Дискретная математика

том 10 выпуск 4 * 1998

УДК 519.10

Асимптотика многоиндексных аксиальных транспортных многогранников

© 1998 г. М. К. Кравцов, А. П. Крачковский

Рассматривается проблема асимптотического поведения классов многоиндексных аксиальных транспортных многогранников при возрастании порядка многогранника. В частности, показано, что с ростом порядка многогранника отношение числа многогранников с максимальным количеством k-граней (для некоторых k) к общему числу многогранников стремится к единице.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаметнальных исследований Республики Беларусь, проект Ф95-70.

1. Введение

В 1972 г. в [1] был поставлен вопрос, верно ли, что почти все классические транспортные многогранники (КТМ) имеют максимальное число вершин. Отрицательный ответ на этот вопрос получен в [2–4], а в [2, 5] показано, что почти все КТМ имеют максимальное число фасет (граней максимальной размерности). Позднее в [6 - 8] были доказаны следующие утверждения:

для всякого $k \in \{0, 1, 2, \ldots, [3mn/4]-m-n+1\}$ почти нет КТМ с максимальным числом k-граней;

для всякого $k \in \{d-l, d-l+1, \ldots, d-1\}$ почти все КТМ имеют максимальное число k-граней, где $d = (m-1)(n-1)$ — размерность КТМ порядка $m \times n$, $l = c\min\{[m/\ln m], [n/\ln n]\}$, а c — любая целочисленная положительная константа, не зависящая от m и n.

В настоящей работе второй из этих результатов обобщен на случай p-индексных ($p \geqslant 2$) аксиальных транспортных многогранников (p-АТМ). Кроме того, доказано, что почти все p-АТМ имеют диаметр, не меньший

$$\sum_{s=1}^{p} n_s - p + 1,$$

где $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ — порядок p-АТМ.

Будем пользоваться терминологией и обозначениями, введенными в [2]. Напомним лишь, что p-индексным, $p \geqslant 2$, аксиальным транспортным многогранником (p-АТМ) порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ называется область определения p-индексной транспортной задачи с аксиальными суммами, то есть множество $M(a^1, \ldots, a^p)$

матриц $x = \|x_{i_1 i_2 \ldots i_p}\|$, элементы которых удовлетворяют следующим условиям: $x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \geqslant 0$ для всех наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$,

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a^s_{i_s},$$

для всех $i_s \in N_{n_s}$ и $s \in N_p$, где $a^s = (a^s_1, \ldots, a^s_{n_s})$ — вектор с действительными положительными компонентами,

$$\sum_{i_s=1}^{n_s} a^s_{i_s} = K$$

для всех $s \in N_p$, где $N_t = \{1, 2, \ldots, t\}$.

В дальнейшем, говоря о p-АТМ, будем иметь в виду многогранник $M(a^1, \ldots, a^p)$ порядка $n_1^p = n_1 \times \ldots \times n_p$, причем будем предполагать, что для всех $s \in N_p$

$$2 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_p, \quad n_2 \geqslant 3, \quad a^s_1 \geqslant a^s_2 \geqslant \ldots \geqslant a^s_{n_s}.$$

Всякий 2-АТМ будем называть классическим транспортным многогранником (КТМ) порядка $m \times n$ и обозначать через $M(a, b)$, где

$$a = (a_1, \ldots, a_m), \quad b = (b_1, \ldots, b_n), \quad 2 \leqslant m \leqslant n, \quad n \geqslant 3.$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь нормированные многогранники, то есть такие $M(a^1, \ldots, a^p)$, для которых

$$\sum_{i_s=1}^{n_s} a^s_{i_s} = 1, \quad s = 1, \ldots, p.$$

Заметим, что, нормируя любой p-АТМ, получаем комбинаторно эквивалентный многогранник.

2. Общие свойства

Рассмотрим в l-мерном евклидовом пространстве E_l открытый регулярный симплекс

$$U_l = \{c = (c_1, \ldots, c_l) \in E_l \colon c_1 + \ldots + c_l = 1, c_i > 0, i = 1, \ldots, l\}$$

и множество

$$W(n_1^p) = U_{n_1} \times \ldots \times U_{n_p} = \{(a^1, \ldots, a^p) \colon a^s \in U_{n_s}, s = 1, \ldots, p\},$$

принадлежащее пространству E_q, где $q = n_1 + \ldots + n_p - p + 1$.

Очевидно, что всякому набору векторов $(a^1, \ldots, a^p) \in W(n_1^p)$ соответствует нормированный p-АТМ $M(a^1, \ldots, a^p)$ и наоборот, всякому нормированному p-АТМ $M(a^1, \ldots, a^p)$ порядка n_1^p соответствует единственный набор векторов $(a^1, \ldots, a^p)$ из множества $W(n_1^p)$. Итак, между множеством $W(n_1^p)$ и множеством всех нормированных p-АТМ порядка n_1^p существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть $W^\xi(n_1^p)$ — множество тех наборов векторов $(a^1,\dots,a^p)\in W(n_1^p)$, для которых соответствующие многогранники обладают свойством ξ. Будем говорить, что почти все p-АТМ обладают свойством ξ, если

$$\lim_{n_1\to\infty}\frac{\mu(W^\xi(n_1^p))}{\mu(W(n_1^p))}=1, \tag{1}$$

и почти нет таких многогранников, если этот предел равен 0. Здесь $\mu(W)$ — мера Лебега множества W в пространстве

$$E_q=\{(a^1,\dots,a^p)\colon a_1^s+\dots+a_{n_s}^s=1, s=1,\dots p\}.$$

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$H_t=\sum_{s=1}^{t}\frac{1}{s}.$$

Теорема 1. *Почти все наборы векторов $(a^1,\dots,a^p)$ из множества $W(n_1^p)$ для любого $r\in N_{n_s-1}$ и всех $s\in N_p$ удовлетворяют неравенствам*

$$-\frac{\ln\ln n_s}{\ln n_s}\leqslant\frac{a_1^s+\dots+a_r^s}{(1+H_{n_s}-H_r)r/n_s}-1\leqslant\frac{\ln\ln n_s}{\ln n_s}. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся вспомогательные утверждения, касающиеся векторов из множества U_l. Процесс формирования векторов множества U_l можно рассматривать как следующую вероятностную схему : выберем $l-1$ точек, $l>1$, независимо и случайно, согласно равномерному закону распределения, из интервала $(0,1)$. Эти точки разделяют интервал $(0,1)$ на l подинтервалов, длины которых равны соответственно $c_1,\dots,c_l$. Ясно, что $c_1+\dots+c_l=1$ и $c_s>0$ для всех $s\in N_l$. Упорядочивая случайные величины $c_1,\dots,c_l$ в порядке убывания, получим последовательность $c_{s_1}\geqslant\dots\geqslant c_{s_l}$. Через Λ_r, $r\in N_l$, обозначим случайную величину, равную сумме длин r штук, $r\leqslant l$, наибольших подинтервалов, то есть $\Lambda_r=c_1+\dots+c_{s_r}$. Очевидно, $\Lambda_l=1$. Таким образом, по случайному вектору $(c_1,\dots,c_l)$ всегда можно определить случайный вектор $(\Lambda_1,\dots,\Lambda_l)$.

Момент порядка s, где s — целое положительное число, случайной величины Λ_r, $r\in N_l$, определяется как математическое ожидание $\mathsf{E}\Lambda_r^s$, если оно существует. Момент первого порядка случайной величины Λ_r, $r\in N_l$, — это математическое ожидание $\mathsf{E}\Lambda_r$. Очевидно, что $\mathsf{E}\Lambda_l=1$.

Известны [9] следующие соотношения :

$$\mathsf{E}(1-\Lambda_r t)^{-l}=\frac{l!}{r!(1-t)^r}\prod_{j=r+1}^{l}(j-rt)^{-1},\quad r\in N_{l-1}, \tag{3}$$

где $|t|<1$. Эти соотношения позволяют найти моменты первого и второго порядка, $\mathsf{E}\Lambda_r$ и $\mathsf{E}\Lambda_r^2$, случайной величины Λ_r, $r\in N_{l-1}$.

Лемма 1. *Для $r\in N_{l-1}$*

$$\mathsf{E}\Lambda_r=\frac{r}{l}(1+H_l-H_r), \tag{4}$$

$$\mathsf{E}\Lambda_r^2=\frac{2r^2}{l(l+1)}\left(\frac{r+1}{2r}+\sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s}(1+H_l-H_{s-1})\right). \tag{5}$$

Доказательство. Разложим функции, стоящие в левой и правой частях соотношения (3), в степенной ряд по переменной t. Ясно, что

$$\frac{1}{1-\Lambda_r t} = \sum_{s=0}^{\infty} (\Lambda_r t)^s. \tag{6}$$

Беря $(l-1)$-ю производную от обеих частей равенства (6), получим, что

$$\frac{1}{(1-\Lambda_r t)^l} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{l+s-1}{s} \Lambda_r^s t^s.$$

Поэтому функция, стоящая в левой части соотношения (3), представляется в виде

$$\mathbf{E}(1-\Lambda_r t)^{-l} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{l+s-1}{s} (\mathbf{E}\Lambda_r^s) t^s. \tag{7}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{l!}{r!} \prod_{j=r+1}^{l} (j - rt)^{-1} = \prod_{h=1}^{l-r} \left(1 - \frac{r}{r+h} t\right)^{-1} = \prod_{h=1}^{l-r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{rt}{r+h}\right)^s,$$

функцию, стоящую в правой части соотношения (3), можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{l!}{r!(1-t)^r} \prod_{j=r+1}^{l} (j-rt)^{-1} \\ &\qquad = 1 + r(1 + H_l - H_r)t + r^2 \left(\frac{r+1}{2r} + \sum_{s=r+1}^{l} \frac{1}{s}(1 + H_l - H_{s-1}) \right) t^2 + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая коэффициенты при t и t^2 в равенствах (7) и (8), приходим к формулам (4) и (5). Лемма 1 доказана.

Положим

$$H_p^{(2)} = \sum_{s=1}^{p} \frac{1}{s^2}.$$

Используя лемму 1 и известное [11] равенство

$$\sum_{s=1}^{p} \frac{H_p}{s} = \frac{1}{2}(H_p^2 + H_p^{(2)})$$

легко находим выражение для дисперсии $\mathbf{D}\Lambda_r$.

Лемма 2. *Для* $r \in N_{l-1}$

$$\mathbf{D}\Lambda_r = \frac{r^2}{l^2(l+1)} (l(H_l^{(2)} - H_r^{(2)} + 1/r) - (H_l - H_r + 1)^2). \tag{9}$$

Далее, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Для $r \in N_{l-1}$ дисперсия случайной величины Λ_r удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{D}\Lambda_r < \frac{\pi^2}{6\ln^2 l}(\mathbf{E}\Lambda_r)^2. \tag{10}$$

Доказательство. С учетом равенства (4) формулу (9) можно переписать в виде

$$D\Lambda_r = \frac{(\mathbf{E}\Lambda_r)^2}{1+1/l}\varphi(r), \tag{11}$$

где

$$\varphi(r) = \frac{H_l^{(2)} - H_r^{(2)} + 1/r}{(1 + H_l - H_r)^2} - \frac{1}{l}.$$

Покажем, что для каждого $r \in N_{l-1}$ выполняется неравенство $\varphi(r) > \varphi(r+1)$. Оценим величину

$$\varphi(r) - \varphi(r+1) = \frac{H_l^{(2)} - H_r^{(2)} + 1/r}{(H_l - H_r + 1)^2} - \frac{H_l^{(2)} - H_{r+1}^{(2)} + 1/(r+1)}{(H_l - H_{r+1} + 1)^2}.$$

Для доказательства неравенства $\varphi(r) > \varphi(r+1)$ достаточно убедиться, что после приведения к общему знаменателю число, стоящее в числителе в правой части последнего равенства, положительно. Обозначим его через $\psi(r)$. Полагая

$$H = H_l^{(2)} - H_r^{(2)} + 1/r, \qquad Q = H_l - H_r + 1,$$

находим, что

$$\begin{aligned}\psi(r) &= H\left(Q - \frac{1}{r+1}\right)^2 - \left(H - \frac{2r+1}{r(r+1)^2}\right)Q^2 \\ &= HQ^2 - \frac{2HQ}{r+1} + \frac{H}{(r+1)^2} - HQ^2 + \frac{(2r+1)Q^2}{r(r+1)^2} \\ &= \frac{1}{r+1}\left(2Q\left(\frac{Q}{r+1} - H\right) + \frac{Q^2}{r(r+1)} + \frac{H}{r+1}\right).\end{aligned}$$

Упрощая выражения в и учитывая равенства

$$Q = 1 + \sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s}, \qquad H = \sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{r},$$

находим, что

$$\begin{aligned}\psi(r) = \Bigg(2\sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{s}\right) &+ 2\sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s}\sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{s}\right) \\ &+ \frac{1}{r(r+1)}\left(\sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s}\right)^2 + \frac{1}{r+1}\sum_{s=r+1}^{l}\frac{1}{s^2}\Bigg)\frac{1}{r+1} > 0.\end{aligned}$$

Итак, доказаны неравенства $\varphi(1) > \varphi(2) > \ldots > \varphi(l-1)$. Поэтому из (11) получаем оценку

$$\mathbf{D}\Lambda_r < (\mathbf{E}\Lambda_r)^2\varphi(1) < (\mathbf{E}\Lambda_r)^2\frac{H_l^{(2)}}{H_l^2}.$$

Теперь, применяя известные [11] неравенства $H_l^{(2)} < \pi^2/6$ и $H_l > \ln l$, приходим к неравенству (10). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для случайного вектора* $(c_1, \ldots, c_l) \in U_l$ *при любом* $r \in N_{l-1}$

$$\lim_{l\to\infty}\left\{\left|\frac{l}{r}\sum_{s=1}^{r} c_{i_s}/(1 + H_l - H_r) - 1\right| \leqslant \frac{\ln\ln l}{\ln l}\right\} = 1, \tag{12}$$

где $c_{i_1} \geqslant c_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c_{i_l}$.

Доказательство. Возьмем некоторое число $r \in N_{l-1}$ и обозначим через A_r событие, состоящее в том, что для случайной величины

$$\Lambda_r = \sum_{s=1}^{r} c_{i_s}$$

выполняется неравенство

$$\left|\frac{l}{r}\Lambda_r/(1 + H_l - H_r) - 1\right| \leqslant \frac{\ln\ln l}{\ln l}.$$

Согласно неравенству Чебышева [10], вероятность осуществления события A_r, удовлетворяет соотношению

$$P\{A_r\} = \mathbf{P}\{|\Lambda_r - \mathbf{E}\Lambda_r| \leqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}\Lambda_r}{\varepsilon^2}$$

при $\varepsilon = \mathbf{E}\Lambda_r \ln\ln l/\ln l$. Отсюда, используя лемму 3, находим, что

$$\lim_{l\to\infty}\mathbf{P}\{A_r\} \geqslant 1 - \lim_{l\to\infty}\frac{\pi^2}{6(\ln\ln l)^2} = 1.$$

Поэтому, принимая во внимание очевидное неравенство $\mathbf{P}\{A_r\} \leqslant 1$, получим, что

$$\lim_{l\to\infty}\mathbf{P}\{A_r\} = 1.$$

Отсюда следует справедливость леммы 4.

Лемма 5. *При любом* $\varepsilon > 0$ *и любом* $r \in N_{l-1}$ *для случайного вектора* $(c_1, \ldots, c_l)$ *из* U_l *справедливо соотношение*

$$\lim_{l\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{l}{r}\sum_{s=1}^{r} c_{i_s}/(1 + H_l - H_r) - 1\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1, \tag{13}$$

где $c_{i_1} \geqslant c_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c_{i_l}$.

Доказательство. Согласно лемме 4 при любом $r \in N_{l-1}$ для случайного вектора $c \in U_l$ выполняется (12). Поскольку левая часть неравенства

$$\left| \frac{l}{r} \sum_{s=1}^{r} c_{i_s}/(1 + H_l - H_r) - 1 \right| \leqslant \frac{\ln \ln l}{\ln l}$$

для каждого $r \in N_{l-1}$ не зависит от r и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное l_0, что для любого $l > l_0$ выполняется неравенство $\ln \ln l / \ln l < \varepsilon$, из (12) следует (13). Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Определим множество $W^{\xi}(n_1^p) \subseteq W(n_1^p)$, считая, что $(a^1, \dots, a^p) \in W^{\xi}(n_1^p)$, если компоненты векторов $a^1, \dots, a^p$ удовлетворяют условиям (2). Пусть A_s — событие, состоящее в совместном выполнении неравенств (2) при фиксированном $s \in N_p$. Поскольку события $A_1, \dots, A_p$ являются независимыми, на основании леммы 4 получаем, что

$$\prod_{s=1}^{p} \lim_{n_s \to \infty} \mathsf{P}\{A_s\} = 1.$$

Следовательно, выполняется равенство (1). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 с использованием леммы 5 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2. *При любом $\varepsilon > 0$ и любых $r_s \in H_{n_s-1}$ для случайного набора векторов $(a^1, \dots, a^p)$ из множества $W(n_1^p)$ для всех $s \in N_p$ справедливы соотношения*

$$\lim_{n_s \to \infty} \mathsf{P} \left\{ \left| \frac{n_s}{r_s} \sum_{i=1}^{r_s} a_i^s/(1 + H_{n_s} - H_r) - 1 \right| \leqslant \varepsilon \right\} = 1. \tag{14}$$

Следствие 1. *Почти все наборы векторов $(a^1, \dots, a^p)$ из множества $W(n_1^p)$ для каждого $r_s \in N_{n_s-1}$ удовлетворяют асимптотическим равенствам*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i^s = r_s(1 + H_{n_s} - H_r)/n_s + o(r_s(1 + H_{n_s} - H_r)/n_s)$$

для всех $s \in N_p$.

Следствие 2. *Определенный векторами*

$$a^s = (H_{n_s}/n_s, (H_{n_s} - H_1)/n_s, \dots, (H_{n_s} - H_{n_s-1})/n_s), \qquad s \in N_p,$$

p-АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$ порядка n_1^p, удовлетворяет соотношениям (14).

3. Свойства k-граней КТМ

В [6, 7] предложен критерий принадлежности многогранника порядка $m \times n$ классу $\mathscr{P}_k(m, n)$ невырожденных КТМ с максимальным числом k-граней для всех $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, где $d = (m-1)(n-1)$. Представляет интерес выяснение асимптотического поведения этих классов при стремлении m и n к бесконечности.

Теорема 3. *Пусть* $m \leqslant n$, $n = mt + r$, $0 \leqslant r \leqslant m-1$, $q = [(t + r/m)\sqrt{m \ln m}]$. *Для всякого* $k \in \{0, 1, \ldots, mn - 2n - m + q + 1\}$ *почти нет КТМ с максимальным числом* k*-граней.*

Доказательство. Поскольку мера Лебега в пространстве E_{m+n-1} множества пар векторов (a, b), определяющих вырожденные КТМ, равна нулю (см. [2], с. 266), для доказательства теоремы достаточно ограничиться рассмотрением лишь невырожденных КТМ.

Пусть $M(a', b')$ — некоторый невырожденный КТМ порядка $m \times n$, удовлетворяющий условиям теоремы 2, то есть для любого $\varepsilon > 0$ и любых $r_1 \in N_{m-1}$ и $r_2 \in N_n$

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{r_1}\sum_{i=1}^{r_1} a'_i/(1 + H_m - H_{r_1}) - 1\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{n}{r_2}\sum_{i=1}^{r_1} b'_i/(1 + H_m - H_{r_2}) - 1\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1, \tag{16}$$

где $a'_1 \geqslant a'_2 \geqslant \ldots \geqslant a'_m$, $b'_1 \geqslant b'_2 \geqslant \ldots \geqslant b'_n$.

Тогда в силу теоремы 2 и теоремы 1 из [6] теорема 3 будет доказана, если будет указана пара $(I, J) \in \aleph(a', b', a^*, b^*)$, удовлетворяющая неравенству

$$\min\{|I|(n - |J|), |J|(m - |I|)\} \leqslant (m-1)(n-1) - k \tag{17}$$

при достаточно больших m, n, где

$$a^* = (1/m, 1/m, \ldots, 1/m), \quad b^* = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n).$$

Известно (см. [2], с. 238), что $(I, J) \in \aleph(a', b', a^*, b^*)$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i\in I} a'_i - \sum_{j\in J} b'_j\right)(n|I| - m|J|) < 0.$$

Покажем, что при достаточно больших n и m это неравенство выполняется для пары (I^*, J^*), где

$$I^* = \{1\}, \qquad J^* = \{n - q + 1, n - q + 2, \ldots, n\}.$$

Согласно следствию 1 имеют место асимптотические равенства, справедливые при $m \to \infty$ и $n \to \infty$,

$$a'_1 = \frac{1}{m}H_m(1 + o(1)), \qquad \sum_{j=n-q+1}^{n} b'_j = 1 - \frac{n-q}{n}(1 + H_n - H_{n-q})(1 + o(1)).$$

Поэтому при достаточно больших m и n

$$\begin{aligned} a'_1 - \sum_{j=n-q+1}^{n} b'_j &= \frac{1}{m}H_m - (1 - (n-q)(1 + H_n - H_{n-q})/n) \\ &= (nH_m - mq + m(n-q)(H_n - H_{n-q}))/(mn) \\ &> (nH_m - mq(1 - (n-q)/n))/(mn) \\ &= (n^2 H_m - mq^2)/(mn^2) > (n^2 \ln m - mq^2)/(mn^2). \end{aligned}$$

Так как $n^2 \ln m - mq^2 \geqslant 0$ при $q \leqslant (t + r/m)\sqrt{m \ln m}$, справедливо неравенство

$$a'_1 - \sum_{j=n-q+1}^{n} b'_j > 0.$$

Отсюда, учитывая неравенство $n|I^*| - m|J^*| < 0$, справедливое при $q > t + r/m$, заключаем, что $(I^*, J^*) \in \aleph(a', b', a^*, b^*)$, при достаточно больших m, n.

Найдем значения k, для которых пара (I^*, J^*) удовлетворяет неравенству (17):

$$\begin{aligned} k \leqslant (m-1)(n-1) - \min\{n-q, q(m-1)\} &= (m-1)(n-1) - (n-q) \\ &= mn - 2n - m + q + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, для всякого $k \in \{0, 1, \ldots, mn - 2n - m + q + 1\}$ неравенство (17) выполняется при достаточно больших m, n. Теорема 3 доказана.

Ранее это утверждение было известно [6, 7] лишь для $k \in \{0, 1, \ldots, [3mn/4] - n - m + 1\}$.

Следующая теорема обобщает теорему 7 из [6].

Теорема 4. *Почти все КТМ имеют максимальное число k-граней, где*

$$k = (m-1)(n-1) - [m/2], \qquad m \leqslant n.$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, будем считать, что КТМ $M(a', b')$ порядка $m \times n$, $m \leqslant n$, невырожден и удовлетворяет условиям (15) и (16). Пусть натуральные числа s и t удовлетворяют неравенству $st \leqslant m/2$.

Возможны пять случаев:

$$\begin{aligned} &s = [m/2], \qquad t = 1; \\ &s = 1, \qquad t = [m/2]; \\ &s = [m/4], \qquad t = 2; \\ &s = 2, \qquad t = [m/4]; \\ &s \leqslant m/6, \qquad t \leqslant m/6. \end{aligned}$$

Доказательство во всех случаях проводится по одной схеме. Поэтому рассмотрим лишь последний случай. Пусть $st \leqslant q \leqslant [m/6]^2$. Тогда в силу следствия 1 для достаточно больших q справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{s} a'_{i_h} + \sum_{h=1}^{t} b'_{j_h} &\leqslant \sum_{h=1}^{q} a'_{i_h} + \sum_{h=1}^{q} b'_{j_h} \\ &= \frac{q}{m}(1 + H_m - H_q) + \frac{q}{n}(1 + H_n - H_q) \\ &\leqslant \frac{2q}{m}(1 + H_m - H_q). \end{aligned} \tag{18}$$

Используя справедливое при $l \to \infty$ известное [11] равенство

$$H_l = \ln l + \gamma + O(1/l), \tag{19}$$

где $\gamma = 0,5772\ldots$ — константа Эйлера, заключаем, что для достаточно больших m и q выполняется неравенство

$$\frac{2q}{m}(1 + H_m - H_q) < \frac{2q}{m}\left(\ln\frac{m}{q} + 1\right). \tag{20}$$

Так как при $q = [m/6]$

$$\frac{2q}{m}\left(\ln\frac{m}{q} + 1\right) < 1,$$

ввиду (18) и (20)

$$\sum_{h=1}^{s} a'_{i_h} + \sum_{h=1}^{t} b'_{j_h} < 1,$$

то есть

$$\sum_{h=1}^{s} a'_{i_h} < 1 - \sum_{h=1}^{t} b'_{j_h} = \sum_{h=t+1}^{n} b'_{j_h}.$$

Поэтому на основании теоремы 3 из [6] КТМ $M(a', b')$ при достаточно больших m, n имеет максимальное число k-граней, где $k = d - [m/6]$. Отсюда и из теоремы 2 следует справедливость теоремы 4.

Поскольку справедливы [6] включения

$$\mathscr{P}_k(m,n) \subset \mathscr{P}_{k+1}(m,n), \qquad k = 0, 1, \ldots, d-2,$$

из теоремы 4 вытекает утверждение, дающее усиление следствия 3 из [6].

Следствие 3. *Для любого $q \in N_{[m/2]}$ почти все КТМ имеют максимальное число $(d-q)$-граней.*

4. Свойства k-граней p-АТМ

Известно [2, 8], что размерность p-АТМ порядка n_1^p равна

$$d = \prod_{s=1}^{p} n_s - \sum_{s=1}^{p} n_s + p - 1.$$

Зафиксируем некоторое число $k \in \{0, 1, 2, \ldots, d-1\}$. Ясно, что k-гранью p-АТМ $M(a^1, \ldots, a^p)$ порядка n_1^p может быть лишь непустое множество вида

$$F_G(a^1, \ldots, a^p) = \{x \in M(a^1, \ldots, a^p) \colon x_{i_1 \ldots i_p} = 0 \quad \forall (i_1, \ldots, i_p) \in G\},$$

где $G \subseteq N_{n_1} \times \ldots \times N_{n_p}$, $|G| = d - k$.

Пусть $l \in N_p$. Рассмотрим $(p-1)$-индексную матрицу $y = \|y_{i_1 \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_p}\|$, принадлежащую многограннику

$$M(a^1, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, \ldots, a^p)$$

порядка

$$n_1 \times \ldots \times n_{l-1} \times n_{l+1} \times \ldots \times n_p.$$

Запишем эту матрицу в виде $(n_1 \dots n_{l-1} n_{l+1} \dots n_p)$-мерного вектора

$$z(y) = (y_{11\dots1*11\dots1}, y_{11\dots1*11\dots12}, \dots, y_{n_1\dots n_{l-1}*n_{l+1}\dots n_p}),$$

где $*$ обозначает отсутствие l-го индекса. Удалив в векторе $z(y)$ нулевые компоненты, получим вектор $z^+(y)$, число компонент которого равно числу $t(y)$ положительных элементов матрицы y. Отметим, что компоненты вектора $z^+(y)$ занумерованы тем же способом, что и компоненты вектора $z(y)$.

Поскольку сумма компонент вектора $z^+(y)$ равна K, пара векторов a^l и $z^+(y)$ определяет КТМ $M(a^l, z^+(y))$ порядка $n_l \times t(y)$.

Пусть $u(y) = \|u^y_{i_l j}\|_{n_l \times t(y)}$ — некоторая матрица многогранника $M(a^l, z^+(y))$, где индекс j представляет собой совокупность индексов $(i_1 \dots i_{l-1} * i_{l+1} \dots i_p)$, задаваемую номерами компонент вектора $z^+(y)$. Тогда по этой матрице определим матрицу $x(u(y)) = \|x^{u(y)}_{i_1\dots i_p}\|$ согласно правилу

$$x^{u(y)}_{i_1\dots i_{l-1} i_l i_{l+1}\dots i_p} = \begin{cases} u^y_{i_l j}, & \text{если } (i_1 \dots i_{l-1} * i_{l+1} \dots i_p) = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что построенная таким образом матрица $x(u(y)) \in M(a^1, \dots, a^p)$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть $p \geqslant 3$, $l \in N_p$. Тогда*

$$M(a^1, \dots, a^p) = \{x(u(y)) \colon y \in M(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p), u(y) \in M(a^l, z^+(y))\}.$$

Индукцией по p с помощью леммы 6, легко доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $p \geqslant 3$, $t \in N_{n_1-1}$. Для того, чтобы невырожденный p-АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$ порядка n_1^p имел максимальное число $(d-t)$-граней, достаточно, чтобы существовала пара индексов $l, q \in N_p$, $l \neq q$, для которой КТМ $M(a^l, a^q)$ порядка $n_l \times n_q$ обладает максимальным числом $(n_l n_q - n_l - n_q + 1 - t)$-граней.*

Следствием теорем 5 и 3 из [6] является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $p \geqslant 3$, $t \in N_{n_1-1}$. Невыржденный p-АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$ порядка n_1^p имеет максимальное число $(d-t)$-граней, если существует пара индексов $l, q \in N_p$, $l \neq q$, такая, что*

$$\sum_{i=1}^{u} a_i^l < \sum_{i=v+1}^{n_q} a_i^q,$$

для всех $(u, v) \in D(t)$, где $D(t)$ — множество всех максимальных пар (u, v) частично упорядоченного множества

$$R(t) = \{(i,j) \in N_t \times N_t \colon ij \leqslant t\}$$

(напомним, что (u, v) — максимальная пара множества $R(t)$, если в $R(t)$ не существует такой пары $(u', v') \neq (u, v)$, что $u \leqslant u'$, $v \leqslant v'$.)

Теорема 7. *Для любого $t \in N_{[n_1/2]}$ почти все p-АТМ имеют максимальное число $(d-t)$-граней.*

Доказательство. Пусть $t \in N_{[n_1/2]}$. Определим множество $W^{\xi}(n_1^p) \subseteq W(n_1^p)$, считая, что $(a^1, \ldots, a^p) \in W^{\xi}(n_1^p)$, если p-АТМ $M(a^1, \ldots, a^p)$ обладает максимальным числом $(d-t)$-граней.

Через $W_0^{\xi}(n_1^p)$ обозначим множество векторов $(a^1, \ldots, a^p) \in W(n_1^p)$ таких, что существуют индексы $l, q \in N_p$, $l \neq q$, при которых КТМ $M(a^l, a^q)$ имеет максимальное число $(n_l n_q - n_l - n_q + 1 - t)$-граней.

На основании теоремы 5 справедливо включение $W_0^{\xi}(n_1^p) \subseteq W^{\xi}(n_1^p)$. Поэтому, учитывая следствие 3 и неравенство

$$\frac{\mu(W_0^{\xi}(n_1^p))}{\mu(W(n_1^p))} \geqslant \frac{\mu(W_0^{\xi}(n_1^2))}{\mu(W(n_1^2))},$$

получаем равенство (1). Теорема 7 доказана.

Это утверждение в случае, когда $t = 1$, впервые доказано в [12].

Пусть $R_t(n_1^p)$ — множество всех разрешимых p-индексных транспортных задач с аксиальными суммами порядка n_1^p с t запретами (терминалогию см. в [2]), а $Q_t(n_1^p)$ — множество тех p-индексных транспортных задач с аксиальными суммами порядка n_1^p с t запретами, для которых выполняются условия теоремы 6. Поскольку справедливы включения $Q_t(n_1^p) \subset R_t(n_1^p)$ для всех $t \in N_{[n_1/2]}$, на основании теоремы 7 получаем следующий практически важный результат.

Следствие 4. *Если для p-индексной транспортной задачи с аксиальными суммами порядка n_1^p число запретов не превосходит $[n_1/2]$, то она почти всегда разрешима.*

Это утверждение в случае, когда $p = 2$, а число запретов t не превосходит $c \min\{m/\ln m, n/\ln n\}$, где c — любая положительная константа, не зависящая от m и n, впервые было доказано в [6,7].

5. Свойства, связанные с диаметром КТМ

Диаметр многогранника, как расстояние (по числу ребер) между самыми удаленными вершинами, можно интерпретировать как число итераций наилучшего симплексного алгоритма (если, конечно, такой будет построен) при наихудшем расположении стартовой и оптимальной вершин. Не удивительно поэтому, что диаметр многогранника всесторонне изучается как для многогранников общего вида [2, 13], так и для многогранников специальных задач оптимизации [14–18].

В частности, в [17,18] было установлено, что максимальный диаметр КТМ порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 4$, равен $m + n - 1$.

Следующая теорема дает положительный ответ для гипотезы, касающейся асимптотического поведения класса КТМ с максимальным диаметром, сформулированной в [6].

Теорема 8. *Почти все КТМ имеют максимальный диаметр.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 8, докажем некоторые важные вспомогательные утверждения, касающиеся строения КТМ, имеющих максимальный диаметр.

Для матрицы $x = \|x_{ij}\|_{m\times n}$ многогранника $M(a,b)$ порядка $m\times n$ введем множество

$$K(a,b,x) = \{(i,j)\in N_m\times N_n\colon x_{ij}>0\}.$$

Теорема 9. *У невырожденного КТМ $M(a,b)$ порядка $m\times n$, $3\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 4$, имеются вершины x и y такие, что*

$$K(a,b,x)\cap K(a,b,y)=\varnothing,$$

тогда и только тогда, когда существуют собственные подмножества $I\subset N_m$ и $J\subset N_n$, удовлетворяющие неравенствам

$$\max\{a_i\colon i\in N_m\} < \min\left\{\sum_{j\in J} b_j,\ \sum_{j\in N_n\setminus J} b_j\right\}, \tag{21}$$

$$\max\{b_j\colon j\in N_n\} < \min\left\{\sum_{i\in I} a_i,\ \sum_{i\in N_m\setminus I} a_i\right\}. \tag{22}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $n\geqslant 4$, $3\leqslant m\leqslant n$,

$$a_1=\max\{a_i\colon i\in N_m\},\qquad b_1=\max\{b_j\colon j\in N_n\}. \tag{23}$$

Среди подмножеств $I\subset N_m$ и $J\subset N_n$, содержащих 1 и удовлетворяющих условиям (21) и (22) выберем те подмножества I и J, каждое из которых имеет минимальную мощность. Для определенности будем считать, что $I=\{1,\dots,q\}$, $J=\{1,\dots,p\}$ и

$$a_1\geqslant\dots\geqslant a_q,\qquad a_m\geqslant a_{m-1}\geqslant\dots\geqslant a_{q+1}, \tag{24}$$

$$b_1\geqslant\dots\geqslant b_p,\qquad b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\dots\geqslant b_{p+1}. \tag{25}$$

Будем предполагать, что выполняется неравенство $a_1>b_1$, так как случай, когда выполняется неравенство $a_1<b_1$, сводится к первому, если перейти от многогранника $M(a,b)$ к многограннику $M(b,a)$.

Пусть x и y — вершины многогранника $M(a,b)$, построенные соответственно методами северо-западного и северо-восточного углов (см. задачу 17 из гл. 6 в [2]). Тогда согласно условий (21) и (22) справедливы соотношения

$$\{(i,j)\in\{i\}\times N_n\colon x_{ij}>0\wedge y_{ij}>0\}=\varnothing,\qquad i=1,m,$$
$$\{(i,j)\in N_m\times\{j\}\colon x_{ij}>0\wedge y_{ij}>0\}=\varnothing,\qquad \forall j\in N_{p-1}\cup\{p'+1,p'+2,\dots,n\},$$

где натуральные числа p и p' удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{p-1} b_j < a_1 < \sum_{j=1}^{p} b_j,\qquad \sum_{j=p'+1}^{n} b_j < a_1 < \sum_{j=p'}^{n} b_j. \tag{26}$$

Поэтому множества $K(a,b,x)$ и $K(a,b,y)$ пересекаются либо по строке, номер которой $i\neq\{1,m\}$, либо по столбцу, номер которого $j\in\{p,p+1,\dots,p'\}$.

Возможны два случая.

Пусть в первом случае множества $K(a,b,x)$ и $K(a,b,y)$ пересекаются по столбцу j_0, где $p \leqslant j_0 \leqslant p'$. Положим

$$K(a,b,x) \cap K(a,b,y) = \{(i,j_0)\colon i \in Q\},$$

где $Q = \{q_0, q_0+1, \ldots, q_1\}$, $q_0 \geqslant 2$, $q_1 \leqslant m-1$.

Тогда

$$\begin{aligned} &x_{i1} = 0, \quad i \in Q, & &x_{in} = 0, \quad i \in Q \setminus \{q_1\}, \\ &y_{i1} = 0, \quad i \in Q \setminus \{q_1\}, & &y_{in} = 0, \quad i \in Q, \\ &y_{q_1 j} = 0, & &j = j_0+1, j_0+2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{27}$$

Возможны три подслучая. В первом подслучае $j_0 = p$. Положим

$$Q^* = \begin{cases} Q, & \text{если } y_{q_1 1} = 0, \\ Q \setminus \{q_1\}, & \text{если } y_{q_1 1} > 0. \end{cases}$$

Построим матрицу x', компоненты которой определяются по формулам

$$\begin{aligned} x'_{i1} &= x_{ij_0}, \quad i \in Q^*, \quad x'_{ij_0} = 0, \quad i \in Q, \\ x'_{11} &= b_1 - \sum_{i \in Q^*} x_{ij_0}, \qquad x'_{1j_0} = x_{1j_0} + \sum_{i \in Q^*} x_{ij_0}, \\ x'_{q_1 j} &= x_{q_1 j} + \Delta_j, \quad j \in R = \{j_1, j_1+1, \ldots, n\}, \\ x'_{ij} &= x_{ij} - \Delta_{ij}, \quad i \in Q' = \{q_1+1, q_1+2, \ldots, m\}, \quad j \in R, \\ x'_{ij_0} &= \sum_{j \in R} \Delta_{ij}, \qquad i \in Q', \quad y_{q_1 1} > 0, \\ x'_{ij} &= x_{ij}, \qquad \text{в остальных случаях}, \end{aligned}$$

где $j_1 = \min\{j \in \{j_0+1, j_0+2, \ldots, n\}\colon x_{q_1 j} < b_j\}$, а числа Δ_j, $j \in R$, и Δ_{ij}, $i \in Q'$, $j \in R$, удовлетворяют системе соотношений

$$\begin{gathered} \sum_{j \in R} \Delta_j = x_{q_1 j_0}, \quad \Delta_j = \sum_{i \in Q'} \Delta_{ij}, \quad j \in R, \\ 0 \leqslant \Delta_{ij} \leqslant x_{ij}, \quad i \in Q', \quad j \in R. \end{gathered} \tag{28}$$

Заметим, что ввиду условий (21) и (23) такой индекс j_1 всегда существует, а система (28) совместна, поскольку выполняется неравенство

$$\sum_{j=j_1}^{n} b_j - x_{q_1 j_1} > x_{q_1 j_0};$$

из (23) вытекает, что

$$\sum_{i \in Q^*} x_{ij_0} \leqslant b_1.$$

Поэтому $x' \in M(a,b)$. В случае, когда $y_{q_1 1} > 0$, справедливы равенства

$$x_{ij_0} = y_{ij_0} = 0, \qquad i \in Q'.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (27), получаем, что

$$K(a,b,x') \cap K(a,b,y) = \varnothing.$$

Теперь, исключив все циклы в матрице x' (конечно, если они имеются), составленные из пар множества $K(a,b,x')$, находим вершину x'', удовлетворяющую условию

$$K(a,b,x'') \cap K(a,b,y) = \varnothing. \tag{29}$$

Во втором подслучае $p < j_0 < p$. Построим матрицу x', компоненты которой определяются по формулам

$$\begin{gathered} x'_{i1} = x_{ij_0}, \quad i \in Q^*, \quad x'_{ij_0} = 0, \quad i \in Q, \\ x'_{11} = b_1 - \sum_{i\in Q^*} x_{ij_0}, \qquad x'_{1j_0} = x_{1j_0} + \sum_{i\in Q^*} x_{ij_0}, \\ x'_{q_1 n} = x_{q_1 n} + x_{q_1 j_0}, \quad x'_{in} = x_{in} - \Delta_i, \quad i \in Q', \\ x'_{ij_0} = x_{ij_0} + \Delta_i, \quad i \in Q', \quad y_{q_1 1} > 0, \\ x'_{ij} = x_{ij} \quad \text{в остальных случаях,} \end{gathered}$$

где числа Δ_i, $i \in Q'$, удовлетворяют системе соотношений

$$\sum_{i\in Q'} \Delta_i = x_{q_1 j_0}, \quad 0 \leqslant \Delta_i \leqslant x_{in}, \quad i \in Q'. \tag{30}$$

Так как $b_{j_0} \leqslant b_n$ в силу (25), из условий (21) и (23) вытекает неравенство

$$\sum_{i\in Q'} x_{in} > x_{q_1 j_0}.$$

Это значит, что система (30) совместна. Поэтому с учетом неравенства

$$\sum_{i\in Q^*} x_{ij_0} \leqslant b_1$$

матрица $x' \in M(a,b)$. Отсюда, как и в первом подслучае, вновь приходим к выводу о существовании вершины $x'' \in M(a,b)$, удовлетворяющей условию (29).

В третьем подслучае $j_0 = p'$. Положим

$$Q^{**} = \begin{cases} Q, & \text{если } x_{q_1 n} = 0, \\ Q \setminus \{q_1\}, & \text{если } x_{q_1 n} > 0. \end{cases}$$

Построим матрицу y', компоненты которой определяются по формулам

$$\begin{gathered} y'_{in} = y_{ij_0}, \quad i \in Q^{**}, \quad y'_{ij_0} = 0, \quad i \in Q, \\ y'_{1n} = b_n - \sum_{i\in Q^{**}} y_{ij_0}, \qquad y'_{1j_0} = y_{1j_0} + \sum_{i\in Q^{**}} y_{ij_0}, \\ y'_{q_1 1} = y_{q_1 1} + y_{q_1 j_0}, \quad y'_{i1} = y_{i1} - \Delta_i, \quad i \in Q', \\ y'_{ij_0} = y_{ij_0} + \Delta_i, \quad i \in Q', \quad x_{q_1 n} > 0, \\ y'_{ij} = y_{ij} \quad \text{в остальных случаях,} \end{gathered}$$

где числа Δ_i, $i \in Q'$, удовлетворяют системе соотношений

$$\sum_{i\in Q'} \Delta_i = y_{q_1 j_0}, \quad 0 \leqslant \Delta_i \leqslant y_{i1}, \quad i \in Q'. \tag{31}$$

Так как $b_1 \geqslant b_{j_0}$, ввиду (21) и (23),

$$\sum_{i\in Q'} y_{i1} > y_{q_1 j_0}.$$

Следовательно, система (31) совместна. Поэтому с учетом неравенства

$$\sum_{i\in Q^{**}} y_{ij_0} \leqslant b_n$$

матрица $y' \in M(a,b)$. Заметим, что в случае, когда $x_{q_1 n} > 0$, справедливы равенства $x_{ij_0} = 0$ для всех $i \in Q'$. Отсюда, учитывая (27), получаем, что

$$K(a,b,x) \cap K(a,b,y') = \varnothing.$$

Поэтому всегда найдется вершина y'' многогранника $M(a,b)$, для которой

$$K(a,b,x) \cap K(a,b,y'') = \varnothing. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда множества $K(a,b,x)$ и $K(a,b,y)$ пересекаются по строке i_0, где $2 \leqslant i_0 \leqslant m-1$. Положим

$$K(a,b,x) \cap K(a,b,y) = \{(i_0, j) \colon j \in P\},$$

где

$$P = \{p_0, p_0+1, \dots, p_1\}, \quad p \leqslant p_0, \quad p_1 \leqslant p',$$

а числа p и p' удовлетворяют неравенствам (26). Будем предполагать, что $p_1 > p_0$, так как при $p_1 = p_0$ теорема уже доказана (первый случай).

Очевидно, что

$$\begin{gathered} x_{ij} = y_{ij} = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i_0\}, \quad j \in \{p_0+1, p_0+2, \dots, p_1-1\}, \\ y_{1p_0} = 0, \quad x_{1p_1} = 0, \quad x_{mp_0} = 0, \quad y_{mp_1} = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Возможны три подслучая. В первом подслучае $p_0 \geqslant p$, $p' > p_1$. Положим

$$P^* = \begin{cases} P, & \text{если } y_{mp_0} = 0, \\ P \setminus \{p_0\}, & \text{если } y_{mp_0} > 0. \end{cases}$$

Построим матрицу x', компоненты которой определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&x'_{mj} = x_{i_0 j}, && j \in P^*, \\
&x'_{i_0 j} = 0, && j \in P, \\
&x'_{i_0 j} = x_{i_0 j} + \Delta_j, && j = p', p'+1, \dots, n, \\
&x'_{mj} = x_{mj} - \Delta_j, && j = p', p'+1, \dots, n, \\
&x'_{i_0 1} = x_{i_0 p_0}, && x'_{11} = b_1 - x_{i_0 p_0}, \quad x'_{1p_0} = x_{1p_0} + x_{i_0 p_0}, \quad y_{mp_0} > 0, \\
&x'_{ij} = x_{ij} && \text{в остальных случаях,}
\end{aligned}$$

где числа Δ_j, $j = p', p'+1, \dots, n$, удовлетворяют системе соотношений

$$0 \leqslant \Delta_j \leqslant x_{mj}, \quad j = p', p'+1, \dots, n, \quad \sum_{j=p'}^{n} \Delta_j = \sum_{j \in P^*} x_{i_0 j}. \tag{34}$$

Поскольку в силу (24) справедливы неравенства

$$\sum_{j \in P^*} x_{i_0 j} \leqslant a_{i_0} \leqslant a_m,$$

система (34) совместна. Отсюда, учитывая неравенства $x_{i_0 p_0} \leqslant b_{p_0} \leqslant b_1$, заключаем, что матрица $x' \in M(a,b)$. Поэтому в силу (33) выполняется соотношение

$$K(a,b,x') \cap K(a,b,y) = \varnothing$$

и, следовательно, найдется вершина $x'' \in M(a,b)$, для которой справедливо (29).

Рассмотрим второй подслучай, когда $p_0 > p$, $p' \geqslant p_1$. Положим

$$P^{**} = \begin{cases} P, & \text{если } x_{mp_1} = 0, \\ P \setminus \{p_1\}, & \text{если } x_{mp_1} > 0. \end{cases}$$

Построим матрицу y', компоненты которой определяются по формулам

$$\begin{gathered} y'_{mj} = y_{i_0 j}, \quad j \in P^{**}, \quad y'_{i_0 j} = 0, \quad j \in P, \\ y'_{i_0 j} = y_{i_0 j} + \Delta_j, \quad j = 1, \dots, p, \\ y'_{mj} = y_{mj} - \Delta_j, \quad j = 1, \dots, p, \\ y'_{i_0 n} = y_{i_0 p_1}, \quad y'_{1n} = b_n - y_{i_0 p_1}, \quad y'_{1p_1} = y_{1p_1} + y_{i_0 p_1}, \quad x_{mp_1} > 0, \\ y'_{ij} = y_{ij} \quad \text{в остальных случаях,} \end{gathered}$$

где числа Δ_j, $j = 1, \dots, p$, удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \Delta_j \leqslant y_{mj}, \quad j = 1, \dots, p, \quad \sum_{j=1}^{p} \Delta_j = \sum_{j \in P^{**}} y_{i_0 j}. \tag{35}$$

Так как в силу (24) справедливы неравенства

$$\sum_{j \in P^{**}} y_{i_0 j} \leqslant a_{i_0} \leqslant a_m$$

система (35) совместна. Отсюда, с учетом неравенств $y_{i_0 p_0} \leqslant b_{p_0} \leqslant b_n$ (см. (25)), матрица $y \in M(a,b)$. Поэтому в силу (33)

$$K(a,b,x) \cap K(a,b,y') = \varnothing$$

и, значит, найдется вершина $y'' \in M(a,b)$, для которой выполняется (32).

Рассмотрим третий подслучай, когда $p_0 = p$, $p' = p_1$. Пусть $x_{mp_1} y_{mp_0} = 0$. Для определенности примем, что $y_{mp_0} = 0$. Построим матрицу y', компоненты которой определяются по формулам

$$\begin{gathered} y'_{mj} = y_{i_0 j}, \quad j \in P^{**}, \quad y'_{i_0 j} = 0, \quad j \in P, \\ y'_{i_0 j} = y_{i_0 j} + \Delta_j, \quad j = 1, \dots, p-1, \\ y'_{mj} = y_{mj} - \Delta_j, \quad j = 1, \dots, p-1, \\ y'_{i_0 n} = y_{i_0 p_1}, \quad y'_{1n} = b_n - y_{i_0 p_1}, \quad y'_{1p_1} = y_{1p_1} + y_{i_0 p_1}, \quad x_{mp_1} > 0, \\ y'_{ij} = y_{ij} \quad \text{в остальных случаях,} \end{gathered}$$

где числа Δ_j, $j = 1, 2, ..., p-1$, удовлетворяют системе соотношений

$$0 \leqslant \Delta_j \leqslant y_{mj}, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad \sum_{j=1}^{p-1} \Delta_j = \sum_{j \in P^{**}} y_{i_0 j}.$$

Повторяя рассуждения, использованные при рассмотрении предыдущего подслучая, вновь получаем вершину $y'' \in M(a,b)$, для которой выполняется (32).

Пусть теперь $x_{mp_1} y_{mp_0} > 0$. Из (23) вытекают неравенства

$$a_1 \geqslant b_1 + x_{1p_0} \geqslant b_{p_1} + x_{1p_0} \geqslant x_{mp_1} + x_{1p_0},$$

а из (24) неравенство

$$a_m \geqslant a_{i_0} = \sum_{j \in P} x_{i_0 j}.$$

Поэтому

$$a_1 - x_{1p_0} + a_m - x_{mp_1} \geqslant \sum_{j \in P} x_{i_0 j}.$$

Отсюда вновь приходим к выводу о существовании вершины $x'' \in M(a,b)$, для которой выполняется (29). Теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Невырожденный КТМ $M(a,b)$ порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 4$, имеет максимальный диаметр, если существуют подмножества $I \subset N_m$ и $J \subset N_n$, удовлетворяющие условиям* (21) *и* (22).

Доказательство. Пусть для невырожденного КТМ $M(a,b)$ порядка $m \times n$, $n \geqslant 4$, $3 \leqslant m \leqslant n$, существуют собственные подмножества $I \subset N_m$ и $J \subset N_n$, для которых выполняются (21) и (22). Тогда, по теореме 9, найдется пара вершин x и y такая, что

$$K(a,b,x) \cap K(a,b,y) = \varnothing.$$

Поэтому в силу леммы 4.2 из [2] справедливо неравенство $\operatorname{diam} M(a,b) \geqslant m+n-1$.

С другой стороны, используя [17,18], получаем, что $\operatorname{diam} M(a,b) \leqslant m+n-1$. Следовательно, $\operatorname{diam} M(a,b) = m+n-1$. Теорема 10 доказана.

Пока неизвестно, являются ли условия теоремы 10 необходимыми.

Доказательство теоремы 8. Пусть $M(a',b')$ — некоторый невырожденный КТМ порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 4$, удовлетворяющий условиям (15) и (16). Без ограничения общности можно считать, что

$$a'_1 \geqslant \ldots \geqslant a'_m, \qquad b'_1 \geqslant \ldots \geqslant b'_n.$$

Положим
$$I = \{1, 2, \ldots, [m/6]\}, \qquad J = \{1, 2, \ldots, [n/6]\}.$$

Тогда на основании следствия 1 и равенства (19) при достаточно больших m и n
$$a'_1 < \frac{\ln m + 1}{m}, \qquad b'_1 < \frac{\ln n + 1}{n},$$
$$\frac{\ln 6}{6} < \sum_{s \in I} a'_s = \frac{[m/6]}{m}(H_m - H_{[m/6]} + 1) < \frac{\ln 6 + 1}{6}, \tag{36}$$
$$\frac{\ln 6}{6} < \sum_{s \in J} b'_s = \frac{[n/6]}{n}(H_n - H_{[n/6]} + 1) < \frac{\ln 6 + 1}{6}. \tag{37}$$

Из (36) и (37), учитывая соотношения
$$\sum_{s \in N_m \setminus I} a'_s = 1 - \sum_{s \in I} a'_s, \qquad \sum_{s \in N_n \setminus J} b'_s = 1 - \sum_{s \in J} b'_s,$$

получаем, что для КТМ $M(a', b')$ порядка $m \times n$ при достаточно больших m, n выполняются условия
$$\min\left\{\sum_{s \in I} a'_s, \sum_{s \in N_m \setminus I} a'_s\right\} = \sum_{s \in I} a'_s,$$
$$\min\left\{\sum_{s \in J} b'_s, \sum_{s \in N_n \setminus J} b'_s\right\} = \sum_{s \in J} b'_s.$$

Отсюда, в силу очевидного неравенства
$$\frac{\ln l + 1}{l} < \frac{\ln \quad 6}{6}, \qquad l \geqslant 12,$$

заключаем, что для КТМ $M(a', b')$ порядка $m \times n$ при достаточно больших m, n условия (21) и (22) выполняются. Поэтому на основании теоремы 10 КТМ $M(a', b')$ порядка $m \times n$ имеет максимальный диаметр. Отсюда и из теоремы 2 следует справедливость теоремы 8.

6. Свойства, связанные с диаметром p-АТМ

Для матрицы $x = \|x_{i_1 \ldots i_p}\|_{n_1^p}$ многогранника $M(a^1, \ldots, a^p)$ порядка n_1^p введем множество
$$K(a^1, \ldots, a^p, x) = \{(i_1, \ldots, i_p) \in N_{n_1} \times \ldots \times N_{n_p} : x_{i_1 \ldots i_p} > 0\}.$$

Индукцией по p с помощью леммы 6 легко доказать следующую теорему.

Теорема 11. *Для того чтобы невырожденный p-АТМ $M(a^1, \ldots, a^p)$ порядка n_1^p, $n_1 \geqslant 3$, $n_2 \geqslant 4$, имел вершины x^1 и x^2, для которых*
$$K(a^1, \ldots, a^p, x^1) \cap K(a^1, \ldots, a^p, x^2) = \varnothing, \tag{38}$$

достаточно, чтобы существовала пара индексов $l, q \in N_p$, $l \neq q$, для которой КТМ $M(a^l, a^q)$ порядка $n_l \times n_q$ имеет вершины x и y, для которых

$$K(a^l, a^q, x) \cap K(a^l, a^q, y) = \varnothing.$$

В качестве следствия из этой теоремы в силу леммы 1 из [19] получаем следующий известный результат.

Следствие 5 ([19]). *Максимальный диаметр невырожденного p-АТМ порядка n_1^p, $n_1 \geqslant 3$, $n_2 \geqslant 4$, не меньше*

$$\sum_{s=1}^{p} n_s - p + 1.$$

На основании теоремы 9 теорему 11 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 12. *Для того чтобы невырожденный p-АТМ $M(a^1, \ldots, a^p)$ порядка n_1^p, $n_1 \geqslant 3$, $n_2 \geqslant 4$, имел вершины x и y, для которых выполняется* (38), *достаточно, чтобы существовали пара индексов $l, q \in N_p$, $l \neq q$, и собственные подмножества $I \subset N_{n_l}$ и $J \subset N_{n_q}$, удовлетворяющие условиям*

$$a_1^l < \min\left\{\sum_{i \in J} a_i^q, \sum_{i \in N_{n_q} \setminus J} a_i^q\right\},$$
$$a_1^q < \min\left\{\sum_{i \in I} a_i^l, \sum_{i \in N_{n_l} \setminus I} a_i^l\right\}. \qquad (39)$$

Из теоремы 12 в силу леммы 1 из [19] вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Для того чтобы невырожденный p-АТМ $M(a^1, \ldots, a^p)$ порядка n_1^p, $n_1 \geqslant 3$, $n_2 \geqslant 4$, имел диаметр, не меньший*

$$\sum_{s=1}^{p} n_s - p + 1,$$

достаточно, чтобы существовали пара индексов $l, q \in N_p$,$l \neq q$, и собственные подмножества $I \subset N_{n_l}$ и $J \subset N_{n_q}$, удовлетворяющие условию (39).

Из теоремы 8 и следствия 6 получаем следующий результат.

Теорема 13. *Почти все p-АТМ порядка n_1^p имеют диаметр, не меньший*

$$\sum_{s=1}^{p} n_s - p + 1.$$

Список литературы

1. Bolker E. D. Transportation polytopes. *J. Comb. Theory* (1972) **13**, 251–262.
2. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. *Многогранники, графы, оптимизация.* Наука, Москва, 1981.
3. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. О некоторых классах транспортных многогранников. *Докл. АН СССР* (1978) **241**, №3, 532–535.
4. Крачковский А. П. Об одной асимптотической задаче Болкера. *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук* (1979), №2, 118–120.
5. Емеличев В. А., Крачковский А. П. Асимптотика транспортных многогранников. *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук* (1978) №4, 116–118.
6. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. Транспортные многогранники с максимальным числом k-граней. *Докл. АН СССР* (1985) **282**, №4, 784–788.
7. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. О разрешимости транспортных задач с запретами. *Кибернетика* (1987), №1, 42–46.
8. Емеличев В. А., Кравцов М. К. Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач. *Дискретная математика* (1991) **3**, №2, 3–24.
9. Mouldon J. G. Random division of an interval. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* (1951) **47**, 331–336.
10. Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей.* Наука, Москва, 1987.
11. Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ,* т.1. Мир, Москва, 1976.
12. Кравцов М. К. Полиэдральные аспекты многоиндексных транспортных задач с аксиальными суммами. *Докл. АН СССР* (1990) **315**, №6, 1298–1302.
13. Klee V., Kleinschmidt P. The d-step conjecture and its relatives. *Math. Oper. Res.* (1987) **12**, №4, 718–755.
14. Padberg M., Rao M. The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two. *Math. Program.* (1974) **7**, №1, 32–45.
15. Balinski M. L. The Hirsch conjecture for dual transportation polyhedra. *Math. Oper. Res.* (1984) **9**, №4, 629–633.
16. Rispoli F. J. The monotonic diameter of the perfect matching and shortest path polytopes. *Oper. Res. Lett.* (1992) **12**, №1, 23–27.
17. Кравцов М. К. Диаметр и радиус транспортного многогранника. *Докл. АН СССР* (1983) **270**, №2, 278–281.
18. Кравцов М. К. Доказательство гипотезы о максимальном диаметре для транспортного многогранника. *Кибернетика* (1985) №4, 79–82.
19. Кравцов М. К. Диаметр и радиус многоиндексного аксиального транспортного многогранника. *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук* (1991) №6, 103–106.

Статья поступила 22.05.1997.