G. M. Agayan, The linear programming problem with element-wise specification of errors in the initial data, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, Volume 291, Number 2, 265–269

Доклады Академии наук СССР

1986. Том 291, № 2

УДК 519.852.6 МАТЕМАТИКА

Г.М. АГАЯН

О ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОЭЛЕМЕНТНЫМ ЗАДАНИЕМ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 24 V 1985)

1. Напомним постановку точной задачи линейного программирования (ЛП) в каноническом виде.

Задача $\bar{L}$. Найти $\bar{z}$ такое, что

$$\varphi(\bar{z}) = (\bar{c}, \bar{z}) = c_0 = \min_{z \in G} (\bar{c}, z),$$

$$G = \{z\colon z_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ \bar{A}z = \bar{u}\},$$

где $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_m) \in R^m$, $c_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, m, z \in R^m$, $\bar{A}$ – матрица размеров $n \times m$, $\bar{u} \in R^n$. Пусть $z^* \in R^m$ – некоторый фиксированный вектор. Поставим задачу о нахождении нормального решения задачи $\bar{L}$ [1], т.е. вектора $\bar{z}^0$ такого, что $\|\bar{z}^0 - z^*\| \leqslant \|\bar{z} - z^*\|$, где $\bar{z}$ – любое решение задачи $\bar{L}$. Если множество $G \neq \phi$, то элемент $\bar{z}^0$ существует и определен однозначно, однако задача его отыскания неустойчива. Пусть вместо точных исходных данных $(\bar{A}, \bar{u}, \bar{c})$ нам известны некоторые $(\tilde{A}, \tilde{u}, \tilde{c})$. Кроме того, известны поэлементные погрешности в задании коэффициентов, т.е. известны матрица μ и векторы δ и γ такие, что

$$|\bar{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij}| \leqslant \mu_{ij}, \quad |\tilde{u}_i - \bar{u}_i| \leqslant \delta_i, \quad |\tilde{c}_j - \bar{c}_j| \leqslant \gamma_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

2. Рассмотрим сначала случай точного задания вектора $\bar{c}$. Следуя [2, 3], будем считать допустимым решением приближенной системы $(\tilde{A}, \tilde{u})$ любой элемент z, для которого найдется матрица A и вектор u, что $Az = u$, где A такая, что $|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| \leqslant \mu_{ij}$, u такой, что $|\tilde{u}_i - u_i| \leqslant \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Поставим регуляризованную задачу ЛП в этом случае.

Задача $\mathrm{L}(\bar{c})$. Найти $\tilde{z}$ такое, что

$$(\bar{c}, \tilde{z}) + \lambda \|\tilde{z} - z^*\|^2 = \min_{z \in \tilde{Z}} \{(\bar{c}, z) + \lambda \|z - z^*\|^2\},$$

$$\tilde{Z} = Z_1 \cap R^+,$$

$$Z_1 = \{z\colon Az = u,\ |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| \leqslant \mu_{ij},\ |u_i - \tilde{u}_i| \leqslant \delta_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$R^+ = \{z\colon z_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$

$\lambda > 0$ – параметр.

Теорема 1. *Множество Z_1 совпадает со множеством*

$$Z_2 = \left\{z\colon \left|\sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ij} z_j - \tilde{u}_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} |z_j| + \delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Рассмотрим множество

$$\tilde{Z} = Z_1 \cap R^+ = Z_2 \cap R^+ =$$

$$= \left\{ z\colon\ z \in R^+,\ \left| \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ij} z_j - \tilde{u}_i \right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} z_j + \delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Оно выпукло (что неверно для Z_2), кроме того, оно представимо в виде $2 \times n + m$ линейных неравенств

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ij} z_j - \tilde{u}_i \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_{ij} z_j + \delta_i, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{a}_{ij} z_j - \tilde{u}_j \geqslant -\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_{ij} z_j + \delta_i \right), & i = 1, 2, \ldots, n, \\ z_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. & \end{cases}$$

При $\tilde{Z} \neq \phi$ существует единственный $\tilde{z}$ – решение задачи $\tilde{L}(\bar{c})$ [4], так как задача $\tilde{L}(\bar{c})$ – задача квадратичного программирования для совместной системы линейных неравенств и ограниченной снизу целевой функции ($\bar{c} \in R^+, \lambda > 0$).

Заметим, что результаты теоремы 1 полностью согласуются с результатами, полученными в [5].

3. Пусть теперь вместо точного вектора $\bar{c}$ известен вектор $\tilde{c}$ такой, что $|\bar{c}_j - \tilde{c}_j| \leqslant \gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Поставим задачу о нахождении среди векторов $c \in \tilde{C} = \{c\colon |c_j - \tilde{c}_j| \leqslant \gamma_j, j = 1, 2, \ldots, m\}$, эквивалентных $\tilde{c}$ по точности, вектора c', дающего минимальное значение целевой функции.

З а д а ч а $\tilde{L}$. Найти векторы z' и c' такие, что

$$(c', z') + \lambda \| z^* - z' \|^2 = \min_{c,\, z \in \tilde{Z}_c} \{(c, z) + \lambda \| z - z^* \|^2\},$$

$$\tilde{Z}_c = \{z, c\colon\ z \in \tilde{Z},\ c \in \tilde{C}\}.$$

Т е о р е м а 2. *Задача $\tilde{L}$ эквивалентна задаче $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$, если $\tilde{c}_j \geqslant \gamma_j$ для $j = 1, 2, \ldots, m$.*

З а д а ч а $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$. Найти z' такое, что

$$(\tilde{c} - \gamma, z) + \lambda \| z' - z^* \|^2 = \min_{z \in \tilde{Z}} \{(\tilde{c} - \gamma, z) + \lambda \| z - z^* \|^2\}.$$

Задача $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$ является регуляризованной задачей ЛП с точно заданной целевой функцией $\bar{c} = \tilde{c} - \gamma$.

4. Исследуем вопрос о сходимости решения задачи $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$ к нормальному решению точной задачи при стремлении погрешностей к 0. Справедлива

Т е о р е м а 3. *Для любых последовательностей $\delta_k, \mu_k, \gamma_k, \lambda_k \to 0$ таких, что μ_k/λ_k, δ_k/λ_k, $\gamma_k/\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, где*

$$\delta_k = \max_i \delta_i^k,\ \ \mu_k = \max_{i,j} \mu_{ij}^k,\ \ \gamma_k = \max_j \gamma_j^k,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

последовательность z_k решений задачи $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$ сходится к $\bar{z}^0$ – нормальному решению точной задачи.

5. Рассмотрим метод решения задачи $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$. Это задача квадратичного программирования. Методы решения такого класса задач хорошо разработаны (см., например, [4]). Перейдем от задачи $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$ к двойственной к ней задаче с более простыми ограничениями. Сформулируем задачу $\tilde{L}(\tilde{c} - \gamma)$ в следующем виде.

З а д а ч а $\widetilde{\mathrm{L}}(\widetilde{c}-\gamma)$. Найти z' такой, что

$$(\widetilde{c}-\gamma-2\lambda z^*, z')+\lambda(z', z')+\lambda(z^*, z^*) = \\ = \min_{z \in \widetilde{Z}} \{(\widetilde{c}-\gamma-2\lambda z^*, z)+\lambda(z, z)+\lambda(z^*, z^*)\},$$

$$\widetilde{Z} = \begin{cases} (\widetilde{a}_i-\mu_i, z)-(\widetilde{u}_i+\delta_i)\leqslant 0, & i=1,2,\ldots,n, \\ (-\widetilde{a}_i-\mu_i, z)-(-\widetilde{u}_i+\delta_i)\leqslant 0, & i=1,2,\ldots,n, \\ (-\sigma_j, z)\leqslant 0, \quad j=1,2,\ldots,m, \end{cases}$$

где

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases}$$

Используя теорему 3.9 из [4], сформулируем задачу K, двойственную к задаче $\widetilde{\mathrm{L}}(\widetilde{c}-\gamma)$. Обозначим: y_1^i – двойственные переменные, относящиеся к первым n ограничениям; y_2^i – двойственные переменные, относящиеся ко вторым n ограничениям; y_3^j – к последним m ограничениям. После преобразований двойственная задача имеет следующий вид.

З а д а ч а K. Найти $y^*=(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ такой, что

$$\Psi(y^*)=\min_{y\in Y}\Psi(y) = \min_{y\in Y}\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_1^i-y_2^i)\widetilde{u}_i + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n}(y_1^i+y_2^i)\delta_i+\lambda\|z\|^2\right\},$$

$$Y=\{y\in R^{2\times n+m},\ y_k\geqslant 0,\quad k=1,2,\ldots,2\times n+m\},$$

$$(1)\qquad z = \frac{1}{2\lambda}\left(y_3+2\lambda z^*-\widetilde{c}+\gamma - \sum_{i=1}^{n} y_1^i\widetilde{a}_i + \sum_{i=1}^{n} y_2^i\mu_i\right),\ z\in R^m,$$

Если y^* – решение задачи K, то соответствующий ему вектор z, вычисляемый с помощью (1), является решением задачи $\widetilde{\mathrm{L}}(\widetilde{c}-\gamma)$. Задача K также является задачей квадратичного программирования, но ограничения у нее имеют простейший вид.

З а м е ч а н и е. Если вектор $\widetilde{z}$ является решением задача $\widetilde{\mathrm{L}}$, то матрицей и правой частью, реализующей его, является $A=\widetilde{A}+\Delta$, где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} -\theta_i\mu_{ij} & \text{для } \widetilde{z}_j\neq 0, \\ 0 \text{ для } \widetilde{z}_j=0, \end{cases}$$

$\hat{u}=\widetilde{u}+u_\Delta$, где $u_{\Delta_i} = \theta_i\delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $\theta_i = \left(\sum_{j=1}^{m}\widetilde{a}_{ij}\widetilde{z}_j-\widetilde{u}_i\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_{ij}\widetilde{z}_j+\delta_i\right)$, $|\theta_i|\leqslant 1$. Для такой системы выполнено $\hat{A}\widetilde{z}=\hat{u}$. Аналогичный подход рассматривается также в [6].

6. Ч и с л е н н ы е р е з у л ь т а т ы. Рассмотрим модельный пример, изложенный в [7].

З а д а ч а M. Найти $\bar{z}=(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4, \bar{z}_5)$ такой, что

$$\bar{z}_1+\bar{z}_2 = \min_{z\in G}(\bar{z}_1+z_2),\quad G=\{z\colon z_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4,5,\quad \bar{A}z=\bar{u}\},$$

Таблица 1

w	λ	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
0,1	0,1	$1\cdot10^{-4}$	$-5\cdot10^{-4}$	0,809	0,907	0,417
	–	0	0,679	0,396	3,096	0
0,01	0,05	$1\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	0,808	0,977	0,406
	–	0	0	0,999	0,996	0
0,001	0,025	$9\cdot10^{-5}$	$-7\cdot10^{-5}$	0,801	0,998	0,402
	–	0	0	0,078	0,999	1,845

Таблица 2

b	v	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
1 1 2 0,5 2 1 1 2 0 2 1 1 2 0,5 2	1 1 1	$-2\cdot10^{-5}$	$-2\cdot10^{-5}$	0,783	0,903	0,404
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 5 5	$1\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$	0,799	0,951	0,405
10 10 0,5 0,5 0,5 10 10 0,5 0 0,5 10 10 0,5 0,5 0,5	1 1 8	$8\cdot10^{-5}$	$-2\cdot10^{-4}$	0,814	1,013	0,394

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача М некорректна, нормальным ее решением является вектор $\bar{z}^0 = (0;\ 0;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}4)$. В окрестности точных исходных данных $(\bar{A}, \bar{u})$ зададим возмущенную систему $(\tilde{A}, \tilde{u})$ так, что $\tilde{a}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \xi_{ij}/\|\xi\|\cdot w$, $u_i = \bar{u}_i + \eta_i/\|\eta\|\cdot w$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, где $\xi = \{\xi_{ij}\}$ – матрица, а $\eta = \{\eta_i\}$ – вектор случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$. Матрицу μ и вектор δ погрешностей зададим следующим образом:

$$\mu_{ij} = b_{ij}/\|b\|\cdot w, \quad \delta_i = v_i/\|v\|\cdot w, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Матрица b определяет относительное распределение погрешностей в μ, вектор v – в δ, а константа w задает суммарную сферическую погрешность. Для полученных таким способом данных $\tilde{A}$, $\tilde{u}$, μ, δ задача была решена с помощью методов, изложенных в п.4. В табл. 1 приведены результаты расчетов для равномерного распределения погрешностей ($b_{ij} \equiv v_i \equiv 1$) и различных значений w. Для сравнения здесь же приведены результаты решения этой задачи традиционным симплекс-методом [7].

Постановка задачи ЛП с поэлементными погрешностями обусловлена тем, что во многих, например экономических, задачах исходные данные делятся на две группы. Первую группу составляют данные, известные заведомо с погрешностью, например коэффициенты трудозатрат, ограничения по мощностям, ограничения трудовых, материальных ресурсов. Вторую группу составляют данные, которые по смыслу задачи носят детерминированный характер. Например, нулевые коэффициенты в матрице $\tilde{A}$ означают независимость данного ограничения от соответствующих неизвестных. Таким образом, для коэффициентов матрицы $\widetilde{A}$ и правой части $\widetilde{u}$ задачи ЛП, относящихся ко второй группе, соответствующие погрешности в μ и δ равны 0. В табл. 2 приведены результаты расчетов для модельной задачи М и различных распределений погрешностей в матрице и правой части для $w = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}1$. Из полученных данных видно, что качество решения задачи существенно зависит от информации о структуре матрицы и уровня погрешности в коэффициентах.

В заключение хотелось бы выразить глубокую благодарность Александру Алексеевичу Рютину за постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
4 VI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* – ДАН, 1965, т. 164, № 3, с. 507. 2. *Тихонов А.Н.* – ДАН, 1980, т. 254, № 3, с. 549. 3. *Тихонов А.Н., Рютин А.А., Агаян Г.М.* – ДАН, 1983, т. 272, № 5, с. 1058. 4. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 5. *Ватолин А.А.* – ЖВМиМФ, 1984, т. 24, № 11, с. 1629. 6. *Алексеев Б.В., Иваницкий А.Ю.* В сб.: Численный анализ: методы, алгоритмы, приложения. М.: Изд-во МГУ, 1985, с. 135. 7. *Тихонов А.Н., Карманов В.Г., Руднева Т.Л.* В сб.: Вычислит. методы и программирование. 1969, вып. 12, с. 3.

УДК 517.6

МАТЕМАТИКА

Э.Д. БАЛАДЗЕ

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СЕКЕФАЛЬВИ-НАДЯ ДЛЯ ЗОНОЭДРОВ

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 3 VI 1985)

Проблема, о которой идет речь, сформулирована В.Г. Болтянским в работах [1, 2], обобщающих один результат Секефальви-Надя [3]. Здесь мы приведем специфическую формулировку этой проблемы применительно к выпуклым многогранникам пространства $\mathbf{R}^n$ и ее полное решение для одного числа частного типа многогранников – так называемых зоноэдров.

Пусть M – компактный выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^n$, содержащий внутренние точки. Через $T(M)$ обозначим семейство всех многогранников, получающихся из M параллельными переносами, а через $\operatorname{him} T(M)$ – размерность Хелли [4] этого семейства, т.е. наибольшее из натуральных m, обладающих следующим свойством: в семействе $T(M)$ существуют такие многогранники $M_0, \ldots, M_m$, что каждые m из них имеют непустое пересечение, но пересечение всех $m+1$ многогранников пусто: $M_0 \cap \ldots \cap M_m = \phi$. Любое число $m_0 \geqslant \operatorname{him} T(M)$ обладает следующим свойством: пусть $M^{(1)}, \ldots, M^{(q)}$ – произвольные многогранники семейства $T(M)$, $q > m_0$; если каждые $m_0 + 1$ из этих многогранников имеют непустое пересечение, то и пересечение всех многогранников непусто: $M^{(1)} \cap \ldots \cap M^{(q)} \neq \phi$. При этом $\operatorname{him} T(M)$ – наименьшее из всех чисел m_0, обладающих этим свойством.

Если M – параллелепипед в $\mathbf{R}^n$, то, как легко видеть, $\operatorname{him} T(M) = 1$. Венгерский математик Секефальви-Надь доказал обратную теорему: если $\operatorname{him} T(M) = 1$,