вытекает, что

$$\text{w-}\lim_{\varepsilon\to 0} R_\nu(\varepsilon) = \langle\varphi_0\rangle^2 (A^0_\nu + \varkappa^2 I)^{-1}.$$

Однако при $\nu \neq 0$ заведомо $\langle\varphi_0\rangle = 0$, так как собственные функции периодической задачи ортогональны к постоянным. Таким образом,

$$\text{w-}\lim_{\varepsilon\to 0} R_\nu(\varepsilon) = 0, \qquad (3.6)$$

что по сравнению с (3.5) означает значительную потерю информации.

3. Кратко обсудим случаи, когда $\nu \neq \alpha_{2s+1}$. Пусть сначала $\nu = \beta_{2s}$, т. е. ν — правый край „антипериодической“ лакуны. Тогда оценка (3.5) сохранится, если в (3.2) заменить φ_0 на ψ_0, где $\psi_0(x) = \psi(\pi, x)$ — нормированная вещественная собственная функция антипериодической задачи. Сохранится и соотношение (3.6): действительно, ψ_0 — собственная функция периодической задачи на промежутке $[0, 2]$, и ее среднее значение по периоду равно нулю.

Пусть теперь $\nu = \alpha_{2s}$, то есть ν — левый край „периодической“ лакуны. Тогда $\lambda_{2s}(\xi)$ имеет в точке $\xi = 0$ невырожденный максимум: $\lambda_{2s}(\xi) = \nu - b_\nu\xi^2 + O(\xi^4)$, $b_\nu > 0$. Оператор (3.2) сохраняет свой вид, но в (3.5) оператор $R_\nu(\varepsilon)$ следует заменить на

$$\widetilde{R}_\nu(\varepsilon) := (A(\varepsilon) - (\varepsilon^{-2}\nu + \varkappa^2)I)^{-1},$$

а разность заменить суммой:

$$\|\widetilde{R}_\nu(\varepsilon) + R_\nu^0(\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{3.7}$$

Наконец, в случае $\nu = \beta_{2s+1}$ оценка (3.7) сохранится, если в (3.2) снова заменить φ_0 на ψ_0. Для левого конца лакуны выполнено

$$\text{w-}\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{R}_\nu(\varepsilon) = 0.$$

Список литературы

[1] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978, 700 pp.

[2] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984, 352 с.

[3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматгиз, М., 1993, 464 с.

[4] Жиков В. В., *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии*, Дифференц. уравнения **25** (1989), №1, 44–50.

[5] Conca C., Vanninathan M., *Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition*, SIAM J. Appl. Math. **57** (1997), no. 6, 1639–1659.

[6] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory: Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[7] Бирман М. Ш., *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шредингера. II. Нерегулярные возмущения*, Алгебра и анализ **9** (1997), №6, 62–89.

[8] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*, Успехи мат. наук **32** (1977), №1, 17–84.

Санкт-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198504 Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская 1
Россия
E-mail: tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило 2 июня 2003 г.