В. В. Козлов, А. А. Карапетян, О степени устойчивости, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 2, 186–192

https://www.mathnet.ru/de11223

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 186–192

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+531.36

О СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2005 г. В. В. Козлов, А. А. Карапетян

1. Степень устойчивости и индексы инерции. Рассмотрим линейную гамильтонову систему в $\mathbb{R}^{2n} = \{x\}$ со стандартной симплектической структурой. Пусть $x = (p_1, \ldots \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ – канонические переменные (набор импульсов и координат), а гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(Bx, x), \tag{1}$$

где B – симметрический линейный оператор. Тогда канонические уравнения записываются в виде

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

где

$$A = IB, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

В переменных p, q уравнения (2) принимают привычный вид уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Пусть A – невырожденный оператор: $|A| \neq 0$ (это эквивалентно условию $|B| \neq 0$). Тогда собственные числа оператора A могут быть трех типов: вещественные пары $\pm a$, чисто мнимые пары $\pm ib$ и четверки $\pm a \pm ib$.

Как показано в работе [1], линейная система (2) с невырожденным оператором A, допускающая интеграл в виде невырожденной квадратичной формы (1), всегда приводится к системе уравнений Гамильтона. Поэтому развиваемая ниже теория применима к этому (формально, более общему) случаю.

Степенью неустойчивости u системы (2) будем называть количество корней характеристического уравнения оператора A, лежащих в правой полуплоскости, считая их кратности, а степенью устойчивости s – количество пар чисто мнимых корней характеристического уравнения оператора A, считая их кратности. Обозначим через i^+ и i^- положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы (1).

Согласно теореме Томсона [2],

$$u \equiv i^- \bmod 2. \tag{3}$$

В частности, если индекс инерции i^- (или i^+) нечетный, то число u также нечетно. Следовательно, в этом случае характеристический многочлен оператора A обязательно имеет положительный вещественный корень, и поэтому равновесие $x = 0$ неустойчиво. Более точно, классическая теорема Томсона доказана для линейных механических систем, на которые действуют дополнительные гироскопические и диссипативные силы. В системах общего вида (когда $\dot{H} \leq 0$) сравнение (3) доказано в работе [3]. Если $\dot{H} = 0$, то теорема Томсона эквивалентна следующему утверждению о степени устойчивости: s четно тогда и только тогда, когда

$$i^+ \equiv i^- \bmod 4. \tag{4}$$

Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$|i^+ - i^-| \leq 2l,$$

где l – количество пар чисто мнимых собственных чисел оператора A с жордановыми клетками нечетного порядка.

Следствие. *Имеет место неравенство*

$$|i^+ - i^-| \leq 2s. \tag{5}$$

Неравенство (5) указано в работе [4] для типичного случая, когда все корни характеристического многочлена простые. Ниже теорема 1 доказывается в общем случае кратных корней с использованием теории Вильямсона вещественных нормальных форм линейных уравнений Гамильтона [5]. Тем же методом легко доказывается и теорема Томсона.

Приведем иллюстративный пример. Пусть $i^- = 1$. Тогда (по теореме Томсона) имеется вещественная пара $\pm a$ собственных значений. При этом, согласно неравенству (5), все остальные собственные значения будут чисто мнимыми. Более того, по теореме 1 в этом случае матрица A приводится к диагональному виду. Такая ситуация является типичной в случае, когда теряется положительная определенность полной энергии H.

2. Доказательство теоремы 1. По теореме Вильямсона пространство $\mathbb{R}^{2n}$ распадается в прямую сумму косоортогональных подпространств, так что форма (1) представляется в виде суммы квадратичных форм (частичных гамильтонианов) на этих подпространствах, при этом

a) вещественной паре $\pm a$ собственных чисел порядка k отвечает частичный гамильтониан

$$H = -a\sum_{j=1}^{k} p_j q_j + \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1};$$

b) четверке $\pm a \pm ib$ порядка k –

$$H = -a\sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b\sum_{j=1}^{k}(p_{2j-1}q_{2j} - p_{2j}q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2};$$

c) чисто мнимой паре $\pm ib$ порядка $2k+1$ –

$$H = \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}(b^2 p_{2j}p_{2k-2j+2} + q_{2j}q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1}(b^2 p_{2j-1}p_{2k-2j+3} + q_{2j-1}q_{2k-2j+3})\right] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1};$$

d) чисто мнимой паре $\pm ib$ порядка $2k$ –

$$H = \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}(b^{-2} q_{2j-1}q_{2k-2j+1} + q_{2j}q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k-1}(b^2 p_{2j+1}p_{2k-2j+1} + p_{2j+2}p_{2k-2j+2})\right] -$$

$$- b^2\sum_{j=1}^{k} p_{2j-1}q_{2j} + \sum_{j=1}^{k} p_{2j}q_{2j-1}.$$

Найдем сигнатуры каждого из этих гамильтонианов.

В случае a) имеем

$$H = -ap_1q_1 + \sum_{j=2}^{k}(p_{j-1} - ap_j)q_j = \sum_{j=1}^{k}\tilde{p}_j\tilde{q}_j,$$

где $\tilde{p} = Cp$, $\tilde{q} = q$, а матрица C – двухдиагональная матрица с главной диагональю $(-a, \ldots, -a)$ и единичной поддиагональю, $|C| \neq 0$. Отсюда получаем, что паре $\pm a$ порядка k соответствует сигнатура $\underbrace{+\ldots+}_{k}\underbrace{-\ldots-}_{k}$.

Следует, наверное, подчеркнуть, что здесь и далее новые переменные $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, вообще говоря, не являются каноническими. Однако для вычисления сигнатуры это, конечно, не имеет никакого значения.

В случае b) гамильтониан H принимает вид

$$H = -a\sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b\sum_{j=1}^{k}(p_{2j-1}q_{2j} - p_{2j}q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2} = \sum_{j=1}^{2k}\tilde{p}_j\tilde{q}_j,$$

в котором $\tilde{p} = Cp$, $\tilde{q} = q$, где

$$C = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -a & -b & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b & -a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b & -a \end{pmatrix}, \quad |C| \neq 0.$$

Отсюда получаем, что четверке $\pm a \pm ib$ порядка k соответствует сигнатура $\underbrace{+\dots+}_{2k}\underbrace{-\dots-}_{2k}$.

В случае c) имеем

$$H = \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}(b^2 p_{2j}p_{2k-2j+2} + q_{2j}q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1}(b^2 p_{2j-1}p_{2k-2j+3} + q_{2j-1}q_{2k-2j+3})\right] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^j(b^2 p_j p_{2k+2-j} + q_j q_{2k+2-j}) - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1} =$$

$$= \pm\sum_{j=1}^{k}(-1)^j(b^2 p_j p_{2k+2-j} + q_j q_{2k+2-j}) \pm \frac{1}{2}(-1)^{k+1}(b^2 p_{k+1}^2 + q_{k+1}^2) - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1} =$$

$$= \pm\sum_{j=1}^{k} p_j((-1)^j b^2 p_{2k+2-j} \mp q_{j+1}) \pm \sum_{j=k+2}^{2k+1} q_j((-1)^j q_{2k+2-j} \mp p_{j-1}) \pm \frac{1}{2}(-1)^{k+1}(b^2 p_{k+1}^2 + q_{k+1}^2) =$$

$$= \pm\sum_{j=1,\ j\neq k+1}^{2k+1}\tilde{p}_j\tilde{q}_j \pm (-1)^{k+1}(\tilde{p}_{k+1}^2 + \tilde{q}_{k+1}^2),$$

где

$$\tilde{p}_j = p_j, \quad j = \overline{1,k}, \quad \tilde{p}_{k+1} = 2^{-1/2}q_{k+1}, \quad \tilde{p}_j = (-1)^j q_{2k+2-j} \mp p_{j-1}, \quad j = \overline{k+2, 2k+1};$$

$$\tilde{q}_j = (-1)^j b^2 p_{2k+2-j} \mp q_{j+1}, \quad j = \overline{1,k}, \quad \tilde{q}_{k+1} = 2^{-1/2}bp_{k+1}, \quad \tilde{q}_j = q_j, \quad j = \overline{k+2, 2k+1}.$$

Нетрудно видеть, что матрица перехода невырождена. Следовательно, паре $\pm ib$ порядка $2k+1$ соответствует сигнатура $\underbrace{+\dots+}_{2k+2}\underbrace{-\dots-}_{2k}$ или $\underbrace{+\dots+}_{2k}\underbrace{-\dots-}_{2k+2}$.

d) Наконец, для чисто мнимой пары $\pm ib$ порядка $2k$ рассмотрим два случая. Если $k=2l+1$ (k нечетно), то имеем

$$H = \pm\sum_{j=1}^{l}(b^{-2}q_{2j-1}q_{4l-2j+3} + q_{2j}q_{4l-2j+4}) \pm \frac{1}{2}(b^{-2}q_{2l+1}^2 + q_{2l+2}^2) \mp$$

$$\mp\sum_{j=1}^{l}(b^2p_{2j+1}p_{4l-2j+3}+p_{2j+2}p_{4l-2j+4})-b^2\sum_{j=1}^{2l+1}p_{2j-1}q_{2j}+\sum_{j=1}^{2l+1}p_{2j}q_{2j-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{l}[q_{2j-1}(p_{2j}\pm b^{-2}q_{4l-2j+3})+q_{2j}(-b^2p_{2j-1}\pm q_{4l-2j+4})]+$$

$$+q_{2l+1}\left(p_{2l+2}\pm\frac{1}{2}b^{-2}q_{2l+1}\right)+q_{2l+2}\left(-b^2p_{2l+1}\pm\frac{1}{2}q_{2l+2}\right)\mp$$

$$\mp\sum_{j=l+2}^{2l+1}(b^2p_{2j-1}p_{4l-2j+5}+p_{2j}p_{4l-2j+6})-b^2\sum_{j=l+2}^{2l+1}p_{2j-1}q_{2j}+\sum_{j=l+2}^{2l+1}p_{2j}q_{2j-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{l}[q_{2j-1}(p_{2j}\pm b^{-2}q_{4l-2j+3})+q_{2j}(-b^2p_{2j-1}\pm q_{4l-2j+4})]+$$

$$+q_{2l+1}\left(p_{2l+2}\pm\frac{1}{2}b^{-2}q_{2l+1}\right)+q_{2l+2}\left(-b^2p_{2l+1}\pm\frac{1}{2}q_{2l+2}\right)+$$

$$+\sum_{j=l+2}^{2l+1}[p_{2j-1}(\mp b^2p_{4l-2j+5}-b^2q_{2j})+p_{2j}(\mp p_{4l-2j+6}+q_{2j-1})]=\sum_{j=1}^{4l+2}\tilde p_j\tilde q_j=\sum_{j=1}^{2k}\tilde p_j\tilde q_j,$$

где

$$\tilde p_{2j-1}=p_{2j}\pm b^{-2}q_{4l-2j+3},\quad \tilde p_{2j}=-b^2p_{2j-1}\pm q_{4l-2j+4},\quad j=\overline{1,l},$$

$$\tilde p_{2l+1}=p_{2l+2}\pm\frac{1}{2}b^{-2}q_{2l+1},\quad \tilde p_{2l+2}=-b^2p_{2l+1}\pm\frac{1}{2}q_{2l+2},\quad \tilde p_j=p_j,\quad j=\overline{2l+3,4l+2};$$

$$\tilde q_j=q_j,\quad j=\overline{1,2l+2},$$

$$\tilde q_{2l+2j+1}=\mp b^2p_{2l-2j+3}-b^2q_{2l+2j+2},\quad \tilde q_{2l+2j+2}=\mp p_{2l-2j+4}-q_{2l+2j+1},\quad j=\overline{1,l}.$$

Если же $k=2l$ (k четно), то имеем

$$H=\pm\sum_{j=1}^{l}(b^{-2}q_{2j-1}q_{4l-2j+1}+q_{2j}q_{4l-2j+2})\mp\frac{1}{2}(b^2p_{2l+1}^2+p_{2l+2}^2)\mp$$

$$\mp\sum_{j=1}^{l-1}(b^2p_{2j+1}p_{4l-2j+1}+p_{2j+2}q_{4l-2j+2})-b^2\sum_{j=1}^{2l}p_{2j-1}q_{2j}+\sum_{j=1}^{2l}p_{2j}q_{2j-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{l}[q_{2j-1}(p_{2j}\pm b^{-2}q_{4l-2j+1})+q_{2j}(-b^2p_{2j-1}\pm q_{4l-2j+2})]+$$

$$+p_{2l+1}\left(\mp\frac{1}{2}b^2p_{2l+1}-b^2q_{2l+2}\right)+p_{2l+2}\left(\mp\frac{1}{2}p_{2l+2}+q_{2l+1}\right)\mp$$

$$\mp\sum_{j=l+2}^{2l}(b^2p_{2j-1}p_{4l-2j+3}+p_{2j}p_{4l-2j+4})-b^2\sum_{j=l+2}^{2l}p_{2j-1}q_{2j}+\sum_{j=l+2}^{2l}p_{2j}q_{2j-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{l}[q_{2j-1}(p_{2j}\pm b^{-2}q_{4l-2j+1})+q_{2j}(-b^2p_{2j-1}\pm q_{4l-2j+2})]+$$

$$+p_{2l+1}\left(\mp\frac{1}{2}b^2p_{2l+1}-b^2q_{2l+2}\right)+p_{2l+2}\left(\mp\frac{1}{2}p_{2l+2}+q_{2l+1}\right)+$$

$$=\sum_{j=l+2}^{2l}[p_{2j-1}(\mp b^2p_{4l-2j+3}-b^2q_{2j})+p_{2j}(\mp p_{4l-2j+4}+q_{2j-1})]=\sum_{j=1}^{4l}\tilde p_j\tilde q_j=\sum_{j=1}^{2k}\tilde p_j\tilde q_j,$$

где

$$\tilde p_{2j-1}=p_{2j}\pm b^{-2}q_{4l-2j+1},\quad \tilde p_{2j}=-b^2p_{2j-1}\pm q_{4l-2j+2},\quad j=\overline{1,l},\quad \tilde p_j=p_j,\quad j=\overline{2l+1,4l};$$

$$\tilde q_j=q_j,\quad j=\overline{1,2l},\quad \tilde q_{2l+1}=\mp\frac{1}{2}b^2p_{2l+1}-b^2q_{2l+2},\quad \tilde q_{2l+2}=\mp\frac{1}{2}p_{2l+2}+q_{2l+1},$$

$$\tilde q_{2l+2j+1}=\mp b^2p_{2l-2j+1}-b^2q_{2l+2j+2},\quad j=\overline{1,l-1},\quad \tilde q_{2l+2j+2}=\mp p_{2l-2j+2}+q_{2l+2j+1},\quad j=\overline{1,l-1}.$$

Можно проверить, что в обоих случаях матрица перехода невырождена. Таким образом, получаем, что паре $\pm ib$ порядка $2k$ соответствует сигнатура $\underbrace{+\ldots+}_{2k}\underbrace{-\ldots-}_{2k}$.

Результаты вычислений представлены в следующей таблице.

Таблица 1

Собств. число	Порядок	Сигнатура
$\pm a$	k	$\underbrace{+\ldots+}_{k}\underbrace{-\ldots-}_{k}$
$\pm a\pm ib$	k	$\underbrace{+\ldots+}_{2k}\underbrace{-\ldots-}_{2k}$
$\pm ib$	k нечет.	$\underbrace{+\ldots+}_{k+1/k-1}\ \underbrace{-\ldots-}_{k-1/k+1}$
$\pm ib$	k чет.	$\underbrace{+\ldots+}_{k}\underbrace{-\ldots-}_{k}$

Пусть l – количество пар чисто мнимых собственных чисел оператора A с нечетными кратностями, $k_1,\ldots,k_l$ – кратности этих чисел, причем $k_1,\ldots,k_{l_1}$ – кратности собственных чисел, которым соответствуют сигнатуры вида $\underbrace{+\ldots+}_{k+1}\underbrace{-\ldots-}_{k-1}$, а $k_{l_1+1},\ldots,k_l$ – кратности собственных чисел, которым соответствуют сигнатуры вида $\underbrace{+\ldots+}_{k-1}\underbrace{-\ldots-}_{k+1}$; m – количество пар чисто мнимых собственных чисел оператора A с четными кратностями и $k'_1,\ldots,k'_m$ – кратности этих чисел. Тогда положительный и отрицательный индексы инерции i^+ и i^- квадратичной формы (1) равны

$$i^\pm=u+\sum_{i=1}^{l_1}(k_i\pm1)+\sum_{i=l_1+1}^{l}(k_i\mp1)+\sum_{i=1}^{m}k'_i,$$

а степень устойчивости равна $s=\sum_{i=1}^{l}k_i+\sum_{i=1}^{m}k'_i$. Очевидно, что степень устойчивости s четна тогда и только тогда, когда l четно. Рассмотрим разность индексов инерции

$$i^+-i^-=2l_1-2(l-l_1)=4l_1-2l,$$

откуда заключаем, что, во-первых, $|i^+-i^-|\le 2l\le 2s$ (так как $l_1\le l\le s$), таким образом доказана теорема 1, а, во-вторых, $i^+-i^-\equiv 0 \bmod 4$ в том и только в том случае, когда l четно. Поскольку $s\equiv l \bmod 2$, то степень устойчивости s четна тогда и только тогда, когда выполнено (4).

Отметим еще, что из формул для индексов инерции легко вытекает теорема Томсона (3). Действительно, для этого достаточно вспомнить, что целые числа k_i (k_i') нечетные (четные).

3. Приложение к задаче о гироскопической стабилизации. Рассмотрим уравнение движения механической системы, находящейся под действием гироскопических и потенциальных сил

$$\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + Pz = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $\Gamma^t = -\Gamma$, $P^t = P$. Слагаемое $-\Gamma\dot{z}$ называется гироскопической силой, а $-Pz$ – потенциальной силой, действующей на рассматриваемую систему с n степенями свободы. Сигнатура соответствующего гамильтониана (полной энергии $H = (1/2)(\dot{z},\dot{z}) + (1/2)(Pz,z)$) имеет вид $\underbrace{+\ldots+}_{n+n-u}\underbrace{-\ldots-}_{u}$. Здесь u – степень неустойчивости линейной системы в отсутствие гироскопических сил (u – степень неустойчивости по Пуанкаре – определяется матрицей P), соответственно $n-u$ – степень устойчивости в отсутствие гироскопических сил. Согласно неравенству (5), получаем, что $|i^+ - i^-| = |2n-2u| \le 2s$, откуда $n-u\le s$, где s – степень устойчивости линейной системы, описываемой уравнением (6). Таким образом, приходим к следующему важному утверждению.

Теорема 2. *При добавлении гироскопических сил степень устойчивости системы не уменьшается.*

Этот результат дополняет классическую теорему Томсона о возможности гироскопической стабилизации системы с четной степенью неустойчивости по Пуанкаре (см. [2]).

Заменим теперь в уравнении (6) матрицу гироскопических сил Γ на $\mu\Gamma$, $\mu\in\mathbb{R}$. Рассмотрим случай, когда $P<0$: потенциальная энергия $(1/2)(Pz,z)$ принимает максимальное значение в положении равновесия $z=0$. Если $|\Gamma|\ne 0$, то при достаточно больших значениях μ равновесие $z=0$ становится устойчивым [6, 7]. Поскольку матрица Γ кососимметрична, то в этом случае n четно.

Теорема 3. *Пусть n нечетно и* $\operatorname{rank}\Gamma = n-1$. *Тогда при $\mu\ge\mu_0$ степень неустойчивости системы (6) равна 1.*

Так как n нечетно и $P<0$, то (по теореме Томсона) $u\ge 1$. Теорема 3 утверждает, что для неособых матриц гироскопических сил при достаточно больших значениях параметра μ степень неустойчивости принимает минимально возможное значение $u=1$.

Доказательство теоремы 3. Кроме интеграла энергии H система (6) допускает интеграл

$$F = \frac{1}{2}(P^{-1}\dot{z},\dot{z}) - (\Gamma P^{-1}\dot{z},z) + \frac{1}{2}((E-\Gamma P^{-1}\Gamma)z,z).$$

Здесь E – единичная $n\times n$-матрица. Заменим Γ на $\mu\Gamma$ и рассмотрим квадратичный интеграл

$$\Phi = 2H - 2F/\mu^{3/2} = (\dot{z},\dot{z}) + (Pz,z) - \mu^{1/2}(P^{-1}\Gamma z,\Gamma z) + O(\mu^{-1/2}).$$

Прежде всего заметим, что при больших μ эта квадратичная форма невырождена. Действительно, определитель $|\sqrt{\mu}\,\Gamma P^{-1}\Gamma + P|$ – многочлен относительно $\sqrt{\mu}$, значение которого отлично от нуля при $\mu=0$. Следовательно, этот определитель не обращается в нуль при $\mu\ge\mu_0$. Далее, согласно предположению, квадратичная форма $-(P^{-1}\Gamma z,\Gamma z)$ неотрицательна и обращается в нуль лишь на одномерном подпространстве $\ker\Gamma$, где форма (Pz,z) отрицательно определена. Значит, при больших значениях μ отрицательный индекс инерции невырожденного квадратичного интеграла Φ равен 1. Воспользуемся теперь следующим результатом работы [1]: линейной заменой переменных систему (6) можно представить в виде линейных уравнений Гамильтона, причем роль гамильтониана будет играть невырожденный квадратичный интеграл Φ. Остается воспользоваться неравенством (5).

Замечание. В работах [8, 9] для гамильтоновой системы вида (6) установлено неравенство

$$u\le i^-, \tag{7}$$

где i^- – отрицательный индекс инерции невырожденной потенциальной энергии $(1/2)(Pz,z)$. С учетом соотношений $i^+ + i^- = 2n$ и $u+s=n$ неравенство (7) эквивалентно неравенству (5).

В работе [10] содержится уточнение неравенства (7). Оно основано на обобщении теоремы Понтрягина о самосопряженных операторах в пространствах с индефинитной метрикой. Наш подход, применяемый к линейным гамильтоновым системам общего вида, использует теорию Вильямсона нормальных форм.

Авторы благодарны А.А. Шкаликову за обсуждение затронутых в статье вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-01059) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ 136.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М., 1955.
3. *Козлов В.В.* // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 14–19.
4. *Козлов В.В.* // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 371–383.
5. *Williamson J.* // Amer. J. of Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.
6. *Лахаданов В.М.* // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.
7. *Карапетян А.В.* // Teor. i primen. meh. 1994. V. 20. P. 89–93.
8. *Wimmer H.K.* // Linear Algebra and Appl. 1974. V. 8. P. 337–343.
9. *Lancaster P., Tismenetsky M.* // Linear Algebra and Appl. 1983. V. 52/53. P. 479–496.
10. *Shkalikov A.A.* // Operator Theory: Advances and Applications. 1996. V. 87. P. 358–385.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22.03.2004 г.