ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 6 Май 1966 Июнь № 3

УДК 518 : 517.944/.947

МЕТОД СЕТОК ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Е. А. ВОЛКОВ

(Москва)

Ниже предлагается метод приближенного решения на полярной сетке внешней задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа. Применение полярной сетки, видимо, наиболее естественно для решения внешних краевых задач и задач в неограниченных областях. Хотя внешняя задача Дирихле, как известно (см. [1]), сводится к внутренней задаче Дирихле и мы в ряде случаев будем использовать это свойство, но разностные уравнения для приближенного решения будем строить непосредственно на сетке, расположенной в заданной неограниченной области. Используемая полярная сетка с числом узлов порядка $h^{-2}\ln h^{-1}$ заполняет круг радиуса порядка h^{-1}, где h — безразмерный шаг сетки по радиусу. Соотношение между h и шагом по углу выбрано так, что при $h \to 0$ ячейки сетки стремятся к квадратам и при любом конечном h разностные уравнения во внутренних узлах записываются точно так же, как и на квадратной сетке. Т. е. искомое неизвестное равняется среднему арифметическому значению неизвестных в четырех ближайших узлах. При предположении, что решение уравнения Лапласа обладает ограниченными вторыми производными на замкнутой области, погрешность приближенного решения имеет порядок $h^2(1+|\ln h|)$. В заключение дается метод построения вспомогательной системы разностных уравнений со свободными членами, выражающимися через известные величины, решение которой мажорирует погрешность приближенного решения. Подобный способ оценки погрешности для случая внутренней задачи Дирихле изложен в [2], [3]. Заметим, что в [4] вопрос решения внешней задачи Дирихле методом сеток относится к числу проблематичных. Приближенное решение этой задачи методом потенциалов предложено в [5].

§ 1. Разностные уравнения

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ на } G, \qquad u = \varphi \text{ на } \gamma, \tag{1.1}$$

где γ — замкнутая кривая с непрерывной кривизной $k(s)$, обладающей кусочно-непрерывной ограниченной производной $k^{(1)}(s)$ (s — дуга γ); φ — дважды дифференцируемая функция дуги γ, имеющая кусочно-непрерывную третью производную; G — область, ограниченная кривой γ и содержащая бесконечно удаленную точку. Предполагается, что существует окружность радиуса $\rho > 0$, которой можно коснуться любой точки γ так, что круг, ограниченный данной окружностью, целиком принадлежит G. Обозначим через $\bar{\rho}$ верхнюю грань радиусов всех окружностей, обладающих указанным свойством. Как известно, существует единственное ограниченное на бесконечности решение задачи (1.1) (см. [1]).

Возьмем окружность S_0 радиуса $r_0 > 0$ с центром в точке O, ограничивающую круг, который не имеет общих точек с G. Будем считать, что точка O совпадает с началом прямоугольной системы координат. Пусть

$$R_0 = \max_{P \in \gamma} \rho(O, P),$$

где $\rho(O, P)$ — расстояние между точкой O и точкой $P \in \gamma$. Построим полярную сетку. Проведем из точки O семейство m лучей, образующих с осью x углы $\theta = \theta_\mu = \mu\beta$, где $\beta = 2\pi / m$, $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, и построим семейство окружностей S_k с центром в точке O, имеющих радиусы $r_k = r_{k-1}(1 + h)$, где $k = 1, 2, \ldots, N$,

$$h = 2\left(\sqrt{1 + \sin^2\frac{\beta}{2}} + \sin\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}, \tag{1.2}$$

$$N = \left[\frac{1}{\ln(1+h)} \ln\frac{R_0 c}{r_0 h}\right] + 1, \tag{1.3}$$

c — некоторая фиксированная положительная постоянная. Будем предполагать, что $r_{N-1} \geqslant R_0$. Точки пересечения лучей и окружностей S_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, назовем узлами сетки. Множество узлов, лежащих внутри окружности S_N и обладающих тем свойством, что отрезки прямых, соединяющих эти узлы с их четырьмя соседними узлами, принадлежат $\bar{G}$, обозначим через G_h. Множество узлов, лежащих на S_N, обозначим через G_h^* и, наконец, множество остальных узлов, принадлежащих $\bar{G}$, обозначим через γ_h.

Введем оператор усреднения A:

$$Au(r, \theta) \equiv \frac{u(r(1+h), \theta) + u(r/(1+h), \theta) + u(r, \theta+\beta) + u(r, \theta-\beta)}{4}.$$

На G_h^* построим оператор A^*:

$$A^* u(r_N, \theta) \equiv \frac{u(r_{N-1}, \theta)}{1+h} + \frac{h}{m(1+h)} \sum_{\mu=0}^{m-1} u(r_N, \theta_\mu),$$

и на γ_h введем оператор $\overset{*}{I}$:

$$\overset{*}{I} u \equiv \frac{\delta}{1+\delta} u_1,$$

где u_1 — значение u в соседнем узле P_1, расположенном на расстоянии, не превышающем rh, от данного узла $P = P(r, \theta)$; δ — отношение расстояния от точки P до точки P_0, лежащей на пересечении γ и прямой, проходящей через узлы P_1 и P, к длине отрезка $\overline{P_1 P}$. Предполагается, что $P \in \overline{P_1 P_0} \subset \bar{G}$, $\delta < 2$.

Рассмотрим систему разностных уравнений, аппроксимирующую задачу (1.1):

$$u_h = Au_h \quad \text{на} \quad G_h, \qquad u_h = A^* u_h \quad \text{на} \quad G_h^*,$$
$$u_h = Iu_h + \frac{\varphi_0}{1+\delta} \quad \text{на} \quad \gamma_h, \tag{1.4}$$

где φ_0 — значение φ в указанной выше точке P_0. Очевидно, для системы (1.4) имеет место принцип максимума (см. [6]), в силу которого она имеет единственное решение. Для нахождения решения системы (1.4) можно применить метод итераций.

§ 2. Исследование скорости сходимости приближенного решения

Пусть

$$U^n = \sup_{0<\alpha<\pi} \sup_{G} \left| \frac{\partial^n u}{\partial l_\alpha{}^n} \right|, \qquad n = 1,\, 2,$$

где $\partial / \partial l_\alpha$ — оператор дифференцирования в направлении прямой, образующей угол α с осью x. Осуществим обратное преобразование радиусов-векторов относительно окружности S_0. Тогда каждая точка (r, θ), расположенная вне окружности S_0, перейдет во внутреннюю точку $(\tilde r, \theta)$, где

$$\tilde r = \frac{r_0{}^2}{r}. \tag{2.1}$$

Обозначим образы G и γ через $\tilde G$ и $\tilde\gamma$ и рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле

$$\Delta \tilde u = 0 \text{ на } \tilde G, \qquad \tilde u = \tilde\varphi \text{ на } \tilde\gamma, \tag{2.2}$$

где $\tilde\varphi(\tilde r, \theta) = \varphi(r, \theta)$. Очевидно, между ограниченными решениями задач (1.1) и (2.2) существует связь:

$$\tilde u(\tilde r, \theta) = u(r, \theta). \tag{2.3}$$

Пусть

$$\tilde U^n = \sup_{0<\alpha<\pi} \sup_{\tilde G} \left| \frac{\partial^n \tilde u}{\partial l_\alpha{}^n} \right|, \qquad n = 1,\, 2.$$

В силу (2.1) — (2.3) имеем

$$\tilde U^1 \leqslant U^1 \frac{R_0{}^2}{r_0{}^2}, \qquad \tilde U^2 \leqslant U^2 \frac{R_0{}^4}{r_0{}^4} + 2U^1 \frac{R_0{}^3}{r_0{}^4}. \tag{2.4}$$

Погрешность $e_h = u_h - u$ удовлетворяет системе разностных уравнений

$$e_h = Ae_h + \xi_h \text{ на } G_h, \qquad e_h = A^* e_h + \xi_h{}^* \text{ на } G_h^*,$$
$$e_h = \overset{*}{I} e_h + \eta_h \text{ на } \gamma_h. \tag{2.5}$$

Имеем

$$|\xi_h(r, \theta)| = |u(r, \theta) - Au(r, \theta)| = |\tilde u(\tilde r, \theta) - A\tilde u(\tilde r, \theta)|, \tag{2.6}$$

$$|\xi_h{}^*(r_N, \theta)| = \tag{2.7}$$

$$= \left| \tilde u\left(\frac{r_0{}^2}{r_N}, \theta\right) - \frac{1}{1+h} \tilde u\left(\frac{r_0{}^2}{r_{N-1}}, \theta\right) - \frac{h}{m(1+h)} \sum_{\mu=0}^{m-1} \tilde u\left(\frac{r_0{}^2}{r_N}, \theta_\mu\right) \right|,$$

$$|\eta_h(r,\theta)| \leqslant \frac{h^2r^2\delta}{2}U^2 \qquad ((r,\theta)\in\gamma_h). \tag{2.8}$$

Пусть $E(\tilde r,\theta)$ — множество точек, лежащих внутри отрезков прямых, соединяющих точку $(\tilde r,\theta)$ с точками $(\tilde r(1+h),\theta)$, $(\tilde r/(1+h),\theta)$, $(\tilde r,\theta+\beta)$, $(\tilde r,\theta-\beta)$,

$$\tilde U^n(\tilde r,\theta)=\sup_{0<\alpha<\pi}\left|\frac{\partial^n\tilde u(\tilde r,\theta)}{\partial l_\alpha{}^n}\right|, \qquad n=1,2,\ldots,$$

$$\tilde U^4_{E(\tilde r,\theta)}=\sup_{(r',\theta')\in E(\tilde r,\theta)}\tilde U^4(r',\theta').$$

Если $(r,\theta)\in G_h$, $E(\tilde r,\theta)\subset\tilde G$, то, используя (2.6) и формулу Тейлора и учитывая гармоничность $\tilde u$, нетрудно получить неравенство

$$|\xi_h(r,\theta)| \leqslant \frac{h^4\tilde r^2}{4}(\tilde U^2(\tilde r,\theta)+\tilde r\tilde U^3(\tilde r,\theta))+\frac{h^4\tilde r^4}{24}\tilde U^4_{E(\tilde r,\theta)}. \tag{2.9}$$

Кроме того, очевидно, для всех $(r,\theta)\in G_h$

$$|\xi_h(r,\theta)| \leqslant \frac{h^2r^2}{2}U^2. \tag{2.10}$$

В силу (2.7), (1.3) и (2.1) имеем

$$|\xi_h{}^*(r_N,\theta)| \leqslant \left|\tilde u\left(\frac{r_0^2}{r_N}\ \theta\right)-\frac{1}{1+h}\tilde u\left(\frac{r_0^2}{r_{N-1}},\theta\right)-\frac{h\tilde u(0,\theta)}{1+h}\right| + \tag{2.11}$$
$$+\frac{h}{1+h}\left|\tilde u(0,\theta)-\frac{1}{m}\sum_{\mu=0}^{m-1}\tilde u\left(\frac{r_0^2}{r_N},\theta_\mu\right)\right| \leqslant \frac{h^3r_0^4}{c^2R_0^2}\tilde U^2.$$

Обозначим через $\tilde\rho=\tilde\rho(\tilde r,\theta)$ расстояние между $E(\tilde r,\theta)$ и $\tilde\gamma$. Из оценок производных гармонических функций внутри области, данных в [7], следуют неравенства

$$\tilde U^3(\tilde r,\theta)\leqslant\frac{4\tilde U^2}{\pi\tilde\rho}, \qquad \tilde U^4_{E(\tilde r,\theta)}\leqslant\frac{8\tilde U^2}{\pi\tilde\rho^2}. \tag{2.12}$$

Для дальнейшего вывода оценки погрешности e_h применим метод [8]. Рассмотрим функцию

$$\psi=\ln\left(1+h^2-p^2\left(\frac{r_0^2x}{x^2+y^2},\frac{r_0^2y}{x^2+y^2}\right)-q^2\left(\frac{r_0^2x}{x^2+y^2},\frac{r_0^2y}{x^2+y^2}\right)\right)-\ln h^2, \tag{2.13}$$

где $p(x,y)$ и $q(x,y)$ — действительная и мнимая части некоторой функции $w=p(x,y)+iq(x,y)$, отображающей конформно область $\tilde C$ на единичный круг и переводящей точку O в центр круга. При сделанных нами предположениях относительно γ имеем на $\tilde G$ (см. [9], п. 29)

$$0<a<\left|\frac{dw}{dz}\right|<b<\infty,$$

где $z=x+iy$, a и b — постоянные. Кроме того, функции $p(x,y)$ и $q(x,y)$ обладают на замыкании $\tilde G$ непрерывными вторыми производными, удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем $\lambda>0$, что следует из

[9], п. 43, и из [10]. Используя перечисленные свойства функции w, а также (1.3), (2.1), (2.4), (2.8) — (2.12), элементарными подсчетами можно установить, что существуют число $h_0 > 0$ и некоторые не зависящие от h и u положительные постоянные c_1, c_2, c_3 и c_4 такие, что при всех $h \leqslant h_0$ имеют место неравенства

$$
\left.\begin{aligned}
&|\psi - A\psi| < c_1 \ln h^{-1}, && \rho < c_2 h R_0,\\
&\psi - A\psi > c_3 h^2 \frac{r_0^2}{\rho^2}, && c_2 h \leqslant \frac{\rho}{R_0} < c_4,\\
&\psi - A\psi > c_3 h^2 \frac{\tilde{r}^2}{r_0^2}, && c_4 R_0 \leqslant \rho < r_N,\\
&\psi - A^*\psi \geqslant 0, && |\psi - \overset{*}{I}\psi| < c_1 \ln h^{-1},\\
&|\xi_h| \leqslant c_1 h^2 r_0 U^2, && \rho < c_2 h R_0,\\
&|\xi_h| \leqslant c_1 h^4 \frac{r_0^4}{\rho^2}\left(\frac{U^1}{R_0} + U^2\right), && c_2 h \leqslant \frac{\rho}{R_0} < c_4,\\
&|\xi_h| \leqslant c_1 h^4 \tilde{r}^2 \left(\frac{U^1}{R_0} + U^2\right), && c_4 R_0 \leqslant \rho < r_N,\\
&|\xi_h^*| \leqslant c_1 h^3 r_0^2 \left(\frac{U^1}{R} + U^2\right), && |\eta_h| \leqslant c_1 h^2 r_0^2 U^2,
\end{aligned}\right\} \tag{2.14}
$$

где $\rho = \rho(r, \theta)$ — расстояние от узла (r, θ) до γ.

Пусть задана функция ψ_1 такая, что $\psi_1|_\gamma = 0$,

$$
\psi_1(r_k, \theta) = c_1 h^3 r_0^2 \left(\frac{U^1}{R_0} + U^2\right)(1 + h)(1 + k), \tag{2.15}
$$

где $(r_k, \theta) \in G_h \cup G_h^* \cup \gamma_h \setminus \gamma$. Очевидно,

$$
\left.\begin{aligned}
&\psi_1 - A\psi_1 = 0 \text{ на } G_h,\ \ \psi_1 - A^*\psi_1 = c_1 h^3 r_0^2 \left(\frac{U^1}{R_0} + U^2\right),\\
&\psi_1 - \overset{*}{I}\psi_1 \geqslant 0 \text{ на } \gamma_h.
\end{aligned}\right\} \tag{2.16}
$$

Рассмотрим функцию ψ_2, являющуюся решением системы разностных уравнений

$$
\left.\begin{aligned}
&\psi_2 = A\psi_2 + \bar{\xi}_h \text{ на } G_h, \qquad \psi_2 = A^*\psi_2 \text{ на } G_h^*,\\
&\psi_2 = \overset{*}{I}\psi_2 + \bar{\eta}_h \text{ на } \gamma_h,
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}
$$

где

$$
\bar{\xi}_h = \begin{cases} c_1 h^2 r_0^2 \left(U^2 + \dfrac{c_1}{c_3}\left(\dfrac{U^1}{R_0} + U^2\right)\ln h^{-1}\right), & \rho < c_2 h R_0,\\ 0, & c_2 h R_0 \leqslant \rho < r_N, \end{cases}
$$

$$
\bar{\eta}_h = c_1 h^2 r_0^2 \left(U^2 + \frac{c_1}{c_3}\left(\frac{U^1}{R_0} + U^2\right)\ln h^{-1}\right).
$$

Так как свободные члены в (2.17) могут быть отличны от нуля только в узлах, расположенных на конечном числе шагов от γ_h, которое ограничено постоянной, не зависящей от h и u, то, как нетрудно показать (см. [11]), имеет место неравенство

$$|\psi_2| \leqslant c_5 \left(\frac{U^1}{R_0} + U^2 \right) h^2 \ln h^{-1}, \tag{2.18}$$

где c_5 — постоянная, не зависящая от h и u.

Из (2.5), (2.14)—(2.17) и теоремы VI из [6], стр. 254, следует, что

$$|e_h| \leqslant \frac{c_1}{c_3} h^2 r_0^2 \left(\frac{U^1}{R_0} + U^2 \right) \psi + \psi_1 + \psi_2,$$

т. е. в силу (2.13), (1.3), (2.15) и (2.18)

$$|u_h - u| \leqslant c_6 h^2 (1 + |\ln h|) \left(\frac{U^1}{R_0} + U^2 \right),$$

где c_6 — некоторая постоянная, не зависящая от h и u.

При сделанных в § 1 предположениях относительно γ и φ величины U^1 и U^2 ограничены, что следует из оценок производных решения задачи Дирихле на границе области, данных в [10], оценок производных внутри области, полученных в [7], § 3, и принципа максимума. Таким образом доказана

Теорема 1. *Решение u_h системы разностных уравнений* (1.4) *стремится на сетке при $h \to 0$ к решению u задачи* (1.1) *со скоростью* $h^2(1 + |\ln h|)$.

§ 3. Метод оценки погрешности через известные величины

Согласно оценкам [7] производные u любого порядка стремятся к нулю при $r \to \infty$. Следовательно, максимум их модуля достигается на γ, и поэтому мы можем воспользоваться оценками U^1 и U^2 через известные величины, данными в [2].

Пусть знак кривизны $k(s)$ кривой γ считается положительным, если центр кривизны расположен на нормали, направленной в сторону G. Введем обозначения

$$\overset{*}{U}{}^0 = (\max_{\gamma} \varphi - \min_{\gamma} \varphi)/2,$$

$$\Phi^n = \sup_{\gamma'} |\varphi^{(n)}(s)|, \qquad n = 1, 2, 3,$$

$$\overset{*}{r} = \frac{1}{\max\limits_{\gamma} |k(s)|}, \qquad R = \frac{1}{|\min\limits_{\gamma} k(s)|},$$

$$K^1 = \sup_{\gamma'} |k^{(1)}(s)|,$$

где γ' — множество точек непрерывности функции, стоящей под знаком sup.

Имеем (см. [2])

$$U^1 \leqslant \overset{*}{U}{}^1, \qquad U^2 \leqslant \overset{*}{U}{}^2, \tag{3.1}$$

где

$$\overset{*}{U}{}^1 = \inf_{0<\rho<\bar\rho} \inf_{0<\theta^*<\bar\theta} \frac{BC + \sqrt{B^2C^2 + (1-B^2)(C^2+D^2)}}{1-B^2},$$

$$B = \frac{\varkappa\theta^*}{\pi}, \qquad D = \Phi^1,$$

$$C = \frac{2\overset{*}{U}{}^0}{\pi\rho}\operatorname{ctg}\frac{\theta^*}{2} + \frac{\overset{*}{r}{}^2\sigma^2}{\pi\rho}\theta^*\left(\Phi^2 + \frac{\Phi^1\sigma}{6\overset{*}{r}}\theta^*\right)\left(\frac{\theta^*}{2\sin(\theta^*/2)}\right)^2;$$

$$\overset{*}{U}{}^2 = \inf_{\substack{0<\rho<\bar\rho \\ -}} \inf_{\substack{0<\theta^*<\bar\theta \\ \bar B<1}} \frac{\bar B\bar C + \sqrt{\bar B^2\bar C^2 + (1-\bar B^2)(\bar C^2+\bar D^2)}}{1-\bar B^2}$$

$$\bar B = 4\frac{\varkappa\sigma\overset{*}{r}}{\pi\rho}\left(\sin\frac{\theta^*}{2} + \tau\frac{\theta^{*3}}{144}\right), \qquad \bar D = \Phi^2 + \frac{\overset{*}{U}{}^1}{\overset{*}{r}}.$$

$$\bar C = \theta^*\frac{2\overset{*}{r}\sigma^3}{\pi\rho^2}\left[\frac{\Phi^1 + \Phi^3\overset{*}{r}{}^2 + K^1\overset{*}{U}{}^1\overset{*}{r}{}^2}{3} + \frac{K^1\Phi^1\overset{*}{r}{}^2 + 7\Phi^2\overset{*}{r} + 8\overset{*}{U}{}^1}{24}\sigma\theta^* + \right.$$

$$\left. + \frac{K^1\overset{*}{r}{}^2(\Phi^2\overset{*}{r} + \overset{*}{U}{}^1)}{60}(\sigma\theta^*)^2 + \frac{\Phi^2\overset{*}{r} + \overset{*}{U}{}^1}{480}(\sigma\theta^*)^3\right] +$$

$$+ 2\frac{\Phi^2\overset{*}{r} + \overset{*}{U}{}^1}{\pi\overset{*}{r}}\eta\varkappa\sin^2\frac{\theta^*}{2} + \frac{\overset{*}{U}{}^0}{\pi\rho^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\theta^*}{2} + \frac{\Phi^1}{\pi\rho}\left(\theta^* - \pi + 2\operatorname{ctg}\frac{\theta^*}{2}\right),$$

$\bar\rho$ определено в § 1,

$$\bar\theta = \begin{cases} \pi/2, & \rho \leqslant \overset{*}{r}, \\ \arcsin(\overset{*}{r}/\rho), & \rho > \overset{*}{r}, \end{cases}$$

$$\varkappa = \begin{cases} 1 + \rho/R, & \rho \leqslant R, \\ 1 + \dfrac{R - \sqrt{R^2 - \rho^2\sin^2\theta^*}}{\rho(1-\cos\theta^*)}, & \rho > R, \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \rho/\overset{*}{r}, & \rho \leqslant \overset{*}{r}, \\ \dfrac{\arcsin((\rho\sin\theta^*)/\overset{*}{r})}{\theta^*}, & \rho > \overset{*}{r}, \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} 0, & 2\rho \leqslant R, \\ 1, & 2\rho > R, \end{cases} \qquad \eta = \begin{cases} 1, & \rho \leqslant \overset{*}{r}, \\ \dfrac{\overset{*}{r} - \sqrt{\overset{*}{r}{}^2 - \rho^2\sin^2\theta^*}}{\rho(1-\cos\theta^*)}, & \rho > \overset{*}{r}. \end{cases}$$

Кроме того, в силу (2.4) и (3.1)

$$\tilde U^1 \leqslant \overset{*}{\tilde U}{}^1 = \overset{*}{U}{}^1\frac{R_0^2}{r_0^2}, \qquad \tilde U^2 \leqslant \overset{*}{\tilde U}{}^2 = \overset{*}{U}{}^2\frac{R_0^4}{r_0^4} + 2\overset{*}{U}{}^1\frac{R_0^3}{r_0^4}. \tag{3.2}$$

Пусть $(r,\theta)\in G_h$; ρ_0 — расстояние от точки (r,θ) до γ; ρ_j, $j = 1, 2, 3, 4$,— расстояние между γ и отрезком прямой, соединяющим точки (r,θ) и $\left(r(1+h)^{\sin(j\pi/2)},\quad \theta+\beta\cos\frac{j\pi}{2}\right)$;

$$\tilde{\rho}_j = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{\rho_j r_0^2}{r^2(1+h)^2},\quad \dfrac{r_0^2}{R_0}-\dfrac{r_0^2(1+h)}{r}\right\}, & \min\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\rho_k \geqslant rh, \\ 0, & \min\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\rho_k < rh. \end{cases}$$

Следуя [2], зададим на G_h функцию

$$w = w(r,\theta) = \min\left\{\frac{h^2r^2}{2}\overset{*}{U}{}^2,\ \chi,\ \tilde{\chi}\right\}, \tag{3.3}$$

где

$$\chi = \omega+\chi_1+\chi_2,$$

$$\omega = \frac{h^4r^2}{4(1+h)^2}\min\{\overset{*}{U}{}^2,\ \Psi^2(\rho_0)\},$$

$$\chi_k = \frac{r^3}{8}\min\left\{\frac{h^3}{3}\sum_{i=0}^{1}\Psi^3(\rho_{k+2i}),\ h^4\left(\Psi^3(\rho_0)+\frac{r}{12}\sum_{i=0}^{1}\Psi^4(\rho_{k+2i})\right)\right\},$$

$$\Psi^p(\rho) = \min\{\Psi_0^p(\rho),\ \Psi_1^p(\rho)\},$$

$$\Psi_\nu^p(\rho) = \frac{(p-\nu)!\,4}{\pi\rho^{p-\nu}}\times\begin{cases} \dfrac{\rho}{p-\nu}\overset{*}{U}{}^{\nu+1}, & \overset{*}{U}{}^{\nu+1}\dfrac{\pi\rho}{p-\nu}\leqslant 2\overset{*}{U}{}^{\nu}, \\ \left(\dfrac{\rho}{p-\nu}\overset{*}{U}{}^{\nu+1}q(\mu)+\overset{*}{U}{}^{\nu}\cos\mu\right), & \overset{*}{U}{}^{\nu+1}\dfrac{\pi\rho}{p-\nu}>2\overset{*}{U}{}^{\nu}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\mu = \frac{\overset{*}{U}{}^{\nu}(p-\nu)}{\overset{*}{U}{}^{\nu+1}\rho},\qquad q(\mu)=\sin\mu-\mu\cos\mu,$$

$\tilde{\chi}$ — функция, вычисляемая по тем же формулам, что и χ, с той лишь разницей, что r, ρ_j $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$, $\overset{*}{U}{}^{\nu}$ $(\nu = 1, 2)$ заменяются, соответственно, на $\tilde{r}$, $\tilde{\rho}_j$, $\overset{*}{\tilde{U}}{}^{\nu}$.

В точках $(r,\theta)\in\gamma_h$ построим функцию

$$v = \frac{h^2r^2\delta}{2}\overset{*}{U}{}^2, \tag{3.5}$$

где δ — параметр на γ_h, определенный в § 1.

Пусть, наконец,

$$w^* = \frac{hr_0^4}{2r_N^2}\min\left\{\overset{*}{\tilde{U}}{}^2,\ \tilde{\Psi}^2\left(\frac{r_0^2}{R_0}-\frac{r_0^2}{r_{N-1}}\right)\right\}+\min_{2\leqslant p\leqslant m_0}\left\{\frac{h}{p!}\left(\frac{r_0^2}{r_N}\right)^p\tilde{\Psi}^p\left(\frac{r_0^2}{r_N}\right)\right\}, \tag{3.6}$$

где $m_0 (2\leqslant m_0\leqslant m)$ — число, фиксируемое исходя из удобств вычислений; $\tilde{\Psi}^p(\rho)$ — функция, вычисляемая по тем же формулам, что и $\Psi^p(\rho)$, но с заменой $\overset{*}{U}{}^{\nu}$ $(\nu = 1, 2)$ на $\overset{*}{\tilde{U}}{}^{\nu}$.

Величина $\Psi_\nu^p(\rho)$ $(\nu = 0, 1)$, задаваемая формулой (3.4), является оценкой сверху модуля p-й $(p > \nu)$ производной гармонической функции u в точках, расположенных на расстоянии ρ от границы области (см. [2]), что легко устанавливается незначительным видоизменением метода [7] оценки производных, когда, кроме ограничения по максимуму на функцию, дополнительно накладывается ограничение по максимуму на ее первую производную. Поэтому, используя (2.6) — (2.8), (3.1) — (3.6) и формулу Тейлора и учитывая гармоничность u, нетрудно установить выполнение неравенств

$$|\xi_h| \leqslant w \text{ на } G_h, \qquad |\xi_h^*| \leqslant w^* \text{ на } G_h^*, \qquad |\eta_h| \leqslant v \text{ на } \gamma_h. \tag{3.7}$$

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\begin{gathered} \varepsilon_h = A\varepsilon_h + w \text{ на } G_h, \qquad \varepsilon_h = A^*\varepsilon_h + w^* \text{ на } G_h^*, \\ \varepsilon_h = \overset{*}{I}\varepsilon_h + v \text{ на } \gamma_h. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Из (2.5), (3.7) и теоремы VI из [6], стр. 254, вытекает

Теорема 2. *В каждой точке на* $G_h \cup G_h^* \cup \gamma_h$ *имеет место неравенство*

$$|u_h - u| \leqslant \varepsilon_h,$$

где u *— решение задачи* (1.1), u_h *и* ε_h *— решения систем разностных уравнений* (1.4) *и* (3.8).

Замечание. Методом, изложенным в § 2, можно установить, что решение ε_h системы разностных уравнений (3.8) имеет порядок $O(h^2(1 + |\ln h|))$.

Поступила в редакцию
6.07.1965

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
2. Е. А. Волков. Получение оценки погрешности численного решения задачи Дирихле через известные величины. В сб. «Численные методы решения задач матем. физ.» М., Наука, 1966, 5—17.
3. Е. А. Волков. Эффективные оценки погрешности решений методом сеток краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и некоторых треугольниках. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966. 74.
4. D. Greenspan. Introductory numerical analysis of elliptic boundary value problems. New York — Evanston — London. Harper and Row Publs, 1965.
5. В. К. Власов, А. Б. Бакушинский. Метод потенциалов и численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 574—580.
6. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Физматгиз, 1962.
7. Е. А. Волков. К вопросу о решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В сб. «Вычисл. матем.» № 1. М., Изд-во АН СССР, 1957, 34—61.
8. Е. А. Волков. О методе сеток для краевой задачи с косой и нормальной производной. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 4, 607—621.
9. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
10. O. D. Kllog. On the derivatives of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc., 1931, 33, № 2, 486—510.
11. Е. А. Волков. Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков. II. Дифференциальные уравнения, 1965, 1, № 8, 1070—1084.