V. V. Voevodin, Polynomial estimation of the complexity of algorithms, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1999, Volume 39, Number 6, 1032–1040

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1999, том 39, № 6, с. 1032–1040

УДК 519.68

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ[1)]

© 1999 г. В. В. Воеводин

(117951 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ РАН)

Поступила в редакцию 24.11.98 г.

Традиционные записи алгоритмов в форме последовательных программ, математических формул и т.п. зависят, как правило, от внешних переменных, которые определяют "размеры" алгоритмов и значения которых не известны до начала их реализации. Процесс преобразования таких записей к виду, удобному для реализации на параллельных вычислительных системах, очень сложен. Поэтому желательно иметь метод предварительного оценивания сложности алгоритма как функции неизвестных переменных. В настоящей статье описывается один из подобных методов. Он позволяет полиномиально оценить параллельную сложность любого алгоритма, записанного в форме последовательной программы из так называемого линейного класса. Метод не требует какой-либо информации о структуре алгоритма и основан только на анализе текста программы.

Опишем сначала класс допустимых алгоритмов. Будем считать, что алгоритм записан с помощью следующих средств языка ФОРТРАН:

в программе может использоваться любое число простых переменных и переменных с индексом;

единственным типом исполнительного оператора может быть оператор присваивания; допускается любое число таких операторов;

все повторяющиеся операции описываются только с помощью циклов DO; структура вложенности циклов может быть произвольной; шаги изменения параметров циклов всегда равны +1; если у цикла нижняя границы больше верхней, то цикл не выполняется;

допускается использование любого числа условных и безусловных операторов перехода, передающих управление "вниз" по тексту; не допускается использование побочных выходов из циклов;

все индексные выражения переменных, границы изменения параметров циклов и условия передачи управления задаются в общем случае неоднородными формами, линейными как по параметрам циклов, так и по внешним переменным программы; все коэффициенты линейных форм являются целыми числами;

внешние переменные программы всегда целочисленные и векторы их значений принадлежат некоторым линейным выпуклым многогранникам; конкретные значения внешних переменных известны только перед началом работы программы и неизвестны в момент ее исследования.

Программы, удовлетворяющие описанным условиям, будем называть *линейными* или принадлежащими *линейному классу*. В теории и практике использования программ линейный класс занимает примерно такое же место, как матрицы в конечномерном анализе, численные методы линейной алгебры в вычислительной математике и т.п. Очень многие программы или их основные фрагменты изначально являются линейными. Еще большее число различных программ, в том числе содержащих вызовы программ и функций, может быть сведено к линейным. Поэтому всестороннее изучение программ из линейного класса представляет несомненный интерес. Более подробно с линейным классом можно познакомиться в [1].

При исследовании структуры программ традиционно вводится много специфических понятий. Опишем кратко те из них, которые потребуются нам в дальнейшем. Пусть задана произвольная линейная программа. Перенумеруем подряд сверху вниз все параметры циклов. Обозначим их через $I_1, \ldots, I_n$. Будем считать, что из двух параметров *младшим* (*старшим*) является тот,

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00239).

у которого номер меньше (больше). Перенумеруем также сверху вниз все операторы присваивания и обозначим их через $F_1, \ldots, F_m$.

С каждым оператором присваивания свяжем тесно вложенное гнездо циклов. Его можно получить, оставляя в программе только те циклы DO, в тела которых входит рассматриваемый оператор. Будем называть такое гнездо циклов *опорным* для данного оператора. Пусть опорное гнездо оператора F_i описывается параметрами $I_{i_1}, \ldots, I_{i_{s_i}}$. Рассмотрим арифметическое пространство, координаты точек которого совпадают со значениями этих параметров. Его размерность равна s_i. Назовем такое пространство *опорным*. Если оператор не входит ни в какое гнездо, то размерность опорного пространства будем считать равной нулю. Не ограничивая существенно общности, можно предполагать, что отдельный оператор описывается гнездом циклов, у которых нижние и верхние границы изменения каждого из параметров совпадают. Такое предположение позволяет приписать какие-то параметры даже отдельным операторам.

Границы изменения параметров циклов опорного гнезда определяют в опорном пространстве линейный многогранник. Будем называть его *опорным* для оператора F_i и обозначать V_i. Ветвления, определяющие условия срабатывания оператора F_i, вырезают из опорного многогранника некоторую область. Принимая во внимание целочисленность параметров циклов, эту область можно описать конечным числом замкнутых линейных многогранников. Будем ее также называть *опорной* и обозначать $\overline{V}_i$. По определению $\overline{V}_i \subset V_i$.

Совокупность опорных областей $\overline{V}_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ назовем *линейным пространством итераций*. Это – многосвязная область, состоящая из линейных многогранников, принадлежащих разным арифметическим пространствам. Факт, что некоторые или даже все многогранники могут порождаться одними и теми же параметрами циклов, не имеет сейчас никакого значения. Это будет отражаться лишь в том, что такие многогранники будут в чем-то похожи по расположению в своих пространствах и иметь какие-то размеры одинаковыми. По определению линейной программы каждый из параметров пробегает некоторое множество целочисленных значений с шагом +1. Назовем точку линейного пространства итерацией *целочисленной*, если все ее координаты являются целыми числами. Совокупность все целочисленных точек линейного пространства итераций назовем просто *пространством итераций*.

Подчеркнем, что границы изменения параметров циклов и условия ветвления могут зависеть от внешних переменных. Поэтому размеры всех многогранников и их конфигурации могут зависеть от значений этих переменных. Как правило, с ростом значений переменных размеры многогранников неограниченно увеличиваются. Это является характерной чертой пространства итераций.

Будем называть реализацию оператора F_i при конкретных значениях параметров циклов $I_{i_1}, \ldots, I_{i_{s_i}}$ *срабатыванием* или *итерацией*. Для линейных программ сложность оператора F_i не зависит от значений внешних переменных. Обычно она невелика. Поэтому множество операций, реализуемых программой, однозначно определяется множеством всех срабатываний всех операторов F_i. Совокупность всех реализаций всех операторов, относящихся к одному значению параметра какого-то цикла, будем называть *итерацией цикла*.

Каждому срабатыванию оператора F_i при конкретных значениях параметров циклов $I_{i_1}, \ldots$ $\ldots, I_{i_{s_i}}$ поставим в соответствии точку пространства итераций из области $\overline{V}_i$ с теми же значениями координат $I_{i_1}, \ldots, I_{i_{s_i}}$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между пространством итераций и множеством всех срабатываний всех операторов программы. Принимая во внимание структуру отдельных срабатываний, мы получаем отображение на пространство итераций множества всех исполняемых операций. Заметим, что все точки одной области $\overline{V}_i$ и только они соответствуют срабатываниям одного оператора F_i.

Порядок выполнения операций, определяемый последовательной программой, задает отношение порядка на множестве точек пространства итераций. Называется оно *лексикографическим*. Это отношение естественным образом расширяется на множество точек линейного пространства итераций [1].

Любое исследование структуры алгоритма, задаваемого последовательной программой, начинается с установления тех или иных зависимостей между точками пространства итераций. Две точки пространства итераций называются *зависимыми*, если при срабатываниях соответствующих им операторов имеют место обращения к одной и той же переменной. Пара зависимых точек всегда рассматривается как лексикографически упорядоченная, т.е. первая (начальная) точка в паре всегда лексикографически младше второй (конечной) точки. Различают четыре типа зависимостей, смотря по тому, каков тип обращения к переменной (использование или пересчет ее значения) имеет место в первой и второй точках.

Традиционно зависимости задают ориентированными графами зависимостей. Множество вершин в них совпадает с множеством точек пространства итераций. Дуги связывают зависимые точки. В каждом графе рассматриваются зависимости только одного типа. Дуги всегда направлены от лексикографически более младшей точки к лексикографически более старшей. Всего имеется четыре типа графов зависимостей.

Графы зависимостей неудобны ни для теоретического, ни тем более для практического использования. Это связано с тем, что они чрезвычайно сложны. В общем случае число дуг, инцидентных каждой вершине, очень велико и зависит от внешних переменных, значения которых не известны. По этой причине графы зависимостей невозможно описать конечным числом каких-либо простых функций. В силу избыточности этих графов характеристики алгоритмов, получаемые с их помощью, чаще всего оказываются неточными. Тем не менее, в различных подграфах графов зависимостей содержится много полезной информации.

Вместо традиционных графов зависимостей будем рассматривать минимальные графы зависимостей [1]. Зафиксируем какую-нибудь вершину графа зависимостей. Разобьем все множества дуг, входящих в данную вершину, на группы. Отнесем к одной группе дуги зависимостей по одной и той же переменной. В каждой группе выберем дугу, у которой начальная вершина ближе всего лексикографически к зафиксированной вершине. Построим ориентированный граф, в котором множество вершин совпадает с множеством точек пространства итераций, а множество дуг с выбранным множеством. Графы такого типа и называются *минимальными графами зависимостей*. Они являются остовными подграфами графов зависимостей. В соответствии с классификацией графов зависимостей имеется четыре типа минимальных графов.

Минимальные графы зависимостей точно описывают структуры алгоритмов. Будем для определенности считать равной 1 время одного срабатывания любого оператора и время одного обращения к памяти. Тогда длина критического пути минимального графа, называемого *графом алгоритма* (в начальных точках значения переменных пересчитываются, в конечных используются) лишь на 1 меньше минимально возможного числа шагов при реализации алгоритма на параллельных вычислительных системах. Длина критического пути минимального *графа зависимостей по выходу* (во всех точках значения переменных пересчитываются) на 1 меньше максимального числа пересчетов содержимого отдельных ячеек памяти и т.п. Естественно, в минимальных графах зависимостей содержится много другой полезной информации.

Настоящая статья посвящена изложению метода оценивания длин критических путей минимальных графов зависимостей для программ из линейного класса. Время реализации этого метода, вообще говоря, не зависит от числа вершин и числа дуг графов. Определяется оно только текстом программы, описывающей алгоритм. Аналогичные по эффективности методы не известны.

Наше внимание именно к минимальным графам зависимостей объясняется несколькими обстоятельствами. Задача получения различных оценок сложности процессов реализации алгоритмов достаточно важна. Но только использование минимальных графов позволило разработать эффективный метод нахождения таких оценок для представительного класса алгоритмов. Построение минимальных графов является начальным этапом преобразования программ к виду, удобному для реализации на параллельных вычислительных системах. Последующие этапы преобразования не только весьма сложны, но и плохо алгоритмизованы. Поэтому; прежде чем начинать их осуществлять, полезно понимать, чего можно добиться после их реализации. Это можно сделать, имея различные оценки сложности алгоритмов.

Формально минимальный граф зависимостей можно описать конечнозначной функцией Φ, заданной в пространстве итераций. Для любой точки I пространства итераций множество значений функции $\Phi(I)$ есть множество тех точек пространства итераций, из которых идут дуги графа в точку I. В силу конечности числа входных и выходных вхождений переменных в каждом операторе число значений функции Φ будет конечным. Однако оно может быть различным в разных точках. Всегда существуют точки, в которых функция Φ не определена.

Принципиальный вопрос состоит в выяснении того, как устроена функция Φ. Пусть в линейном пространстве итераций задана система однозначных функций Φ_k. Будем говорить, что граф, описываемый функцией Φ, *покрывается* системой функций Φ_k, если при любых значениях внешних переменных для каждой точки I из пространства итераций, в которой определена функция Φ, найдется такая подсистема функций Φ_k, что множество значений функции $\Phi(I)$ совпадает с множеством значений функций $\Phi_k(I)$.

Для всех исследований, проводимых с минимальными графами зависимостей, фундаментальное значение имеет следующее утверждение [2].

Теорема 1. *Для любой линейной программы любой минимальный граф зависимостей покрывается конечной системой функций, линейных как по линейному пространству итераций, так и по пространству внешних переменных программы. Число этих функций не зависит от значений внешних переменных. В линейном пространстве итераций функции определены на линейных многогранниках. Грани многогранников описываются уравнениями, также линейными как по линейному пространству итераций, так и по пространству внешних переменных.*

Создана и давно эксплуатируется программная система, называемая V–Ray system [3], которая, в частности, для программ из линейного класса находит все минимальные графы зависимостей. Для программ средних размеров время нахождения графов на среднем персональном компьютере не превосходит несколько секунд.

Число покрывающих функций зависит от многих факторов. Например, оно зависит от арифметической природы коэффициентов линейных индексных выражений и числа исполняемых операторов программы. На практике число покрывающих функций оказывается не очень большим. Исследование реальных программ показало наличие двух особенностей. Во-первых, общее число линейных покрывающих функций пропорционально числу операторов присваивания в программе. Коэффициент пропорциональности не превосходит несколько единиц. На меньшее число функций рассчитывать не приходится, если операторы связаны друг с другом. Во-вторых, в подавляющем большинстве случаев система покрывающих функций описывает минимальный граф зависимостей точно. Именно, почти всегда для любой покрывающей функции Φ_k и любой целочисленной точки из ее области определения пара точек $\Phi_k(I)$ и I определяет дугу минимального графа. Нам известно лишь несколько реальных примеров, в которых системы покрывающих функций задают не минимальный граф зависимостей, а какое-то его расширение. Примеры покрывающих функций для различных алгоритмов приведены в [1].

Основным математическим инструментом исследования минимальных графов являются развертки [1], [4]. Пусть в пространстве итераций задан ориентированный граф G. Рассмотрим вещественный функционал f, определенный на его вершинах. Предположим, что дуга графа идет из точки u в точку v. Будем говорить, что функционал f возрастает (не убывает) вдоль дуг графа G, если $f(v) > f(u)$ ($f(v) \geq f(u)$) для всех пар точек u, v, связанных дугами графа G. Назовем функционал f *строгой* (*обобщенной*) *разверткой* графа G, если он строго возрастает (не убывает) вдоль дуг графа. Вещественный функционал, определенный на линейном пространстве и являющийся разверткой на дискретном пространстве итераций будем называть *расширенной* разверткой. Для любого минимального графа множество разверток не пусто. Разверткой является любая константа. Разверткой является также функционал, значение которого в точке I равно номеру этой точки в лексикографическом порядке. Кстати, такая развертка строгая для любого минимального графа. Развертки обладают следующими свойствами [4]: сумма двух разверток, произведение развертки на неотрицательное число, максимум и минимум двух разверток есть развертка.

Степень важности разверток определяется их свойствами. Пусть для графа G известна какая-нибудь строгая развертка. Тогда на любой ее поверхности уровня никакие точки пространства итераций не могут быть связаны дугами графа G. Более того, никакие из этих точек не могут быть связаны даже путями графа. Поэтому число различных поверхностей уровня строгой развертки, уменьшенное на 1, дает оценку сверху для длины критического пути графа G. Для строгой развертки с минимальным числом поверхностей уровня оно равно длине критического пути. Точки пространства итераций имеют целочисленные координаты. Если ограничиться рассмотрением строгих разверток с целочисленными значениями, то длину критического пути при соответствующей нормировке развертки можно оценить разностью между максимальным и минимальным значениями развертки на точках пространства итераций. Всегда существует строгая целочисленная развертка, для которой эта разность равна длине критического пути. Под именем максимальной параллельной формы такая развертка описана в [4].

Хотя с помощью строгих разверток легко получать оценки длин критических путей, находить строгие развертки очень трудно. Гораздо проще находить обобщенные развертки. Поэтому мы поступим следующим образом. Выберем подходящий класс разверток и найдем в нем развертку, которая строго возрастает вдоль максимально возможного числа дуг. Вообще говоря, она не обязательно будет строгой. Но в выбранном классе она будет "самой строгой". Можно надеяться, что с ее помощью также удастся получить нужные оценки.

Процесс нахождения "самой строгой" развертки будем осуществлять рекурсивно. Допустим, что для выбранного класса разверток мы умеем решать следующую задачу: для заданного графа найти развертку, которая строго возрастает хотя бы вдоль одной дуги, или установить, что такая развертка не существует. Сначала решает эту задачу для минимального графа G. Предположим, что найдена нужная развертка g. Пусть она строго возрастает вдоль дуг из множества E, не обязательно строго возрастает вдоль дуг из множества E' и множества E и E' не пересекается. Пространство итераций и множество дуг E' образуют граф G'. Теперь решаем для него основную задачу. Предположим, что найдена нужная развертка g'. Пусть она строго возрастает вдоль дуг из множества $E_1 \subset E'$, не обязательно строго возрастает вдоль дуг из множества $E_1' \subset E'$ и множества E_1 и E_1' не пересекаются. Число дуг в минимальном графе конечно, хотя оно может зависеть от значений внешних переменных. Поэтому минимальное приращение функции g' вдоль дуг из множества E может быть отрицательным, но обязательно ограничено снизу. Минимальное приращение функции g вдоль дуг из множества E положительно по ее выбору. Следовательно, существует такое число $\alpha > 0$, возможно зависящее от значений внешних переменных, что функция

$$g_1 = \alpha g + g' \tag{1}$$

будет иметь положительные приращения вдоль всех дуг из объединения множеств $E \cup E_1$ и не будет иметь отрицательные приращения вдоль всех дуг из множества E_1'.

Это означает, что функция g_1 из (1) является разверткой для графа G и строго возрастает вдоль бóльшего числа дуг, чем исходная развертка g. Продолжая этот процесс, мы приходим к развертке, которая строго возрастает вдоль максимально возможного числа дуг графа G. Конечно, мы надеемся, что общее число шагов в рекурсивном процессе не будет большим.

В качестве подходящего класса обобщенных разверток выберем кусочно-линейные расширенные развертки. Пусть куски линейности совпадают с опорными многогранниками V_i, на кусках линейности направляющие векторы не зависят от внешних переменных, свободные члены на кусках линейности являются линейными неоднородными функциями от внешних переменных. Так как под кусочно-линейными мы будем понимать только расширенные развертки, то для простоты изложения слово "расширенная" будем опускать.

Рассмотрим векторы $N = (N_1, \ldots, N_s)$ внешних переменных программы. Предположим, что они принадлежат некоторой совокупности многогранников, в общем случае, неограниченных. Допустим, что отдельная покрывающая функция минимального графа имеет вид $x = Jy + \varphi$, задана на многограннике $V_{ij} \subset V_i$ и ее значения принадлежат V_k. Здесь J – числовая матрица, вектор φ линейно зависит от внешних переменных. Согласно теореме 1 все покрывающие функции могут быть выбраны в таком виде. Пусть обобщенная развертка на V_i имеет вид $(b, y) + \delta$, на V_k – вид $(a, x) + \gamma$. Направляющие векторы a, b и свободные члены γ, δ неизвестны и подлежат нахождению. Согласно выбору класса разверток и по аналогии с [4] будем искать векторы a, b как не зависящие от переменных $N_1, \ldots, N_s$, а свободные члены γ, δ как линейные неоднородные функции от этих переменных.

Так как из функционалов $(a, x) + \gamma$ и $(b, y) + \delta$ должна составляться обобщенная развертка, то потребуем, чтобы для всех $y \in V_{ij}$ выполнялось неравенство

$$(a, x) + \gamma \le (b, y) + \delta$$

или, другими словами,

$$(J^{\mathrm{T}} a - b, y) \le -(a, \varphi) + \delta - \gamma. \tag{2}$$

Обозначим через y^l вершины многогранника V_{ij}. Известно, что каждая точка ограниченного линейного многогранника может быть представлена как выпуклая линейная комбинация его вершин, т.е.

$$y = \sum_l \alpha_l y^l, \quad \alpha_l \ge 0, \quad \sum_l \alpha_l = 1. \tag{3}$$

Представление (3) показывает, что неравенство (2) эквивалентно следующей системе неравенств:

$$(J^{\mathrm{T}}a - b, y^l) \leq -(a, \varphi) + \delta - \gamma. \tag{4}$$

Как следует из теоремы 1, векторы y^l и φ являются линейными неоднородными функциями от $N_1, \ldots, N_s$. Пусть

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 N_1 + \ldots + \gamma_s N_s, \\ \delta &= \delta_0 + \delta_1 N_1 + \ldots + \delta_s N_s. \end{aligned}$$

Перепишем неравенство (4) следующим образом:

$$(f_0^l + \gamma_0 - \delta_0) + (f_1^l + \gamma_1 - \delta_1)N_1 + \ldots + (f_s^l + \gamma_s - \delta_s)N_s \leq 0, \tag{5}$$

где все f_i^l являются какими-то конкретными линейными однородными функциями неизвестных координат векторов a, b.

По предположению, вектор N внешних переменных принадлежит некоторой системе многогранников, в общем случае, неограниченных. Для каждого из многогранников существует конечное число точек $N^k = (N_1^k, \ldots, N_s^k)$ и конечное число векторов $M^q = (M_1^q, \ldots, M_s^q)$ таких, что

$$N = \sum_k \alpha_k N^k + \sum_q \beta_q M^q, \tag{6}$$

где

$$\alpha_k \geq 0, \quad \sum_k \alpha_k = 1, \quad \beta_q \geq 0. \tag{7}$$

Неравенства (5) имеют место для всех N из (6), (7). В частности, неравенства

$$\begin{gathered} (f_0^l + \gamma_0 - \delta_0) + (f_1^l + \gamma_1 - \delta_1)N_1^k + \ldots + (f_s^l + \gamma_s - \delta_s)N_s^k \leq 0, \\ (f_1^l + \gamma_1 - \delta_1)M_1^q + \ldots + (f_s^l + \gamma_s - \delta_s)M_s^q \leq 0 \end{gathered} \tag{8}$$

выполняются для всех k, q. Они могут быть получены из (5), если положить сначала $\alpha_k = 1$ для фиксированного k и $\beta_q = 0$ для всех q, а затем $\alpha_k = 1$ для какого-нибудь k и $\beta_q = +\infty$ для фиксированного q. Значения остальных β_q в последнем случае можно считать равными 0.

Неравенство (2) эквивалентно системе неравенств (8). Однако неравенства (8) не зависят от $N_1, \ldots, N_s$. Если мы каким-нибудь способом определим направляющие векторы a, b и свободные члены γ, δ из (8), то неравенство (2) будет выполняться для всех y и всех N из выбранных многогранников при тех же a, b и γ, δ.

Обозначим через t вектор, составленный для всех многогранников V_i из координат векторов a и коэффициентов разложения свободных членов γ по переменным $1, N_1, \ldots, N_s$. Будем называть его *направляющим вектором* кусочно-линейной развертки. Зафиксируем какой-нибудь многогранник, в котором определен вектор внешних переменных N. Соберем далее вместе неравенства типа (8) для всех покрывающих функций минимального графа зависимостей. Левую их часть можно представить в виде произведения At, где A есть числовая матрица. Если учесть, что все коэффициенты индексных выражений любой линейной программы являются целыми числами, и принять во внимание алгоритм получения покрывающих функций, то можно показать, что все коэффициенты матрицы A суть рациональные числа. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать матрицу A целочисленной. Итак, имеет место

Теорема 2. *Для любой линейной программы и любого линейного многогранника, задающего область изменения внешних переменных, существует не зависящая от значений внешних переменных целочисленная матрица A такая, что любой ненулевой вектор t, удовлетворяющий векторному неравенству*

$$At \leq 0, \tag{9}$$

является направляющим вектором кусочно-линейной развертки.

Напомним, что мы хотим искать развертки, которые строго возрастают вдоль наибольшего по возможности числа дуг. Рассмотрим сначала поведение кусочно-линейной развертки на семействе дуг, задаваемом одной покрывающей $x = Jy + \varphi$. Чтобы неравенство (2) было строгим для всех y и для всех N, необходимо и достаточно, чтобы неравенство (4) было строгим для всех l и для всех N. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы для всех l и всех k было строгим первое неравенство из (8). Поэтому для того чтобы развертка с направляющим вектором t, удовлетворяющим неравенству (9), была строгой при всех y и всех N для покрывающей функции $x = Jy + \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы среди координат вектора At, соответствующих этой покрывающей функции, отрицательными были все те, которые определяются первым неравенством из (8).

Пусть теперь для развертки с направляющим вектором t для всех y и всех N неравенство (2) является равенством. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы для всех l и всех N было равенством неравенство (4). Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы для всех l и всех k, q были равенствами оба неравенства из (8). Развертка, направляющий вектор t которой удовлетворяет векторному равенству

$$At = 0, \tag{10}$$

называется *расщепляющей*. Для нее не существует ни одной дуги графа, концевые точки которой принадлежат разным поверхностям уровня развертки. Если для какого-то графа существует расщепляющая развертка, то его критический путь связывает точки только одной поверхности уровня. Это обстоятельство позволяет получить для длины критического пути более точную оценку. Как мы увидим в дальнейшем, еще лучшую оценку можно получить, если существует несколько расщепляющих разверток или, другими словами, если уравнение (10) имеет несколько независимых решений.

В общем случае для развертки с направляющим вектором t при каких-то y и N неравенство (2) будет строгим неравенством, а при каких-то y и N равенством. Если при некотором N и каком-то y неравенство (2) оказывается в действительности равенством, то при этом же N и каких-то l должны быть равенствами неравенства (4). Но тогда при этом N неравенство (2) будет равенством для всех тех и только тех y, которые принадлежат выпуклой линейной оболочке вершин y^l, обращающих неравенство (4) в равенство. Естественно, что этой же оболочке принадлежит и рассматриваемая точка y. Для того чтобы при фиксированном l неравенство (4) становилось равенством, необходимо и достаточно, чтобы для данного l какие-то из первых неравенств (8) были в действительности равенствами. Поэтому соответствующее неравенство (4) будет равенством для всех N, принадлежащих некоторому многограннику Δ_l. Этот многогранник описывается выпуклой оболочкой типа (6). Суммирование в (6) ведется по тем k, q, которые соответствуют равенствам в (8). Теоретически, по-видимому, возможно (на практике такая ситуация не встречалась), когда для разных l многогранники Δ_l различны. В этом случае, принимая во внимание целочисленность векторов N, область задания внешних переменных можно разбить на такие многогранники, в каждом из которых при каждом l неравенство (4) всегда является либо строгим неравенством, либо равенством. После этого структуру графа по отношению к найденной развертке можно исследовать отдельно на каждом многограннике. Не ограничивая существенно общность будем считать, что это условие выполняется для всех покрывающих функций на всей области задания внешних переменных.

Условия легко контролировать. Упорядочим строки матрицы A и, соответственно, координаты вектора At следующим образом. Разобьем строки матрицы A на блоки, отразив в одном блоке все неравенства (8), относящиеся к одной покрывающей функции. Разобьем блоки на группы, отразив в одной группе все неравенства (8), относящиеся к одному l. Каждую из групп разобьем на две подгруппы. В первой отразим первые неравенства (8), во второй – вторые. В каждой подгруппе строки расположим соответственно одной и той же нумерации индексов k, q. Проведенные исследования показывают, что справедливо следующее

Утверждение. *Для того чтобы неравенство* (4) *для фиксированного* l *при всех допустимых* N *было строгим неравенством* (*равенством*), *необходимо и достаточно, чтобы в каждой группе координат вектора* At *для того же* l *все координаты первой подгруппы были отрицательными* (*все координаты группы были нулевыми*).

Если координаты вектора At не удовлетворяют сформулированному условию, то это означает, что структура алгоритма зависит от значений внешних переменных. Как уже отмечалось, в этом случае требуется дополнительное разбиение области задания внешних переменных на многогранники, в каждом из которых условие выполняется. Это повлечет за собой пересчет для каждого нового многогранника матриц A из (9). Однако он касается только перехода от неравенства (5) к неравенству (8). Ранее найденный вектор t будет удовлетворять всем новым неравенствам (9).

В классе кусочно-линейных разверток легко найти "самую строгую". Допустим, что мы умеем решать следующую задачу: для заданной матрицы A найти какое-нибудь решение неравенства $At \leq 0$, не являющееся решением равенства $At = 0$, или доказать, что такое решение не существует. Это можно осуществить, например, с помощью методов линейного программирования. Пусть мы нашли такое решение для неравенства (9). Представим матрицу A в виде суммы двух матриц:

$$A = B + C, \tag{11}$$

составленных из нулевых строк и строк матрицы A. Именно, в матрице B оставим только те строки матрицы A, для которых координаты вектора At отрицательные; остальные строки возьмем нулевыми. В матрице C оставим только те строки матрицы A, для которых координаты вектора At нулевые; остальные строки возьмем нулевыми. Далее решаем аналогичную задачу для неравенства $Ct \leq 0$. Она проще, чем для неравенства $At \leq 0$, так как матрица C содержит меньше ненулевых строк, чем матрица A. Пусть мы нашли решение $t\,'$. Согласно (1) составим вектор $t_1 = \alpha t + t\,'$, где $\alpha > 0$. Очевидно, что множитель α всегда можно подобрать так, что вектор At_1 будет неположительным и будет иметь больше отрицательных координат, чем вектор At. В отличие от общего случая множитель α не зависит от значений внешних переменных и определяется лишь векторами At и $Bt\,'$. Продолжая этот процесс, мы найдем такое решение t неравенства (9), что вектор At будет иметь максимально возможное число отрицательных координат. Соответствующую развертку будем называть самой строгой кусочно-линейной разверткой. В разложении (11) для подобной развертки матрица C либо нулевая, либо обладает следующим свойством: любое решение неравенства $Ct \leq 0$ удовлетворяет равенству $Ct = 0$. Самая строгая кусочно-линейная развертка не единственная. Однако для всех этих разверток разложение (11) матрицы A будет одним и тем же. Обозначим через $\bar{B}$ и $\bar{C}$ матрицы, полученные из матриц B и C вычеркиванием нулевых строк. Все самые строгие развертки определяются соотношениями $\bar{B}\,t < 0$, $\bar{C}\,t = 0$.

Если матрица C нулевая, то самая строгая развертка будет просто строгой разверткой. Матрица A целочисленная. Если ограничиться нахождением целочисленных векторов t, то при соответствующей нормировке разверток длину критического пути графа можно оценить сверху разностью между максимальным и минимальным значениями развертки на линейном пространстве итераций. Так как линейное пространство итераций состоит из опорных многогранников, то вычисление разности сводится к вычислению значений развертки в вершинах многогранников. Поэтому оценка длины критического пути как функция внешних переменных в данном случае будет линейной, в крайнем случае, кусочно-линейной.

Если матрица C в разложении (11) для самой строгой развертки не нулевая, то критический путь графа G оценивается сложнее. Представим граф G как объединение двух остовных подграфов G_1 и G_2. Пусть дуги из G_1 связывают вершины из разных поверхностей уровня самой строгой развертки, дуги из G_2 связывают вершины из одной и той же поверхности уровня. Для оценки длины критического пути графа G можно воспользоваться любым из следующим почти очевидных утверждений:

длина критического пути графа G не превосходит суммы длины критического пути графа G_1 и суммы длин критических путей всех подграфов графа G_2, дуги которых связывают вершины из одних и тех же поверхностей уровня самой строгой развертки;

длина критического пути графа G не превосходит произведения увеличенной на 1 длины критического пути графа G_1 и длины критического пути графа G_2.

Найденная самая строгая развертка является просто строгой разверткой для графа G_1. Поэтому длина критического пути графа G_1 оценивается описанными выше методами. В общем случае среди дуг графа G_2 могут находиться дуги, задаваемые любой покрывающей функцией графа G. Точнее, к дугам графа G_2 относятся те и только те дуги от конкретной покрывающей функции, конечные вершины которых принадлежат выпуклой линейной оболочке тех вершин y^l, для которых неравенство (4) обращается в равенство. Отсюда вытекают два полезных следствия. Во-первых, легко найти матрицу, которая для графа G_2 существует согласно теореме 2. Она является подматрицей матрицы C и получается из нее путем исключения строк, не относящихся к графу G_2. Это позволяет оценивать длину критических путей минимальных графов рекурсивно. Сначала оцениваем длину критического пути графа G через длины критических путей двух его подграфов G_1 и G_2, затем длину критического пути графа G_2 через длины критических путей двух его подграфов и т.д., пока не придем к графу, для которого оценку можем провести конструктивно. Во-вторых, как показывает практика, часто уже на первом шаге рекурсивного процесса размерности указанных выше линейных оболочек вершин y^l оказываются малыми или, по крайней мере, значительно меньшими, чем размерности опорных многогранников. Поэтому сумму длин критических путей подграфов графа G_2, дуги которых связывают вершины из одной и той же поверхности уровня, можно оценить числом всех дуг графа G_2 или, что то же самое, числом их конечных вершин. Но оно оценивается суммой объемов всех выпуклых линейных оболочек. Снова получаем полиномиальную оценку длины критического пути минимального графа как функции внешних переменных.

Если оценка длины критического пути графа G_2 через сумму объемов линейных оболочек не является удовлетворительной, переходим к более детальному исследованию структуры графа G_2. Обозначим через A_1 матрицу, которая для графа G_2 существует согласно теореме 2. Для системы линейных алгебраических уравнений $A_1t = 0$ найдем все фундаментальные решения. Будем считать, что среди них имеется и найденный ранее вектор t, определяющий самую строгую развертку. Система фундаментальных решений позволяет расщепить каждый опорный многогранник на замкнутые на краях линейные многообразия, обладающие следующим свойством: на любом линейном многообразии любая фундаментальная развертка принимает в вершинах графа G_2 одни и те же значения; на любых двух разных многообразиях в вершинах графа G_2 хотя бы одна фундаментальная развертка принимает разные значения. Другими словами, вершины графа G_2 в любом линейном многообразии являются для любой фундаментальной развертки точками одной и той же поверхности уровня; вершины графа G_2 в разных линейных многообразиях являются хотя бы для одной фундаментальной развертки точками разных поверхностей уровня. Напомним, что решения системы $A_1t = 0$ определяют расщепляющие развертки графа G_2. Никакая его дуга не может связывать точки, принадлежащие разным поверхностям уровня расщепляющей развертки. Поэтому любой путь графа G_2, в том числе его критический путь, может лежать только в объединении линейных многообразий, взятых не более, чем по одному, из каждого опорного многогранника. Как и выше, длину критического пути графа G_2 можно оценить объемом этого объединения или, что более точно, объемом пересечения объединения с областью задания графа G_2. В любом случае мы опять получаем полиномиальные оценки.

Любая обобщенная развертка графа G является расщепляющей разверткой для графа G_2. Для графа G по построению была получена самая строгая развертка. Кроме этого, граф G всегда имеет так называемую основную развертку [1]. Эти развертки могут как совпадать, так и быть различными. В общем случае граф G_2 может иметь развертки, не являющиеся расщепляющими. В [1] описан метод, позволяющий установить, что граф не имеет никаких разверток, отличных от основной. Продолжая процесс рекурсивного оценивания длины критического пути, мы придем, в конце концов, к такому графу типа G_2, который либо является пустым, либо имеет только расщепляющие развертки.

В настоящей статье мы описали лишь общие принципы получения оценок длин критических путей минимальных графов зависимостей с помощью функций, полиномиально зависящих от внешних переменных. Характер детализации оценок во многом определяется целью их использования, а таких целей довольно много. В большинстве случаев нужно знать только порядок зависимости оценок от внешних переменных. Для установления этого порядка изложенных общих принципов вполне достаточно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В.В.* Информационная структура алгоритмов. М.: Изд-во МГУ, 1997.
2. *Voevodin V.V.* Information structure of sequential programs // Russ. J. of Numer Analys and Modelling. 1995. V. 10. № 3. P. 279–286.
3. *Voevodin V.V., Voevodin Vl.V.* V-Ray technology: a new approach to the old problems. Optimization of the TRFD Perfect Club Benchmark to CRAY Y-MP and CRAY T3D supercomputers // Proc. High Performance Comput. Symposium'95. Phoenix, Arizona, 1995. P. 380–385.
4. *Voevodin V.V.* Matematical foundation of parallel computing // World Scient. Publ. Co. Ser. Comput. Sci. 1992. V. 33.