А. А. Жукова, А. В. Шутов, О функции распределения остаточного члена на множествах ограниченного остатка, *Чебышевский сб.*, 2016, том 17, выпуск 1, 90–107

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.43

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА НА МНОЖЕСТВАХ ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА[1]

А. А. Жукова, А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

Множества ограниченного остатка представляют собой множества, для которых остаточный член многомерной проблемы распределения дробных долей линейной функции ограничен константой, не зависящей от числа точек. Такие множества впервые были введены Гекке и далее рассматривались Эрдешем, Кестеном, Фюрстенбергом, Петерсеном, Сюсом, Лиарде и другими математиками. В настоящее время в одномерном случае известно полное описание интервалов ограниченного остатка, а также точные оценки остаточного члена в случае таких интервалов. Также получен ряд более тонких результатов, включая точные формулы для максимума и минимума остаточного члена, описание остаточного члена как кусочно-линейной функции, немонотонные оценки, вычисление среднего значения, а также оценки скорости достижения точных границ и т.д.

В случае высших размерностей в настоящее время известны лишь отдельные примеры множеств ограниченного остатка. В частности, в последние годы В. Г. Журавлевым, А. В. Шутовым и А. А. Абросимовой были предложены новые конструкции семейств многомерных множеств ограниченного остатка, основанные на использовании перекладывающихся разбиений тора. Для введенных множеств удалось не только доказать ограниченность остаточного члена, но и вычислить его максимум, минимум, а также среднее значение. В настоящей работе исследуется более тонкая характеристика остаточного члена на множествах ограниченного остатка, связанных с перекладывающимися разбиениями тора: его функция распределения.

Показано, что распределение остаточного члена является равномерным только в случае размерности 1. Найден алгоритм вычисления нормированной функции распределения и доказан ряд структурных результатов об этой функции. В случае ряда двумерных множеств ограниченного остатка соответствующая нормированная функция распределения вычислена в явном виде.

Ключевые слова: распределение по модулю 1, множества ограниченного остатка, перекладывающиеся разбиения тора, функция распределения.

Библиография: 31 название.

ON THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE REMAINDER TERM ON BOUNDED REMAINDER SETS

A. A. Zhukova, A. V. Shutov (Vladimir)

Abstract

Bounded remainder sets are sets with bounded by constant independent of the number of points remainder term of the multidimensional problem of the distribution of linear function fractional parts. These sets were introduced by Hecke and studied by Erdös, Kesten, Furstenberg, Petersen, Szusz, Liardet and others. Currently, in one-dimensional case full description of bounded remainder intervals and exact estimates of the remainder term on such intervals are known. Also some more precise results about the remainder term are established.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант №14-01-00360-а.

Among these results there are exact formulaes for maximum, minimum and average value of the remainder term, description of the remainder term as piecewise linear function, non-monotonic estimates for the remainder term, estimates of speed of attainment of the remainder term exact boundaries, etc...

In the higher dimensional cases only several examples of bounded remainder sets are known. Particularly, in recent years V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, and A. A. Abrosimova introduce a new construction of some families of multidimensional bounded remainder sets based on exchanged toric tilings. For introduced sets we are able not only to prove the boundness of the remainder term but to compute exact values of its minimum, maximum, and average. In the present work we study more subtle property of the remainder term on bounded remainder sets based on exchanged toric tilings: its distribution function.

It is proved that the remainder term is uniformly distributed only in one-dimensional case. An algorithm for computation of the normalized distribution function is given. Some structural results about this function are proved. For some two-dimensional families of bounded remainder sets their normalized distribution functions are clealy calculated.

Keywords: distribution modulo one, bounded remainder sets, exchanged toric tilings, distribution function.

Bibliography: 31 titles.

1. Введение

Пусть α — иррационально. Хорошо известно, что для любого a последовательность $(n\alpha + a)$ равномерно распределена по модулю 1 [1],[13], [15]. Данный результат можно записать следующим образом.

Пусть $I \subset [0;1)$ — некоторый интервал, $\{\cdot\}$ — дробная доля,

$$N(\alpha, a, n, I) = \sharp\{i : 0 \leq i < n : \{i\alpha + a\} \in I\},$$

— число точек последовательности $(n\alpha + a)$, попавших в интервал I,

$$r(\alpha, a, n, I) = N(\alpha, a, n, I) - n|I|$$

— остаточный член проблемы равномерного распределения. Тогда для любого иррационального α и любого интервала I справедлива асимптотическая формула

$$r(\alpha, a, n, I) = o(n).$$

Гекке [6] показал, что при дополнительном условии $|I| \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ справедлива существенно более сильная асимптотическая формула

$$r(\alpha, a, n, I) = O(1)$$

и получил первую эффективную оценку остаточного члена на таких интервалах. Рассматриваемые интервалы были названы интервалами ограниченного остатка. Кестеном [9] была доказана гипотеза Эрдеша [3] о том, что не существует одномерных интервалов ограниченного остатка, кроме обнаруженных Гекке. В дальнейшем появился еще целый ряд альтернативных доказательств данного результата, например [4], [8] и [11].

Кестен также высказал предположение о возможности существенного улучшения оценки Гекке. Данная задача оказалась более сложной и получила свое окончательное решение в работах [30] (точные по порядку оценки) и [24] (алгоритм нахождения точного значения максимума и минимума остаточного члена). Альтеративный подход к оценкам остатка был также предложен в [20]. В дальнейшем был получен ряд более тонких результатов об остаточном члене проблемы распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка:

описание остаточного члена как кусочно-линейной функции [24], немонотонные оценки остаточного члена [27], вычисление среднего значения остаточного члена [20], оценка скорости достижения точных границ остаточного члена [28] и т.п.

В многомерном случае задача о множествах ограниченного остатка в настоящее время достаточно далека от своего решения. В большинстве работ речь идет исключительно о построении новых примеров многомерных множеств ограниченного остатка, чаще всего даже без указания эффективных границ для остатка ([5], [7], [10], [12], [14] и т.д.).

В последние годы был обнаружен новый класс многомерных множеств ограниченного остатка, в основе которого лежат так называемые перекладывающиеся разбиения тора [21]–[23], [25], [26], [29]. Для введенного класса множеств были получены не только эффективные оценки остаточного члена, но и разработаны методы вычисления его точных верхних и нижних границ, а также средних значений. Примеры таких вычислений для конкретных семейств множеств ограниченного остатка в размерности 2 и 3 можно найти в [17]–[19].

В настоящей работе рассматривается более тонкое свойство остаточного члена проблемы распределения дробных долей для множеств ограниченного остатка рассматриваемого типа: функция распределения остаточного члена. Основными результатами работы являются:

1) Инвариантность нормированной функции распределения остаточного члена относительно a;

2) Геометрическая формула для функции распределения остаточного члена;

3) Доказательство того, что в размерности $d \leq 3$, в случае полиэдральных множеств ограниченного остатка, нормированная функция распределения остаточного члена является кусочным многочленом степени не выше d;

4) Явное вычисление нормированной функции распределения остаточного члена для ряда двумерных множеств ограниченного остатка.

2. Перекладывающиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка

Многомерную задачу о множествах ограниченного остатка удобно переформулировать следующим образом.

Пусть L — некоторая решетка, v — иррациональный относительно решетки L вектор, то есть вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей (очевидно, что данное определение не зависит от выбора базиса). Отображение сдвига

$$S : x \to x + v \pmod{L}$$

переводит тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L$ в себя. Множество $X \in \mathbb{T}^d$ будем называть множеством ограниченного остатка, если

$$r(v, a, n, X) = O(1),$$

где

$$r(v, a, n, X) = \sharp\{k : 0 \leq i \leq n-1, S^i(a) \in X\} - n\frac{|X|}{\det L}.$$

Отметим, что в случае, когда множество X является полиэдром, данное определение не зависит от выбора точки a [31].

Множество T будем называть разверткой тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L$, если оно является фундаментальной областью решетки L, то есть

1) Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует точка $x' \in T$, такая, что $x \equiv x' \pmod{L}$.

2) Любые две точки x, $x' \in T$ не сравнимы по модулю решетки: $x \not\equiv x' \pmod{L}$.

Очевидно, что существует естественное взаимно-однозначное отображение $\iota : \mathbb{T}^d \to T$ между разверткой T и тором $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L$.

Рассмотрим теперь разбиение

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_d \tag{1}$$

d-мерного тора на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d,$$

где $T_i = \iota(\mathbb{T}_i)$.

Разбиение (1) будем называть перекладывающимся, если существуют векторы

$$v_0, v_1, \ldots, v_d$$

такие, что отображение $S^* : x \to x+v_j$, где $x \in T_j$, переводит множество T в себя и его действие на множестве T совпадает с действием, индуцированным сдвигом S, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^d \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \iota} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota} \\ T & \xrightarrow{S^*} & T \end{array}$$

коммутативна.

Справедлива следующая теорема [21], [26].

Теорема 1. *Множества $\mathbb{T}_j$, где $j = 0, 1, \ldots, d$, являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S.*

В дальнейшем не будем различать множества $\mathbb{T}_j$ и T_j, и отождествим сдвиг тора S и перекладывание развертки S^*. Пусть также

$$r_j(a, n) = r(v, a, n, \mathbb{T}_j).$$

Для получения более точных сведений о функциях $r_j(a, n)$ потребуется понятие обобщенной дробной доли [21], [26].

Из определения развертки T немедленно вытекает, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует единственная точка $x' \in T$ развертки, сравнимая с x по модулю решетки L. Определим функцию

$$Fr_T(x) = x', \quad x' \in T, \quad x \equiv x' \pmod L. \tag{2}$$

Функцию (2) будем называть обобщенной дробной долей.

Справедливы следующие результаты [21], [26].

Теорема 2. *Для остаточных членов $r_j(a, n)$ имеет место явная формула*

$$r_j(a, n) = (Fr_T(n\alpha + a) - Fr_T(a), e_j). \tag{3}$$

Здесь векторы $e_1, \ldots, e_d$ однозначно определяются из условия

$$(v_j - v_0, e_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

а $e_0 = -\sum\limits_{j=1}^{d} e_j$.

Теорема 3. *Пусть*

$$r_j^-(a) = \inf_n r_j(a,n),$$

$$r_j^+(a) = \sup_n r_j(a,n)$$

— точные нижняя и верхняя границы остаточного члена $r_j(a,n)$. Обозначим через π_j отображение ортогональной проекции на прямую, проходящую через начало координат и имеющую направляющий вектор e_j. Тогда

$$\begin{aligned} r_j^-(a) &= |e_j|(\inf_{x\in T} \pi_j(x) - \pi_j(a)),\\ r_j^+(a) &= |e_j|(\sup_{x\in T} \pi_j(x) - \pi_j(a)). \end{aligned} \tag{4}$$

3. Функция распределения остаточного члена

Последовательность остатков $r_j(a,n)$ естественно рассматривать как одномерную последовательность, сосредоточенную на отрезке $[r_j^-(a); r_j^+(a)]$. Введем функцию распределения остаточного члена

$$\rho_j(a,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\left\{i : 0 \le i < n, r_j(a,i) \in [r_j^-(a); x]\right\}}{n},$$

определенную на данном отрезке.

Рассмотрим также нормированную функцию распределения

$$\overline{\rho}_j(a,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\left\{i : 0 \le i < n, \frac{r_j(a,i)-r_j^-(a)}{r_j^+(a)-r_j^-(a)} \in [0; x]\right\}}{n},$$

определенную на отрезке $[0;1]$.

При этом справедливы равенства

$$\rho(a,x) = \overline{\rho}_j\left(a, \frac{x - r_j^-(a)}{r_j^+(a) - r_j^-(a)}\right),$$

$$\overline{\rho}_j(a,x) = \rho(a, (r_j^+(a) - r_j^-(a))x + r_j^-(a)).$$

Теорема 4. *Нормированная функция распределения $\overline{\rho}_j(a,x)$ не зависит от a.*

Доказательство. Поскольку $Fr_T(0) = 0$ и $\pi_j(0) = 0$, из формул (3) и (4) немедленно вытекают соотношения

$$r_j(a,i) = r_j(0,i) - (Fr_T(a), e_j), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} r_j^-(a) &= r_j^-(0) - |e_j|\pi_j(a),\\ r_j^+(a) &= r_j^+(0) - |e_j|\pi_j(a). \end{aligned} \tag{6}$$

Далее, поскольку

$$(x, e_j) = |e_j|\pi_j(x), \tag{7}$$

соотношение (5) легко переписать в виде

$$r_j(a,i) = r_j(0,i) - |e_j|\pi_j(a). \tag{8}$$

Подставляя равенства (6) и (8) в определение нормированной функции распределения $\overline{\rho}_j(a,x)$, видим, что неравенство

$$0 \le \frac{r_j(a,i) - r_j^-(a)}{r_j^+(a) - r_j^-(a)} \le x$$

преобразуется к виду

$$0 \le \frac{r_j(0,i) - r_j^-(0)}{r_j^+(0) - r_j^-(0)} \le x,$$

не зависящему от a, откуда и следует требуемый результат.

В силу доказанной теоремы 4 нормированную фунуцию распределения будем обозначать просто $\overline{\rho}_j(x)$.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении функции распределения остаточного члена. В силу теоремы 4 достаточно ограничится вычислением только $\rho_j(0,x)$.

Теорема 5. *Пусть*

$$T_x = \pi_j^{-1}\left(\left[\frac{r_j^-(a)}{|e_j|}; \frac{x}{|e_j|}\right]\right) \bigcap T.$$

Тогда справедливо равенство

$$\rho_j(0,x) = \frac{|T_x|}{|T|}. \tag{9}$$

Доказательство. Формулы (3) и (4) при $a = 0$ с учетом (7) и равенства $Fr_T(n\alpha) = S^n(0)$ можно переписать в виде

$$r_j(0,i) = |e_j|\pi_j(S^i(0)),$$

$$r_j^-(0) = |e_j| \inf_{x\in T} \pi_j(x),$$

$$r_j^+(0) = |e_j| \sup_{x\in T} \pi_j(x).$$

Тогда неравенство

$$r_j^-(a) \le r_j(0,i) \le x$$

из определения функции распределения $\rho_j(0,x)$ принимает вид

$$\frac{r_j^-(a)}{|e_j|} \le \pi_j(S^i(0)) \le \frac{x}{|e_j|},$$

что эквивалентно условию

$$S^i(0) \in T_x.$$

Таким образом, определение функции $\rho_j(0,x)$ принимает вид

$$\rho_j(0,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{i : 0 \le i < n, S^i(0) \in T_x\}}{n}.$$

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [16], в случае иррационального вектора v последовательность $(S^i(0))$ равномерно распределена на d-мерном торе, то есть последний предел равен $\frac{|T_x|}{|T|}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что последовательность $r_j(a,n)$ является равномерно распределенной тогда и только тогда, когда для нормированной функции распределения $\overline{\rho}_j(x)$ справедливо равенство $\overline{\rho}_j(x) = x$ при $x \in [0;1]$.

В случае $d=1$ с точностью до гомотетии имеем $L=\mathbb{Z}$, $T=[0;1)$ и $S: x\to x+\alpha \pmod 1$. Далее, с точностью до движения одномерного тора, единственное перекладывающееся разбиение имеет вид

$$[0;1)=[0;1-\alpha)\sqcup[1-\alpha;1).$$

При этом сдвигу S соответствует перекладывание

$$S^*(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x\in[0;1-\alpha);\\ x+\alpha-1; & x\in[1-\alpha;1).\end{cases}$$

В этом случае непосредственным вычислением доказывается, что последовательности $r_j(a,n)$, где $j=0,\,1$, являются равномерно распределенными по модулю 1.

Действительно, согласно определению

$$r(\alpha,a,n,I)=\sharp\{i:0\leqslant i<n:\{i\alpha+a\}\in I\}-n|I|,$$

где для случая $d=1$ в качестве I будем брать промежутки $[0;1-\alpha)$ и $[1-\alpha;1)$.

Для нахождения $\sharp\{i:0\leqslant i<n:\{i\alpha+a\}\in I\}$, где $I=[\{a_1\alpha\},\{a_2\alpha\})$, введем характеристическую функцию $\chi_I(x)=\{x-a_2\alpha\}-\{x-a_1\alpha\}+|I|$, такую что

$$\chi_I(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x\in I,\\ 0 & \text{при} \quad x\notin I.\end{cases}$$

Если в качестве I выбрать промежуток $[0;1-\alpha)$, то $a_1=0$, $a_2=-1$, $\chi_{[0;1-\alpha)}(x)=\{x+\alpha\}-\{x\}+1-\alpha$ и

$$\sharp\{i:0\leqslant i<n:\{i\alpha+a\}\in[0;1-\alpha)\}=\sum_{i=0}^{n-1}(\{(i+1)\alpha+a\}-\{i\alpha+a\}+1-\alpha)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{i\alpha+a\}-\sum_{i=0}^{n-1}\{i\alpha+a\}+n-n\alpha=\{n\alpha+a\}-\{a\}+n(1-\alpha).$$

В таком случае

$$r_0(a,n)=r\left(\alpha,a,n,[0;1-\alpha)\right)=\{n\alpha+a\}-\{a\}.$$

Если же в качестве I выбрать промежуток $[1-\alpha;1)$, то $a_1=-1$, $a_2=0$, $\chi_{[1-\alpha;1)}(x)=\{x\}-\{x+\alpha\}-\{x\}+\alpha$ и, рассуждая аналогично, получаем, что

$$r_1(a,n)=r\left(\alpha,a,n,[1-\alpha;1)\right)=\{a\}-\{n\alpha+a\}.$$

В силу теоремы Вейля последовательность $\{n\alpha\}$ равномерно распределена, следовательно, последовательности $r_0(a,n)$ и $r_1(a,n)$ являются равномерно распределенными по модулю 1.

Проведенные исследования позволяют предположить, что при $d>2$ равномерная распределенность больше не имеет места.

Гипотеза 1. *Пусть $d>2$ и $0\le j\le d$. Тогда последовательность $r_j(a,n)$, не является равномерно распределенной по модулю 1.*

Гипотеза 2. *Пусть $d>2$ и $0\le j\le d$. Предположим, что множество T является полиэдром. Тогда соответствующие нормированные функции распределения $\overline{\rho}_j(x)$ представляют собой кусочные многочлены степени d.*

Отметим, что равномерная распределенность в случае $d=1$ согласуется с гипотезой 2.

Теорема 6. *Гипотеза 2 справедлива при $d=2$ и $d=3$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 достаточно ограничится случаем $a = 0$. Более того, из теоремы 5 легко видеть, что достаточно доказать соответствующую гипотезу для $|T_x|$. Рассмотрим двумерный и трехмерный случаи по отдельности.

Пусть $d = 2$. Тогда T представляет собой многоугольник. Рассмотрим его триангуляцию

$$T = \triangle_1 \sqcup \triangle_2 \sqcup \ldots \sqcup \triangle_m$$

и введем функции

$$t_i(x) = |T_x \cap \triangle_i|.$$

Очевидно, что

$$|T_x| = \sum_{i=1}^{m} t_i(x),$$

и достаточно доказать, что функции t_i обладают требуемым свойством.

Далее, разобъем треугольник $\triangle_i$ на два треугольника $\triangle_i'$ и $\triangle_i''$, проведя через вершину этого треугольника прямую, ортогональную направлению проектирования e_j. При этом определим еще две функции $t_i'(x) = |T_x \cap \triangle_i'|$ и $t_i''(x) = |T_x \cap \triangle_i''|$, такие, что

$$t_i(x) = t_i'(x) + t_i''(x)$$

и гипотезу 2 достаточно доказать для функций t_i', t_i''.

Пусть τ_1, τ_2 — π_j-проекции вершин треугольника $\triangle_i'$ (поскольку одна из сторон этого треугольника ортогональна e_j таких проекций всего две). По построению, легко видеть, что эти проекции принадлежат множеству $\pi_j(V)$, где V – множество вершин многоугольника развертки T. Также очевидно, что $t_i'(x) = 0$ при $x \le \tau_1$ и $t_i'(x) = |\triangle_i'|$ при $x \ge \tau_2$. Далее заметим, что все множества $T_x \cap \triangle_i'$ представляют собой либо подобные треугольники, либо подобные трапеции, с коэффициентом подобия $\frac{x-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}$, поэтому

$$t_i'(x) = \left(\frac{x-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\right)^2 |\triangle_i'|$$

при $x \in (\tau_1; \tau_2)$, что и доказывает требуемый результат для функции t_i'. Доказательство в случае функции t_i'' проводится полностью аналогично.

Пусть теперь $d = 3$. Проведем через все вершины многогранника T плоскости, ортогональные направлению проектирования e_j. Получим разбиение многогранника

$$T = P_1 \sqcup P_2 \sqcup \ldots \sqcup P_m$$

и функции

$$p_i(x) = |T_x \cap P_i|,$$

такие, что

$$|T_x| = \sum_{i=1}^{m} p_i(x).$$

При этом достаточно доказать, что введенные функции p_i являются кусочно кубическими многочленами.

Заметим, что все вершины многогранника P_i лежат в двух параллельных плоскостях. Такие многогранники называются призматоидами и обладают рядом интересных свойств. В частности, известно [2], что если $S(h)$ — площадь сечения призматоида плоскостью, параллельной основаниям и отстоящей от одного из оснований на расстояние h, то $S(h)$ является квадратичной функцией от h.

По построению, множество π_j-проекций вершин многогранника P_i вновь принимает всего два значения τ_1, τ_2, причем эти значения принадлежат множеству $\pi_j(V)$ (V — множество вершин многогранника T). При этом $p_i(x) = 0$, если $x \leq \tau_1$, и $p_i(x) = |P_i|$, если $x \geq \tau_2$. При $x \in (\tau_1; \tau_2)$ имеем

$$p_i(x) = \int_0^{x-\tau_1} S(h)dh,$$

то есть $p_i(x)$ является кубическим многочленом от x на данном интервале.

Заметим, что фактически доказано более сильное утверждение.

Пусть $v_0 < v_1 < \ldots < v_k$ — различные π_j-проекции вершин развертки T. Тогда при $d \leq 3$ $|T_x|$ является многочленом степени не выше d от x на каждом из интервалов $(v_i; v_{i+1})$, где $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Данное утверждение очевидным образом переносится и на нормированную функцию распределения $\overline{\rho}_j(x)$.

4. Перекладывающиеся разбиения двумерного тора

В работах А. А. Абросимовой [17], [18] построено семейство разверток двумерного тора $T^2 = T^2(c)$. Для каждой из разверток указан вектор α, с помощью которого строится разбиение развертки на перекладывающиеся части, и найдены вектора e_1, e_2, e_0, такие что $e_1 + e_2 + e_0 = 0$, необходимые для получения остаточных членов $r_j(a, n)$, где $j = 0, 1, 2$.

Опишем семейство разверток двумерного тора, построенного в работах [17], [18].

Пусть точка $c(c_1; c_2)$ принадлежит области Ω, состоящей из четырех непересекающихся множеств Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 (рис. 1), определяемых следующим образом:

$$\Omega_1 = \left\{c(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2; c_1 > 0, c_2 > 0, c_1 + c_2 < 1\right\};$$

$$\Omega_2 = \left\{c(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2; c_1 > 0, c_2 > 0, \min(c_1, c_2) \leq 1, c_1 + c_2 > 1\right\};$$

$$\Omega_3 = \left\{c(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < c_1 \leq 1, -\infty \leq c_2 < 0\right\};$$

$$\Omega_4 = \left\{c(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2; -\infty \leq c_1 < 0, 0 < c_2 \leq 1\right\}.$$

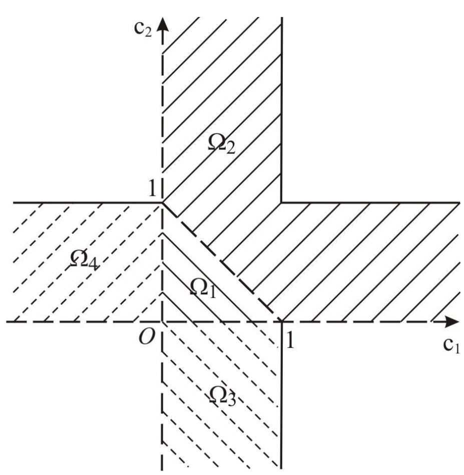

Рис. 1. Область Ω.

Разверткой двумерного тора $T^2(c)$ является шестиугольник с вершинами в точках $O(0; 0)$, $A(-c_1; 1 - c_2)$, $B(0; 1)$, $C(1 - c_1; 1 - c_2)$, $D(1; 0)$, $E(1 - c_1; -c_2)$. Вид шестиугольника $OABCDE$ зависит от принадлежности точки c той или иной части области Ω (рис. 2).

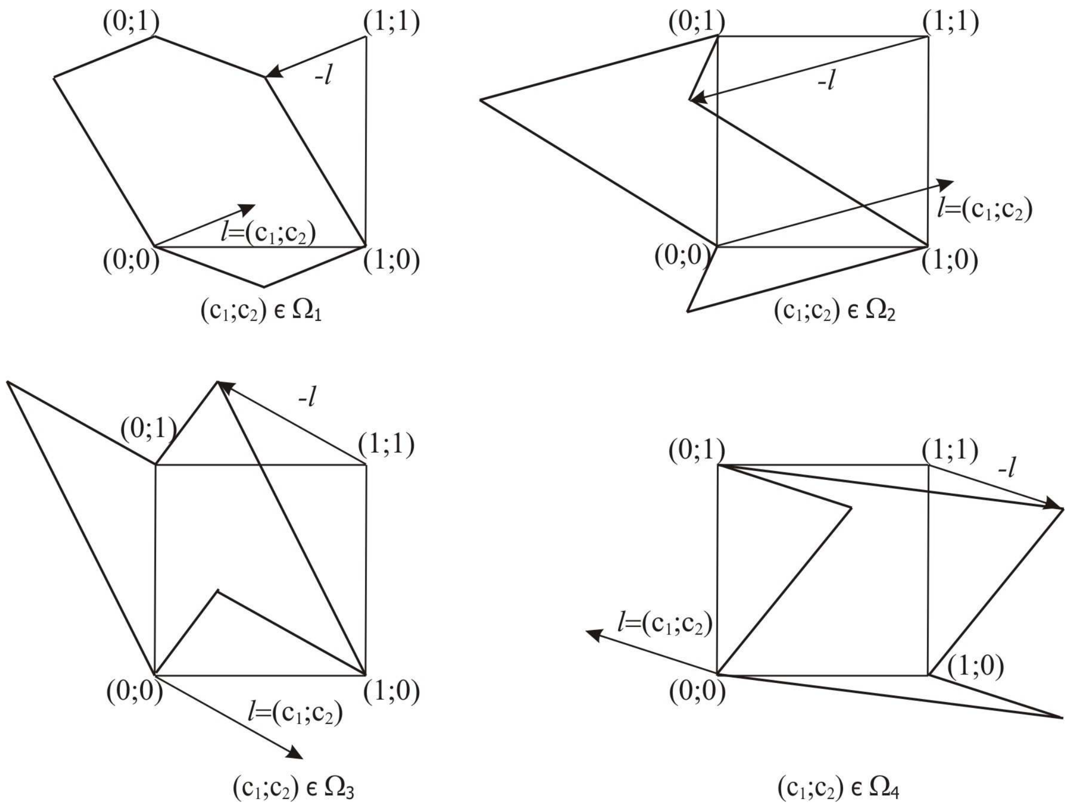

Рис. 2

Перекладывающаяся развертка двумерного тора должна состоять из двух параллелограммов и одного шестиугольника, которые получаются при сдвиге ломаной BCD на вектор $-\alpha$. Выбор вектора α зависит от области Ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Для области Ω_1: $\alpha = tl$, где $l = (c_1; c_2)$, $(c_1; c_2) \in \Omega_1$ и $0 < t \leqslant 1$.

Для области Ω_2: $\alpha = tl$, где $l = (c_1; c_2)$, $(c_1; c_2) \in \Omega_2$ и $0 < t \leqslant \frac{1}{c_1+c_2}$.

Для области Ω_3: $\alpha = tl$, где $l = (-c_1; 1 - c_2)$, $(c_1; c_2) \in \Omega_3$ и $0 < t \leqslant \frac{1-c_1}{1-c_1-c_2}$.

Для области Ω_4: $\alpha = tl$, где $l = (1 - c_1, -c_2)$, $(c_1; c_2) \in \Omega_4$ и $0 < t \leqslant \frac{1-c_2}{1-c_1-c_2}$.

Вектора e_1, e_2, e_0, необходимые для нахождения нормированной функции распределения $\overline{\rho}_j(x)$, где $j = 0, 1, 2$, зависят от выбора вектора α, а значит от области Ω_i.

Для областей Ω_1 и Ω_2: $e_1 = (-1; 0)$, $e_2 = (0; -1)$, $e_0 = (1; 1)$; для области Ω_3: $e_1 = (1; 0)$, $e_2 = (-1; -1)$, $e_0 = (0; 1)$; для области Ω_4: $e_1 = (-1; -1)$, $e_2 = (0; 1)$, $e_0 = (1; 0)$.

5. Нормированная функция распределения при $d = 2$

Теорема 7. *Пусть $(c_1; c_2) \in \Omega_1$, тогда нормированные функции распределения будут следующими:*

$$\overline{\rho}_0(x) = \begin{cases} \frac{(2-c_1-c_2)^2 x^2}{2(1-c_1-c_2)} & \textit{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2}, \\ (2 - c_1 - c_2)x - \frac{1-c_1-c_2}{2} & \textit{при} \quad \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2} \leqslant x < \frac{1}{2-c_1-c_2}, \\ 1 + \frac{(2-c_1-c_2)^2(x-1)^2}{2(1-c_1-c_2)} & \textit{при} \quad \frac{1}{2-c_1-c_2} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\overline{\rho}_1(x) = \begin{cases} \frac{(c_1+1)^2 x^2}{2c_1} & \textit{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{c_1}{c_1+1}, \\ (c_1 + 1)x - \frac{c_1}{2} & \textit{при} \quad \frac{c_1}{c_1+1} \leqslant x < \frac{1}{c_1+1}, \\ 1 - \frac{(c_1+1)^2(x-1)^2}{2c_1} & \textit{при} \quad \frac{1}{c_1+1} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\overline{\rho}_2(x)=\begin{cases}\frac{(c_2+1)^2x^2}{2c_2} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{c_2}{c_2+1},\\ (c_2+1)x-\frac{c_2}{2} & \text{при} \quad \frac{c_2}{c_2+1}\leqslant x<\frac{1}{c_2+1},\\ 1-\frac{(c_2+1)^2(x-1)^2}{2c_2} & \text{при} \quad \frac{1}{c_2+1}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Теорема 8. *Пусть $(c_1;c_2)\in\Omega_2$, тогда нормированные функции распределения будут следующими:*

если $1<c_1+c_2<2$, то

$$\overline{\rho}_0(x)=\begin{cases}\frac{(c_1+c_2)^2x^2}{2(c_1+c_2-1)} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{c_1+c_2-1}{c_1+c_2},\\ (c_1+c_2)x+\frac{1-c_1-c_2}{2} & \text{при} \quad \frac{c_1+c_2-1}{c_1+c_2}\leqslant x<\frac{1}{c_1+c_2},\\ 1-\frac{(c_1+c_2)^2(x-1)^2}{2(c_1+c_2-1)} & \text{при} \quad \frac{1}{c_1+c_2}\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

если $c_1+c_2\geqslant 2$, то

$$\overline{\rho}_0(x)=\begin{cases}\frac{(c_1+c_2)^2x^2}{2(c_1+c_2-1)} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{1}{c_1+c_2},\\ \frac{(c_1+c_2)x}{c_1+c_2-1}-\frac{1}{2(c_1+c_2-1)} & \text{при} \quad \frac{1}{c_1+c_2}\leqslant x<\frac{c_1+c_2-1}{c_1+c_2},\\ 1-\frac{(c_1+c_2)^2(x-1)^2}{2(c_1+c_2-1)} & \text{при} \quad \frac{c_1+c_2-1}{c_1+c_2}\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

если $0<c_1\leqslant 1$, то

$$\overline{\rho}_1(x)=\begin{cases}\frac{(c_1+1)^2x^2}{2c_1} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{c_1}{c_1+1},\\ (c_1+1)x-\frac{c_1}{2} & \text{при} \quad \frac{c_1}{c_1+1}\leqslant x<\frac{1}{c_1+1},\\ 1-\frac{(c_1+1)^2(x-1)^2}{2c_1} & \text{при} \quad \frac{1}{c_1+1}\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

если $c_1>1$, то

$$\overline{\rho}_1(x)=\begin{cases}\frac{(c_1+1)^2x^2}{2c_1} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{1}{c_1+1},\\ \frac{(c_1+1)x}{c_1}-\frac{1}{2c_1} & \text{при} \quad \frac{1}{c_1+1}\leqslant x<\frac{c_1}{c_1+1},\\ 1-\frac{(c_1+1)^2(x-1)^2}{2c_1} & \text{при} \quad \frac{c_1}{c_1+1}\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

если $0<c_2\leqslant 1$, то

$$\overline{\rho}_2(x)=\begin{cases}\frac{(c_2+1)^2x^2}{2c_2} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{c_2}{c_2+1},\\ (c_2+1)x-\frac{c_2}{2} & \text{при} \quad \frac{c_2}{c_2+1}\leqslant x<\frac{1}{c_2+1},\\ 1-\frac{(c_2+1)^2(x-1)^2}{2c_2} & \text{при} \quad \frac{1}{c_2+1}\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

если $c_2>1$, то

$$\overline{\rho}_2(x)=\begin{cases}\frac{(c_2+1)^2x^2}{2c_2} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{1}{c_2+1},\\ \frac{(c_2+1)x}{c_2}-\frac{1}{2c_2} & \text{при} \quad \frac{1}{c_2+1}\leqslant x<\frac{c_2}{c_2+1},\\ 1-\frac{(c_2+1)^2(x-1)^2}{2c_2} & \text{при} \quad \frac{c_2}{c_2+1}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Теорема 9. *Пусть $(c_1;c_2)\in\Omega_3$, тогда нормированные функции распределения будут следующими:*

если $c_2\leqslant -1$, то

$$\overline{\rho}_0(x)=\begin{cases}-\frac{(c_2-1)^2x^2}{2c_2} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{1}{1-c_2},\\ \frac{(c_2-1)x}{c_2}+\frac{1}{2c_2} & \text{при} \quad \frac{1}{1-c_2}\leqslant x<-\frac{c_2}{1-c_2},\\ 1+\frac{(c_2-1)^2(x-1)^2}{2c_2} & \text{при} \quad -\frac{c_2}{1-c_2}\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

если $-1 < c_2 < 0$, *то*

$$\overline{\rho}_0(x) = \begin{cases} -\frac{(c_2-1)^2x^2}{2c_2} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < -\frac{c_2}{1-c_2}, \\ (1-c_2)x + \frac{c_2}{2} & \text{при} \quad -\frac{c_2}{1-c_2} \leqslant x < \frac{1}{1-c_2}, \\ 1 + \frac{(c_2-1)^2(x-1)^2}{2c_2} & \text{при} \quad \frac{1}{1-c_2} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\overline{\rho}_1(x) = \begin{cases} \frac{(c_1+1)^2x^2}{2c_1} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{c_1}{c_1+1}, \\ (c_1+1)x - \frac{c_1}{2} & \text{при} \quad \frac{c_1}{c_1+1} \leqslant x < \frac{1}{c_1+1}, \\ 1 - \frac{(c_1+1)^2(x-1)^2}{2c_1} & \text{при} \quad \frac{1}{c_1+1} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

если $c_1 + c_2 \leqslant 0$, *то*

$$\overline{\rho}_2(x) = \begin{cases} \frac{(2-c_1-c_2)^2x^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2-c_1-c_2}, \\ \frac{(2-c_1-c_2)x}{1-c_1-c_2} - \frac{1}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad \frac{1}{2-c_1-c_2} \leqslant x < \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2}, \\ 1 - \frac{(2-c_1-c_2)^2(x-1)^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

если $c_1 + c_2 > 0$, *то*

$$\overline{\rho}_2(x) = \begin{cases} \frac{(2-c_1-c_2)^2x^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2}, \\ (2-c_1-c_2)x + \frac{c_1+c_2-1}{2} & \text{при} \quad \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2} \leqslant x < \frac{1}{2-c_1-c_2}, \\ 1 - \frac{(2-c_1-c_2)^2(x-1)^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad \frac{1}{2-c_1-c_2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Теорема 10. *Пусть* $(c_1; c_2) \in \Omega_4$, *тогда нормированные функции распределения будут следующими:*

если $c_1 \leqslant -1$, *то*

$$\overline{\rho}_0(x) = \begin{cases} -\frac{(c_1-1)^2x^2}{2c_1} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < -\frac{c_1}{1-c_1}, \\ (1-c_1)x + \frac{c_1}{2} & \text{при} \quad -\frac{c_1}{1-c_1} \leqslant x < \frac{1}{1-c_1}, \\ 1 + \frac{(c_1-1)^2(x-1)^2}{2c_1} & \text{при} \quad \frac{1}{1-c_1} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

если $-1 < c_1 < 0$, *то*

$$\overline{\rho}_0(x) = \begin{cases} -\frac{(c_1-1)^2x^2}{2c_1} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{1-c_1}, \\ \frac{(c_1-1)x}{c_1} + \frac{1}{2c_1} & \text{при} \quad \frac{1}{1-c_1} \leqslant x < -\frac{c_1}{1-c_1}, \\ 1 + \frac{(c_1-1)^2(x-1)^2}{2c_1} & \text{при} \quad -\frac{c_1}{1-c_1} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

если $c_1 + c_2 \leqslant 0$, *то*

$$\overline{\rho}_1(x) = \begin{cases} \frac{(2-c_1-c_2)^2x^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2-c_1-c_2}, \\ \frac{(2-c_1-c_2)x}{1-c_1-c_2} - \frac{1}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad \frac{1}{2-c_1-c_2} \leqslant x < \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2}, \\ 1 - \frac{(2-c_1-c_2)^2(x-1)^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

если $0 < c_1 + c_2 \leqslant 1$, *то*

$$\overline{\rho}_1(x) = \begin{cases} \frac{(2-c_1-c_2)^2x^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2}, \\ (2-c_1-c_2)x + \frac{c_1+c_2-1}{2} & \text{при} \quad \frac{1-c_1-c_2}{2-c_1-c_2} \leqslant x < \frac{1}{2-c_1-c_2}, \\ 1 - \frac{(2-c_1-c_2)^2(x-1)^2}{2(1-c_1-c_2)} & \text{при} \quad \frac{1}{2-c_1-c_2} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\overline{\rho}_2(x) = \begin{cases} \frac{(c_2+1)^2x^2}{2c_2} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{c_2}{c_2+1}, \\ (c_2+1)x - \frac{c_2}{2} & \text{при} \quad \frac{c_2}{c_2+1} \leqslant x < \frac{1}{c_2+1}, \\ 1 - \frac{(c_2+1)^2(x-1)^2}{2c_2} & \text{при} \quad \frac{1}{c_2+1} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Утверждения теорем 7–10 получаются по одной и той же схеме. В качестве примера приведем вывод вида функции $\overline{\rho}_1(x)$ в теореме 7.

Доказательство. Для вектора $e_1 = (-1; 0)$ вектор $e_1^* = (0; -1)$ будет ортогональным. Найдем координаты вершин шестиугольника $OABCDE$ в системе координат, определяемых векторами e_1 и e_1^*, т.е. точек A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Вычислим скалярные произведения векторов, задающих вершины шестиугольника, на вектор e_1 — это будут первые координаты точек A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Затем найдем скалярные произведения этих же векторов на вектор e_1^* — это будут вторые координаты точек A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Теперь запишем уравнения сторон шестиугольника с вершинами в точках $O(0,0)$, $A_1(c_1; c_2-1)$, $B_1(0;-1)$, $C_1(c_1-1; c_2-1)$, $D_1(-1; 0)$, $E_1(c_1-1; c_2)$ в системе координат zOu, определяемой векторами e_1 и e_1^*:

OA_1: $u = \frac{c_2-1}{c_1}z$; A_1B_1: $u = \frac{c_2}{c_1}z - 1$; B_1C_1: $u = \frac{c_2}{c_1-1}z - 1$; C_1D_1: $u = \frac{c_2-1}{c_1}z + \frac{c_2-1}{c_1}$; D_1E_1: $u = \frac{c_2}{c_1}z + \frac{c_2}{c_1}$; OE_1: $u = \frac{c_2}{c_1-1}z$.

На сторонах шестиугольника выберем точки (рис. 3): $F\left(z; \frac{c_2-1}{c_1}z\right) \in OA_1$, $G\left(z; \frac{c_2}{c_1}z - 1\right) \in A_1B_1$, $H\left(z; \frac{c_2}{c_1-1}z - 1\right) \in B_1C_1$, $K\left(z; \frac{c_2-1}{c_1}z + \frac{c_2-1}{c_1}\right) \in C_1D_1$, $L\left(z; \frac{c_2}{c_1}z + \frac{c_2}{c_1}\right) \in D_1E_1$, $M\left(z; \frac{c_2}{c_1-1}z\right) \in OE_1$ и вычислим координаты векторов $\overrightarrow{D_1L} = \left(z+1; \frac{c_2}{c_1}(z+1)\right)$, $\overrightarrow{D_1K} = \left(z+1; \frac{c_2-1}{c_1}(z+1)\right)$, $\overrightarrow{E_1M} = \left(z+1-c_1; \frac{c_2}{c_1-1}(z+1-c_1)\right)$, $\overrightarrow{A_1F} = \left(z-c_1; \frac{c_2-1}{c_1}(z-c_1)\right)$, $\overrightarrow{A_1G} = \left(z-c_1; \frac{c_2}{c_1}(z-c_1)\right)$, $\overrightarrow{D_1E_1} = (c_1; c_2)$, $\overrightarrow{D_1C_1} = (c_1; c_2-1)$, $\overrightarrow{E_1C_1} = (0; -1)$, $\overrightarrow{E_1O} = (1-c_1; -c_2)$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (-c_1; -c_2)$.

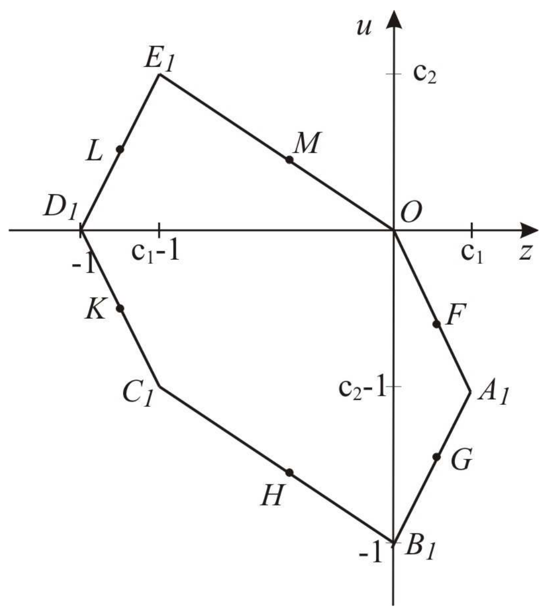

Рис. 3

Из определения T_z следует, что величина $|T_z|$ равна площади фигуры, отсекаемой от шестиугольника $OA_1B_1C_1D_1E_1$ прямой, проходящей через точку $Z(z; 0)$ перпендикулярно вектору e_1. Рассмотрим различные случаи выбора точки Z:

1) если $-1 \leqslant z < c_1 - 1$, то

$$|T_z| = S_{\Delta D_1LK} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{D_1L}; \overrightarrow{D_1K}\right]\right\} = \frac{(z+1)^2}{2c_1};$$

2) если $c_1 - 1 \leqslant z < 0$, то

$$|T_z| = S_{\Delta C_1D_1E_1} + S_{E_1MHC_1} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{D_1C_1}; \overrightarrow{D_1E_1}\right]\right\} + \left|\left[\overrightarrow{E_1C_1}; \overrightarrow{E_1M}\right]\right| = z + 1 - \frac{c_1}{2};$$

3) если $0 \leqslant z \leqslant c_1$, то

$$|T_z| = S_{\Delta C_1 D_1 E_1} + S_{E_1 O B_1 C_1} + S_{\Delta O A_1 B_1} - S_{\Delta F A_1 G} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{D_1C_1}; \overrightarrow{D_1E_1}\right]\right\} + \left|\left[\overrightarrow{E_1C_1}; \overrightarrow{E_1O}\right]\right| + \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1B_1}; \overrightarrow{A_1O}\right]\right\} - \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1F}; \overrightarrow{A_1G}\right]\right\} =$$

$$= 1 - \frac{(z-c_1)^2}{2c_1}.$$

Таким образом,

$$|T_z| = \begin{cases} \frac{(z+1)^2}{2c_1} & \text{при} \quad -1 \leqslant z < c_1 - 1, \\ z + 1 - \frac{c_1}{2} & \text{при} \quad c_1 - 1 \leqslant z < 0, \\ 1 - \frac{(z-c_1)^2}{2c_1} & \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant c_1. \end{cases}$$

В силу того, что $|T| = 1$, выражения для $\frac{|T_z|}{|T|}$ будут такими же как и для $|T_z|$.

Утверждение теоремы 7 получается после нормирования выражения $\frac{|T_z|}{|T|}$ с помощью замены $z = (c_1+1)x - 1$.

6. Заключение

В настоящей работе рассмотрена функция распределения остаточного члена на множествах ограниченного остатка, получаемых на основе так называемых перекладывающихся разбиений тора. Показано, что распределение остаточного члена является равномерным в случае размерности один. В случае высших размерностей равномерность нарушается. Найден алгоритм вычисления нормированных функций распределения $\overline{\rho}_j(x)$ и доказан ряд структурных свойств этих функций. В случае ряда семейств двумерных множеств ограниченного остатка вычисление нормированных функций распределения проведено в явном виде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bohl P. Über ein in der Theorie der säkutaren Störungen vorkommendes Problem // J. Reine Angew. Math. 1909. №135. P. 189–283.

2. Day Bradley A. Prismatoid, Prismoid, Generalized Prismoid // The American Math. Monthly. 1979. №86. P. 486–490.

3. Erdös P. Problems and results on diophantine approximations. // Compositio Math. 1964. №16. P. 52–65.

4. Furstenberg H., Keynes M., Shapiro L. Prime flows in topological dynamics // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 26–38.

5. Grepstad S., Lev N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation // Geometric and Functional Analysis. 2015. V. 25, Issue 1. P. 87–133.

6. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. №5. P. 54–76.

7. Heynes A., Koivusalo H. Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices // Israel J. Math (in press), http://arxiv.org/abs/1402.2125.

8. Kelly M., Sadun L. Patterns equivariant cohomology and theorems of Kesten and Oren // Bull. London Math. Soc. 2015. V. 47 (1). P. 13–20.

9. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. №12. P. 193–212.

10. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. 1987. V. 61. P. 267–293.

11. Petersen K. On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory // Compositio Math. 1973. V. 26. P. 313–317.

12. Rauzy G. Nombres algebriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. V. 110. P. 147–148.

13. Sierpinski W. Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme // Bull Intl. Acad. Polonmaise des Sci. et des Lettres (Cracovie) series A. 1910. P. 9–11.

14. Szüsz R. Über die Verteilung der Vielfachen einer Komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1954. V. 5. P. 35–39.

15. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. 1910. №30. P. 377–407.

16. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann. 1916. V. 77, №3. P. 313–352.

17. Абросимова А.А. BR-множества // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. С. 8–22.

18. Абросимова А.А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 15–23.

19. Абросимова А.А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2012. Т. 5 (124), вып. 26. С. 5–11.

20. Журавлев В.Г. Геометризация теоремы Гекке // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 125–144.

21. Журавлев В.Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 1–33.

22. Журавлев В.Г. Многогранники ограниченного остатка // Труды математического института имени В.А. Стеклова. Современные проблемы математики. 2012. Вып. 16. С. 82–102.

23. Журавлев В.Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Аналитическая теория чисел и теория функций. Зап. научн. сем. ПОМИ. СПб.: ПОМИ, 2011. Т. 26 (392). С. 95–145.

24. Красильщиков В.В., Шутов А.В. Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей // Математические заметки. 2011. Т. 89 (1). С. 43–52.

25. Шутов А.В. Двумерная проблема Гекке–Кестена // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 2 (38). С. 151–162.

26. Шутов А.В. Многомерные обобщения сумм дробных долей и их теоретико-числовые приложения // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1 (45). С. 104–118.

27. Шутов А.В. О минимальных системах счисления // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов. 2007. Вып. 4. С. 125–138.

28. Шутов А.В. О скорости достижения точных границ остаточного члена в проблеме Гекке–Кестена // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2 (46). С. 173–179.

29. Шутов А.В. Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 264–271.

30. Шутов А.В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Т. 7 (57). С. 168–175.

31. Шутов А.В. Распределение дробных долей линейной функции на множествах положительной коразмерности // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. Белгород: Изд-во НИУ "Белгу", 2013. Вып. 32. №19 (162). С. 134–143.

REFERENCES

1. Bohl P. 1909. "Über ein in der Theorie der säkutaren Störungen vorkommendes Problem", *J. Reine Angew. Math.*, no. 135, pp. 189–283.

2. Day Bradley A. 1979. "Prismatoid, Prismoid, Generalized Prismoid", *The American Math. Monthly*, no. 86, pp. 486–490. doi:10.2307/2320427.

3. Erdös P. 1964. "Problems and results on diophantine approximations", *Compositio Math.*, no. 16, pp. 52–65. doi:10.1007/BFb0074258.

4. Furstenberg H., Keynes M., Shapiro L. 1973. "Prime flows in topological dynamics", *Israel J. Math.*, V. 14, pp. 26–38. doi:10.1007/BF02761532.

5. Grepstad S., Lev N. 2015. "Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation", *Geometric and Functional Analysis*, V. 25, Issue 1, pp. 87–133. doi:10.1007/s00039-015-0313-z.

6. Hecke E. 1921. "Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins", *Math. Sem. Hamburg Univ.*, no. 5, pp. 54–76.

7. Heynes A., Koivusalo H. "Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices", *Israel J. Math.*, (in press), http://arxiv.org/abs/1402.2125. doi:10.1007/s11856-016-1283-z.

8. Kelly M., Sadun L. 2015. "Patterns equivariant cohomology and theorems of Kesten and Oren", *Bull. London Math. Soc.*, V. 47 (1), pp. 13–20. doi:10.1112/blms/bdu088.

9. Kesten H. 1966. "On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1", *Acta Arithmetica*, no. 12, pp. 193–212.

10. Liardet P. 1987. "Regularities of distribution", *Compositio Math.*, V. 61, pp. 267–293.

11. Petersen K. 1973. "On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory", *Compositio Math.*, V. 26, pp. 313–317.

12. Rauzy G. 1982. "Nombres algebriques et substitutions", *Bull. Soc. Math. France*, V. 110, pp. 147–148.

13. Sierpinski W. 1910. "Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme", *Bull Intl. Acad. Polonmaise des Sci. et des Lettres (Cracovie) series A*, pp. 9–11.

14. Szüsz R. 1954. "Über die Verteilung der Vielfachen einer Komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, V. 5, pp. 35–39. doi:10.1007/BF02020384.

15. Weyl H. 1910. "Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene", *Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo*, no. 30, pp. 377–407.

16. Weyl H. 1916. "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", *Math. Ann.*, Vol. 77, no. 3, pp. 313–352.

17. Abrosimova A.A. 2015. "BR-mnozhestva", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16, pp. 8–22. (Russian).

18. Abrosimova A.A. 2011. "Mnozhestva ogranichennogo ostatka na dvumernom tore", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 4, pp. 15–23. (Russian).

19. Abrosimova A.A. 2012. "Srednie znachenija otklonenij dlja raspredelenija tochek na tore", *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika. Belgorod: Izd-vo NIU "BelGU"*, Vol. 5 (124), no. 26, pp. 5–11. (Russian).

20. Zhuravlev V.G. 2010. "Geometrizacija teoremy Gekke", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 11, no. 1, pp. 125–144. (Russian).

21. Zhuravlev V.G. 2012. "Mnogomernaja teorema Gekke o raspredelenii drobnyh dolej", *Algebra i analiz*, Vol. 24, no. 1, pp. 1–33. (Russian). translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2013, 24:1, 71–97. doi:10.1090/S1061-0022-2012-01232-X.

22. Zhuravlev V.G. 2012. "Mnogogranniki ogranichennogo ostatka", *Trudy matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova. Sovremennye problemy matematiki*, no. 16, pp. 82–102. (Russian). translation in Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 2013, 280, suppl. 2, S71–S90. doi:10.1134/S0081543813030085.

23. Zhuravlev V.G. 2011. "Perekladyvajushhiesja toricheskie razvertki i mnozhestva ogranichennogo ostatka", *Analiticheskaja teorija chisel i teorija funkcij. Zap. nauchn. sem. POMI. SPb.: POMI*, Vol. 26 (392), pp. 95–145. (Russian). translation in: Journal of Mathematical Sciences (New York), 2012, 184:6, 716–745. doi:10.1007/s10958-012-0894-0.

24. Krasil'shhikov V.V. & Shutov A.V. 2011. "Opisanie i tochnye znachenija maksimuma i minimuma ostatochnogo chlena problemy raspredelenija drobnyh dolej", *Matematicheskie zametki*, Vol. 89 (1), pp. 43–52. (Russian). translation in Mathematical Notes, 2011, 89:1, 59–67. doi:10.1134/S0001434611010068.

25. Shutov A.V. 2011. "Dvumernaja problema Gekke–Kestena", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 2 (38), pp. 151–162. (Russian).

26. Shutov A.V. 2013. "Mnogomernye obobshhenija summ drobnyh dolej i ih teoretiko-chislovye prilozhenija", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 14, no. 1 (45), pp. 104–118. (Russian).

27. Shutov A.V. 2007. "O minimal'nyh sistemah schislenija", *Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkcional'nomu analizu i smezhnym voprosam. Saratov*, no. 4, pp. 125–138. (Russian).

28. Shutov A.V. 2013. "O skorosti dostizhenija tochnyh granic ostatochnogo chlena v probleme Gekke–Kestena", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 14, no. 2 (46), pp. 173–179. (Russian).

29. Shutov A.V. 2011. "Ob odnom semejstve dvumernyh mnozhestv ogranichennogo ostatka", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 4, pp. 264–271. (Russian).

30. Shutov A.V. 2007. "Optimal'nye ocenki v probleme raspredelenija drobnyh dolej na mnozhestvah ogranichennogo ostatka", *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaja serija*, Vol. 7 (57), pp. 168–175. (Russian).

31. Shutov A.V. 2013. "Raspredelenie drobnyh dolej linejnoj funkcii na mnozhestvah polozhitel'noj korazmernosti", *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika. Belgorod: Izd-vo NIU "BelGU"*, Vol. 32, no. 19 (162), pp. 134–143. (Russian).

Владимирский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых

Получено 20.12.2015 г.

Принято в печать 11.03.2016 г.