V. V. Filippov, On the acyclicity of solution sets of ordinary differential equations,
Dokl. Akad. Nauk, 1997, Volume 352, Number 1, 28–31

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 352, № 1, с. 28–31

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91+517.927

ОБ АЦИКЛИЧНОСТИ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 1997 г. В. В. Филиппов

Представлено академиком С.П. Новиковым 21.12.94 г.

Поступило 11.01.95 г.

Теоремы об ацикличности множеств решений задачи Коши используются при доказательстве существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, когда нет теоремы единственности (см. [1]). В этом сообщении мы обсудим возможности доказательства выполнения этого условия и его положение при исследовании уравнений и включений со сложными разрывами правой части, а также (даже во вполне классических ситуациях с точки зрения строения правой части) при нестандартных возмущениях уравнения. Необходимый для этого аппарат нам дает подход [2–4].

Частью понятий и обозначений из [2] мы будем пользоваться без дополнительных пояснений (см. также [3, 4]). Напомним некоторые основные обозначения из [2–4].

Символ $R^i(U)$ обозначает множество всех $Z \subseteq C_s(U)$, удовлетворяющих условию: если $z \in Z$ и отрезок I лежит в области определения $\pi(z)$ функции z, то $z|_I \in Z$.

Символ $R(U)$ обозначает множество всех пространств $Z \in R^i(U)$, удовлетворяющих условию: если $z_1, z_2 \in Z$, $I = \pi(z_1) \cap \pi(z_2) \neq \varnothing$ и $z_1|_I = z_2|_I$, то функция

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t) & \text{при} \quad t \in \pi(z_1), \\ z_2(t) & \text{при} \quad t \in \pi(z_2), \end{cases}$$

определенная на отрезке $\pi(z_1) \cup \pi(z_2)$, принадлежит множеству Z.

Символ $s(U)$ обозначает множество всех последовательностей $\{Z_i: i = 1, 2, \ldots\} \subseteq R^i(U)$, удовлетворяющих условию: для любого $K \in \exp_c U$ любая последовательность функций $z_j \in (Z_{i_j})_K$, $j = 1, 2, \ldots, i_1 < i_2 < \ldots$, равностепенно непрерывна.

В рассматриваемом круге вопросов существенным является (по существу достаточно технический) вопрос об оценке длины интервала существования решений задачи Коши. Отметим следующую возможность получения этой оценки в духе идей [2–4] (см. также [5–7]).

Теорема 1. *Пусть*:

1) $r \geq 0$, $V_r = \{u: u \in \mathbb{R}^n, \|u\| > r\}$, $U_r =]a, b[\times V_r$, $Z \in R^i(U_r)$,

2) $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots, \lambda_i \to 0$ *при* $i \to \infty$, $\psi_i(t, y) = (t, \lambda_i y)$,

3) γ – *семейство открытых подмножеств области* U_r, *для любого элемента* V *которого*

$$\{(\tilde{\psi}_i(Z))_V: i = 1, 2, \ldots\} \in s(V),$$

4) $[t_0, t_1] \subseteq]a, b[$ *и для любой точки* $t \in [t_0, t_1]$ *все компоненты связности множества* $(\{t\} \times V_r) \setminus \cup \gamma$ *ограничены*.

Тогда множество значений любой функции из множества $M = \{z: z \in Z^- \cup Z^+, \pi(z) \subseteq [t_0, t_1]\}$ *является ограниченным*.

В силу леммы V.6.1 в [4] из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Пусть* $r \geq 0$, $V_r = \{u: u \in \mathbb{R}^n, \|u\| > r\}$, $U_r =]a, b[\times V_r$, $U =]a, b[\times \mathbb{R}^n$ *и* $Z \in R_{ce}(U)$, *выполнены условия* 2)–4) *теоремы* 1.

Тогда, если область определения функции $z \in Z^{-+}$ *пересекается с отрезком* $[t_0, t_1]$, *то* $[t_0, t_1] \subseteq \pi(z)$.

Прямым следствием теоремы 1 является также

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1), 2) *теоремы* 1,

5) $Z_\infty \in R^i(U_r)$,

6) γ – *семейство открытых подмножеств области* U_r, *для любого элемента* V *которого*

$$(\tilde{\psi}_i(Z))_V \to (Z_\infty)_V \text{ при } i \to \infty,$$

и условие 4).

Тогда множество значений любой функции из множества $M = \{z: z \in Z^- \cup Z^+, \pi(z) \subseteq [t_0, t_1]\}$ *является ограниченным*.

В силу леммы V.6.1 в [4] из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Пусть* $r \geq 0$, $V_r = \{u: u \in \mathbb{R}^n, \|u\| > r\}$, $U_r =]a, b[\times V_r$, $U =]a, b[\times \mathbb{R}^n$ *и* $Z \in R_{ce}(U)$, *и выполнены условия* 2), 5), 6) *и* 4).

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Тогда, если область определения функции $z \in Z^{-+}$ *пересекается с отрезком* $[t_0, t_1]$, *то* $[t_0, t_1] \subseteq \pi(z)$.

Наиболее сильной оценкой тривиальности (с гомологической точки зрения) строения множества решений задачи Коши является теорема Ароншайна [8] (см. также [9]). Следующий результат, видимо, есть максимальное обобщение теоремы Ароншайна (с сохранением содержания утверждения).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 6)–8).

7) U – *открытое подмножество произведения* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

8) $(a, y_0) \in U$,

9) $Z \in [R_{ceu}(U)]$ $(\subseteq R_c(U))$,

10) $b > a$ *и* $[a, b] \subseteq \pi(z)$ *для любого решения* z *задачи Коши* $z \in Z^{-+}$, $z(a) = y_0$.

Тогда множество S *является пересечением невозрастающей последовательности стягиваемых компактных подмножеств пространства*

$$\Lambda = \{z\colon z \in C([a, b], \mathbb{R}^n), \mathrm{Gr}(z) \subseteq U\}.$$

(Условие 9) является очень существенным ослаблением аппроксимации правой части, использованной Л. Гурневичем в [9].)

Перейдем к основной теме заметки. Пусть выполнены условия 6) и 7) и

11) $b > a$.

Наша ближайшая цель научиться доказывать ацикличность множеств

$$S_Z(y_0; a, b) = \{z\colon z \in Z, \pi(z) = [a, b], z(a) = y_0\},$$

т.е. выполнение условия

(h) в обозначениях 7), 8)

$$H_i(S_Z(y_0; a, b)) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \end{cases}$$

для любой точки $(a, y_0) \in U$ и любого отрезка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию

12) $[a, b] \subseteq \pi(z)$ для любого решения задачи Коши $z \in Z^{-+}$, $z(a) = y_0$.

Здесь и ниже имеются в виду рациональные гомологии, см. также [1].

Следующие два утверждения сильно облегчают доказательство выполнения условия (h) при исследовании уравнений и включений со сложными правыми частями.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* 7). *Тогда множество* $R_{ceh}(U)$ *замкнуто в пространстве* $R_c(U)$.

(Здесь в соответствии с общей схемой обозначений [2–4] запись $R_*(U)$ означает множество всех пространств $Z \in R(U)$, удовлетворяющих условиям из списка $*$.)

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* 7), $Z \in R_{ce}(U)$, γ – *открытое покрытие области* U_r, *для любого элемента* V *которого* $Z_V \in R_h(V)$.

Тогда $Z \in R_h(U)$.

Внесем в схему понятий из [1] необходимые нам изменения. Предположим, что выполнено условие 7),

13) $[t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$,

14) $-\infty < c \leq d < \infty$, $S^{n-1} = \{u\colon u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1\}$ (= единичная сфера пространства $\mathbb{R}^n$), $X_0 = [c, d] \times S^{n-1}$,

15) для $s \in [c, d]$ $Z_s \in R_{ce}(U)$ и отображение $\psi\colon [c, d] \to R_c(U)$, заданное формулой $\psi(s) = Z_s$, непрерывно,

16) функции $\theta_1, \theta_2\colon [c, d] \to [t_0, t_1]$ непрерывны, $\theta_1(s) < \theta_2(s)$ при любом $s \in [c, d]$,

17) $\varphi\colon X_0 \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение и

$$\{\theta_1(s)\} \times \varphi(\{s\} \times S^{n-1}) \subseteq U$$

при любом $s \in [c, d]$,

18) при любом $s \in [c, d]$ любое решение задачи Коши

$$z \in Z_s, \quad z(\theta_1(s)) \in \varphi(\{s\} \times S^{n-1})$$

продолжается на отрезок $[\theta_1(s), \theta_2(s)]$ и $z(\theta_2(s)) \neq z(\theta_1(s))$,

19) при любых $s \in [c, d]$ и $u \in S^{n-1}$ множество

$$\{z\colon z \in Z_s, \pi(z) = [\theta_1(s), \theta_2(s)], z(\theta_1(s)) = \varphi(s, u)\}$$

ациклично.

По лемме VII.1.1 в [4] при любом $s \in [c, d]$ множество

$$X(s) = \{z\colon z \in Z_s, \pi(z) = [\theta_1(s), \theta_2(s)],$$
$$z(\theta_1(s)) \in \varphi(\{s\} \times S^{n-1})\}$$

компактно. Из леммы VI.7.2 и теоремы II.5.1 в [4] следует полунепрерывность сверху отображения, сопоставляющего точке $s \in [c, d]$ компактное подмножество $X(s)$ пространства $C_s(U)$. Отсюда и из теоремы I.7.8 в [4] вытекает компактность множества $X_1 = \cup\{X(s)\colon s \in [c, d]\}$.

Множество

$$X = \{((s, u), z)\colon (s, u) \in X_0,$$
$$z \in X(s), z(\theta_1(s)) = \varphi(s, u)\}$$

является замкнутым подмножеством компакта $X_0 \times X_1$ и потому компактно.

Пусть $p\colon X \to X_0$ – отображение, порожденное проектированием $X_0 \times X_1 \to X_0$. Условие (19) означает ацикличность прообразов точек при отображении p.

В силу теоремы 1.2 из [1] гомоморфизмы

$$p_*\colon H_i(X) \to H_i(X_0),$$

порожденные непрерывным отображением p, являются изоморфизмами. Пусть

$$p_1 \colon H_i(X_0) \to H_i(X)$$

– обратные изоморфизмы.

Первая часть условия (18) означает, что при $s \in [c, d]$ и $z \in X(s)$ точка $q(s, u) = z(\theta_2(s)) - z(\theta_1(s))$ лежит в множестве $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$.

Таким образом, отображение $q \colon X \to Y$ порождает гомоморфизмы

$$q_* \colon H_i(X) \to H_i(Y).$$

Группы $H_{n-1}(X_0)$ и $H_{n-1}(Y)$ изоморфны группе $\mathbb{Q} = H_{n-1}(S^{n-1})$. Изоморфизм

$$H_{n-1}(X_0) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

порождается проектированием

$$X_0 = [c, d] \times S^{n-1} \to S^{n-1}.$$

Изоморфизм

$$H_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

порождается непрерывным отображением, заданным соответствием

$$u \to \frac{u}{\|u\|}.$$

Обозначим через e элементы этих групп, являющиеся образами единицы при указанных изоморфизмах. Образ элемента e группы $H_{n-1}(X_0)$ при гомоморфизме $q_* p_1$ имеет вид ke. Число k будем называть индексом семейства пространства Z_s относительно тройки $(\varphi, \theta_1, \theta_2)$ и обозначать $k(Z_s, \varphi, \theta_1, \theta_2)$.

Рассмотрим частный случай $c = d$. Здесь можно опустить упоминание об отрезке $[c, d]$ (он вырождается в одноточечное множество $\{c\}$), об отображениях θ_1, θ_2 и о полуинтервалах $[t_0, \theta_1(c)[$ и $]\theta_2(c), t_1]$, точки которых в этой ситуации в дальнейших рассмотрениях не участвуют, положив $\theta_1(c) = t_0$ и $\theta_2(c) = t_1$. Семейство пространств $\{Z_s \colon s \in [c, d]\}$ оказывается состоящим из одного пространства $Z = Z_c$. В этой ситуации число $k(Z_s, \varphi, \theta_1, \theta_2)$ будем называть индексом пространства Z относительно тройки отображения φ на отрезке $[t_0, t_1]$ и обозначать $k_1(Z, \varphi, t_0, t_1)$.

У т в е р ж д е н и е 1. *В предположениях* 7), 13)–19)

$$k_1(Z_c, \varphi_c, \theta_1(c), \theta_2(c)) = k_1(Z_d, \varphi_d, \theta_1(d), \theta_2(d)),$$

где φ_c – *отображение* $S^{n-1} \to X_0$, *заданное формулой* $\varphi_c(u) = \varphi(c, u)$, φ_d – *отображение* $S^{n-1} \to X_0$, *заданное формулой* $\varphi_d(u) = \varphi(d, u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вложения $i_c, i_d \colon S^{n-1} \to X_0$, заданные формулами $i_c(u) = (c, u)$ и $i_d(u) = (d, u)$, индуцируют одни и те же изоморфизмы групп гомологий

$$H_i(S^{n-1}) \to H_i(X_0),$$

что и дает требуемое.

Т е о р е м а 6. *Пусть выполнены условия* 7), 13), 14),

20) $Z \in R_{ceh}(U)$,

21) $\{Y_i \colon i = 1, 2, \ldots\} \subseteq R_{ceh}(U)$ *и* $Y_i \to Z$ *при* $i \to \infty$,

22) $\varphi_0 \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ – *непрерывное отображение и* $\{t_0\} \times \varphi_0(S^{n-1}) \subseteq U$,

23) *любое решение задачи Коши*

$$z \in Z, \quad z(t_0) \in \varphi_0(S^{n-1})$$

продолжается на отрезок $[t_0, t_1]$ *и при этом* $z(t_1) \neq z(t_0)$.

Тогда найдется такой индекс $i_0 = 1, 2, \ldots$, *что для любого* $i = i_0, i_0 + 1, \ldots$

а) *любое решение задачи Коши*

$$z \in Y_i, \quad z(t_0) \in \varphi_0(S^{n-1})$$

продолжается на отрезок $[t_0, t_1]$ *и при этом* $z(t_1) \neq z(t_0)$,

б) $k_1(Z, \varphi_0, t_0, t_1) = k_1(Y_i, \varphi_0, t_0, t_1)$.

С л е д с т в и е. *Пусть выполнены условия* 7), 13), 14), 20), 22), 23), $Y \in R_{ceh}(U)$ и $Y \subseteq Z$.

Тогда $k_1(Z, \varphi_0, t_0, t_1) = k_1(Y, \varphi_0, t_0, t_1)$.

Для получения следствия достаточно рассмотреть последовательность $Y_i \equiv Y$.

Пусть теперь

24) $-\infty < a < t_0 < t_1 < b < \infty$, $U =]a, b[\times \mathbb{R}^n$,

25) $K_r = \{u \colon u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \le r\}$, $S_r = \{u \colon u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = r\}$, отображение $\varphi_r \colon S^{n-1} \to S_r$ задано формулой $\varphi_r(u) = ru$,

26) любое решение задачи Коши

$$z \in Z, \quad z(t_0) \in K_r$$

продолжается на отрезок $[t_0, t_1]$.

В предположениях 24), 20) либо

27) найдется такая функция $z \in Z$, что $\pi(z) = [t_0, t_1]$ и $z(t_0) = z(t_1) \in S_r$,

либо определено число $k_1(Z, \varphi_r, t_0, t_1)$. В последнем случае в обозначениях (7), 13)–19) положим $c = 0$, $d = r$, $\psi(s) \equiv Z$, $\theta_1 \equiv t_0$, $\theta_2 \equiv t_1$, $\varphi(s, u) = \varphi_s(u)$ и либо

28) найдется такая функция $z \in Z$, что $\pi(z) = [t_0, t_1]$ и $z(t_0) = z(t_1) \in K_r$,

либо в силу утверждения 1 $k_1(Z, \varphi_r, t_0, t_1) = k_1(Z, \varphi_0, t_0, t_1)$. Но число $k_1(Z, \varphi_0, t_0, t_1)$ равно нулю и, таким образом, отличие от нуля числа $k_1(Z, \varphi_r, t_0, t_1)$ означает выполнение условия 28).

Значит, существование периодического решения будет установлено, если будет доказано, что $k_1(Z, \varphi_r, t_0, t_1) \neq 0$ при некотором $r > 0$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* 24)–26), 20), 2), $z(t_0) \neq z(t_1)$ *для любой функции* $z \in Z$, *удовлетворяющей условиям* $\pi(z) = [t_0, t_1]$ *и* $z(t_0) \in S_r$, *и* $k_1(Z, \varphi_r, t_0, t_1) \neq 0$,

$$Y \in R_{ceh}(U) \text{ и } \tilde{\psi}_i(Y) \to Z \text{ при } i \to \infty.$$

Тогда найдется такая функция $y \in Y$, *что* $\pi(y) = [t_0, t_1]$ *и* $y(t_0) = y(t_1)$.

Теорема 7 может быть использована при доказательстве следующего (известного) утверждения.

Теорема 8. *Пусть A – постоянная матрица n-го порядка и уравнение $y' = Ay$ не имеет периодических решений периода $\omega > 0$, отличных от нулевого, функция f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ измерима и периодична с периодом ω по первому аргументу (по “времени” $t \in \mathbb{R}$), непрерывны по второму аргументу (по “пространственному переменному” $y \in \mathbb{R}^n$) и существует такая локально интегрируемая по Лебегу неотрицательная функция $\varphi(t)$, что $\|f(t, y)\| \leq \varphi(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда уравнение $y' = Ay + f(t, y)$ имеет периодическое решение периода ω.*

Теорема 7 может применяться и непосредственно при исследовании уравнений.

Пример. Предположим выполненными предположения теоремы 8, возьмем $\alpha \in [0, 1[$ и зафиксируем любой вектор $u \in \mathbb{R}^n$ и для $y = (y_1, \ldots, y_n)$ положим

$$g(t, y) = \|y\|^{\alpha} |\sin t|^{\sin(\ln|y_1|) - \frac{|y_1|}{\|y\|} + 1},$$

доопределяя функцию g нулем там, где написанная формула теряет смысл.

Уравнение

$$y' = Ay + f(t, y) + ug(t, y) \qquad (*)$$

не входит в зону действия теоремы 8 хотя бы потому, что нельзя указать интегрируемую мажоранту φ (если $y = (y_1, 0, \ldots, 0)$ и $\sin(\ln|y_1|) = -1$, то функция $g(t, y)$ (с точностью до постоянных множителей) приобретает вид $|\sin t|^{-1}$).

Тем не менее теория [2–4] позволяет доказать теорему существования решения задачи Коши и наличия других необходимых свойств пространства решений уравнения (*), а из теоремы 7 мы получаем существование периодического решения уравнения (*) периода 2π.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bielawski R., Górniewicz L., Plaskacz S.* // Dynamics Reported. № 1 (New Ser.). Springer-Verlag, 1992. P. 225–250.
2. *Филиппов В.В.* // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 103–154.
3. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
4. *Филиппов В.В.* Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.
5. *Филиппов В.В.* // ДАН. 1993. Т. 330. № 6. С. 704–706.
6. *Филиппов В.В.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 1148–1155.
7. *Филиппов В.В.* // Там же. Т. 30. № 6. С. 1005–1009.
8. *Aronszajn N.* // Ann. Math. 1942. V. 43. P. 730–738.
9. *Górniewicz L.* // J. Math. Anal. and Appl. 1986. V. 113. № 1. P. 235–244.