Э.Б.Винберг

ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОБАЧЕВСКОГО БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Дискретные группы отражений в евклидовых пространствах хорошо известны и играют важную роль в теории полупростых групп Ли. Их классификация получена в 1934 г. Г.С.М.Кокстером [11].

Классификация дискретных групп отражений в пространствах Лобачевского вряд ли может быть получена в полной общности. Наиболее естественное ограничение состоит в требовании конечности объема фундаментального многогранника. При этом ограничении классификация дискретных групп отражений на плоскости Лобачевского получена в 1882 г. А.Пуанкаре [13], в трехмерном пространстве Лобачевского – в 1970 г. Е.М.Андреевым [1],[2]. Однако в пространствах Лобачевского большей размерности пока не классифицированы даже дискретные группы отражений с ограниченным фундаментальным многогранником, хотя известны многочисленные примеры таких групп [12],[4],[5],[9],[8]. В настоящей работе доказывается

ТЕОРЕМА. В n-мерном пространстве Лобачевского Λ^n при $n\geqslant 62$ не существует дискретных групп отражений с ограниченным фундаментальным многогранником.

Тем же методом, но технически намного сложнее, можно доказать справедливость аналогичного утверждения уже при $n\geqslant 30$ [6]. Отметим, что примеры дискретных групп отражений с ограниченным фундаментальным многогранником в пространстве Λ^n известны в настоящее время только при $n\leqslant 7$.

1°. Фундаментальный многогранник дискретной группы отражений обладает тем свойством, что все его двугранные углы являются целыми частями π. Такие многогранники мы будем называть многогранниками Кокстера. Мы докажем, что в пространстве Λ^n при $n\geqslant 62$ не существует ограниченных многогранников Кокстера, откуда и будет следовать сформулированная теорема.

Всякий ограниченный многогранник Кокстера является простым в том смысле, что многогранные углы при всех его вершинах симплициальны [4]. Пользуясь недавними результатами по комбинаторике выпуклых многогранников [14],[7], В.В.Никулин [10] получил верхнюю оценку для среднего числа l-мерных граней у k-мерной грани n-мерного простого выпуклого многогранника при $l<k\leqslant \frac{n+1}{2}$. При $k=2$, $l=0$ эта оценка имеет следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Среднее число вершин двумерной грани любого

n-мерного простого выпуклого многогранника меньше, чем

$$\begin{cases} \frac{4(n-1)}{n-2} & \text{при четном } n, \\ \frac{4n}{n-1} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Будем называть плоским углом многогранника P пару (A, F), где A – вершина, а F – содержащая ее двумерная грань. Будем говорить, что (A, F) – плоский угол при вершине A, а также что (A, F) – плоский угол грани F.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть P – n-мерный простой выпуклый многогранник и c – некоторое положительное число. Предположим, что плоские углы многогранника P можно снабдить весами таким образом, что (а) сумма $\sigma(A)$ весов плоских углов при любой вершине A не превосходит cn; (б) сумма $\sigma(F)$ весов плоских углов любой двумерной грани F не меньше, чем $5-k$, где k – число вершин этой грани. Тогда $n < 8c+6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a_0 – число вершин многогранника P, а a_2 – число его двумерных граней. Так как каждая вершина принадлежит $\binom{n}{2}$ двумерным граням, то среднее число вершин двумерной грани многогранника P равно $\gamma = \binom{n}{2} \cdot \frac{a_0}{a_2}$. Оценим двумя способами сумму σ весов всех плоских углов многогранника P. Из условия (а) следует, что

$$\sigma = \sum_A \sigma(A) \leqslant cna_0 = \frac{2c\gamma}{n-1} a_2,$$

а из условия (б) – что

$$\sigma = \sum_F \sigma(F) \geqslant \sum_k (5-k) a_{2,k} = (5-\gamma) a_2,$$

где $a_{2,k}$ – число k-угольных двумерных граней. Сопоставляя эти неравенства, находим:

$$5 - \gamma \leqslant \frac{2c\gamma}{n-1}. \qquad (I)$$

При четном n согласно предложению I имеем $\gamma < \frac{4(n-1)}{(n-2)}$, и из (I) получаем $n-6 < 8c$, что и требовалось доказать. При нечетном n имеем $\gamma < \frac{4n}{n-1}$, и из (I) получаем $(n-1)(n-5) < 8cn$; но так как $(n-1)(n-5) > n(n-6)$, то отсюда также следует доказываемое неравенство.

2^0. Существенную роль в доказательстве нашей теоремы будет играть язык схем Коксетера. Будем называть с х е м о й граф, каждому ребру которого приписан некоторый положительный вес. Число вершин схемы S будем называть ее п о р я д к о м и обозначать через $|S|$.

Пусть S – схема порядка m с вершинами $v_1,\dots,v_m$. Составим симметричную матрицу $A(S)=a_{ij}$ порядка m, в которой диагональные элементы равны единице, а элемент a_{ij} при $i\neq j$ равен весу ребра $v_i v_j$, взятому со знаком минус, если вершины v_i и v_j смежны, и нулю – в противном случае.

Схему S назовем э л л и п т и ч е с к о й, если матрица $A(S)$ положительно определенна, п а р а б о л и ч е с к о й, если матрица $A(S)$ положительно полуопределенна и для любой связной компоненты T схемы S матрица $A(T)$ вырождена, и г и п е р б о л и ч е с к о й, если матрица $A(S)$ имеет отрицательный индекс инерции единица. Очевидно, что всякая связная подсхема гиперболической схемы – либо эллиптическая, либо параболическая, либо гиперболическая. Среди связных компонент гиперболической схемы имеется ровно одна гиперболическая.

С х е м о й в ы п у к л о г о м н о г о г р а н н и к а P с двугранными углами $\leqslant\frac{\pi}{2}$ в n-мерном пространстве Евклида или Лобачевского назовем схему $S=S(P)$, определяемую по следующим правилам. Вершины схемы S соответствуют гиперплоскостям, ограничивающим P. Две вершины соединяются ребром, если соответствующие им гиперплоскости не ортогональны. Вес этого ребра равен минус косинусу угла между этими гиперплоскостями, если они пересекаются (в этом случае соответствующие $(n-1)$-мерные грани смежны [3]), минус единице, если они параллельны, и минус гиперболическому косинусу расстояния между ними, если они расходятся (в случае пространства Лобачевского).

При таком определении схемы S матрица $A(S)$ является матрицей Грама системы векторов евклидова или псевдоевклидова пространства, естественным образом связанной с многогранником P [4]. В частности, если P – многогранник в евклидовом пространстве, то матрица $A(S)$ положительно полуопределенна.

Для каждой грани F многогранника P обозначим через S_F подсхему схемы S, вершины которой соответствуют гиперплоскостям, содержащим F. Если P – ограниченный многогранник в n-мерном пространстве Лобачевского, то S – связная гиперболическая схема. Отображение $F\longmapsto S_F$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством граней многогранника P и множеством эллиптических подсхем схемы S; при этом $|S_F|=n-\dim F$. Кроме того, схема S не содержит параболических подсхем [4].

С х е м о й К о к с т е р а называется схема, вес каждого ребра которой либо ≥ 1 , либо имеет вид $\cos\frac{\pi}{m}$, где m – целое число ≥ 3 . (Графически ребро веса $\cos\frac{\pi}{m}$ изображают $(m-2)$-кратной линией или простой линией с отметкой m , ребро веса 1 – жирной линией или простой линией с отметкой ∞ , ребро веса >1 – пунктирной линией.) Очевидно, что многогранник P является многогранником Кокстера тогда и только тогда, когда $S(P)$ – схема Кокстера.

Классификация многогранников Кокстера в евклидовых пространствах равносильна классификации эллиптических и параболических схем Кокстера. Таблицы этих схем см., напр., в [11] или [5]. Для нас существенно то, что всякая эллиптическая схема Кокстера либо линейна, либо имеет один "отросток" длины 1 .

Классификация ограниченных симплексов Кокстера в пространствах Лобачевского равносильна классификации связных гиперболических схем Кокстера, все собственные подсхемы которых – эллиптические. Мы будем называть такие схемы ланнеровскими, по имени Ф.Ланнера, который впервые перечислил их в работе [12]. Таблица ланнеровских схем имеется в [5]. Для нас существенно то, что их порядки не превышают пяти. (Это означает, что ограниченные симплексы Кокстера в пространстве Λ^n существуют только при $n\leq 4$.)

3°. Будем называть расстоянием между вершинами u, v какого-либо графа S длину кратчайшего пути (составленного из ребер графа), соединяющего эти вершины. Если такого пути нет, что расстояние между данными вершинами будем считать бесконечным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любой эллиптической схемы Кокстера T порядка n число (неупорядоченных) пар вершин, находящихся на расстоянии $\leq c$, не превосходит cn .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение для связных схем. Кроме того, оно заведомо верно, если $n\leq 2c+1$, так как тогда число всех пар вершин не превосходит cn . Пусть теперь T – связная эллиптическая схема порядка $n\geq c+1$. Для любого $d\leq c$ число пар вершин, находящихся на расстоянии d , равно $n-d$, если схема линейна, и не превосходит $n-d+1$, если она имеет отросток. В любом случае это число не превосходит n , откуда и следует доказываемое утверждение.

4°. Пусть P – ограниченный выпуклый многогранник в n-мерном пространстве Лобачевского и S – его схема. Подсхемы S_1, S_2 схемы S будем называть ортогональными, если никакая вершина из S_1 не смежна ни с какой вершиной из S_2 .

Отметим, что схема S не может содержать двух ортогональных гиперболических подсхем.

Схемой плоского угла (A, F) многогранника P будем называть схему S_A (см.п.3^0), в которой выделены две "черные" вершины, соответствующие гиперплоскостям, не содержащим F. Отметим, что это эллиптическая схема порядка n.

Схемой звезды грани F многогранника P будем называть подсхему S_F^* схемы S, вершины которой соответствуют гиперплоскостям, имеющим общие точки с F. Вершины схемы S_F^*, принадлежащие подсхеме S_F, будем считать "белыми", а остальные вершины – "черными". Так как многогранные углы при вершинах многогранника P симплициальны, то гиперплоскости, отвечающие черным вершинам, пересекаются с F по граням на единицу меньшей размерности.

В дальнейшем мы будем рассматривать схемы звезд четырехугольных и треугольных двумерных граней. Отметим некоторые их свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть F – треугольная двумерная грань многогранника P. Тогда 1) при выкидывании из схемы S_F^* любой черной вершины получается схема одного из плоских углов грани F; 2) любая гиперболическая подсхема схемы S_F^* содержит все три черные вершины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) очевидно. Так как схема любого плоского угла – эллиптическая, то из 1) следует 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть F – четырехугольная двумерная грань многогранника P. Разобьем черные вершины схемы S_F^* на пары таким образом, чтобы к одной паре относились вершины, соответствующие противоположным сторонам грани F. Тогда 1) при выкидывании из схемы S_F^* любых двух черных вершин из разных пар получается схема одного из плоских углов грани F; 2) любая гиперболическая подсхема схемы S_F^* содержит обе черные вершины из некоторой пары; 3) при выкидывании из схемы S_F^* двух черных вершин из одной пары получается гиперболическая схема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) очевидно. Свойство 2) вытекает из 1). Свойство 3) следует из того, что $(n-1)$-мерные грани многогранника P, соответствующие всем белым вершинам схемы S_F^* и двум черным вершинам оставшейся пары, не имеют общей точки.

5^0. Припишем плоским углам многогранника P веса следующим образом: вес плоского угла будем считать равным единице, если черные вершины в его схеме находятся на расстоянии ≤ 7, и нулю – в противном случае. Мы проверим условия предложения 2 для константы $c = 7$, откуда и будет следовать, что $n < 62$.

Условие (а) вытекает из предложения 3. Условие (б) нужно проверять для треугольных и четырехугольных двумерных граней. Пусть F – треугольная двумерная грань многогранника P. Рассмотрим какую-нибудь минимальную гиперболическую посхему L схемы S_F^*. Очевидно, что это ланнеровская схема. Из предложения 4 следует, что она содержит все три черные вершины схемы S_F^*. Так как схема L связна, то в ней имеется не более одной черной вершины, разделяющей две другие. Иначе говоря, имеются хотя бы две черные вершины v, для каждой из которых две другие черные вершины находятся в одной связной компоненте схемы $L-v$, получающейся из схемы L выбрасыванием вершины v. Так как $|L-v|\leqslant 4$, то расстояние между черными вершинами в схеме $L-v$ и, значит, в схеме соответствующего плоского угла не превосходит 3. Тем самым доказано, что $\sigma(F)\geqslant 2$.

Пусть теперь F – четырехугольная двумерная грань многогранника P. Из предложения 5 следует, что каждая пара черных вершин схемы S_F^* содержится в некоторой ее ланнеровской подсхеме, не содержащей черных вершин другой пары. Пусть L и M – выбранные таким образом ланнеровские подсхемы. Они не могут быть ортогональны, то есть должны либо иметь общую вершину, либо быть соединены ребром. Так как L и M – связные схемы, то найдутся черные вершины u, v из разных пар, которые могут быть соединены в схеме $L\cup M$ путем, не содержащим других черных вершин. Так как число белых вершин схемы $L\cup M$ не превосходит 6, то длина этого пути не превосходит 7. Таким образом, черные вершины u, v находятся в схеме соответствующего плоского угла грани F на расстоянии $\leqslant 7$. Тем самым доказано, что $\sigma(F)\geqslant 1$.

Литература

1. А н д р е е в Е.М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского. – Мат.сб., 1970, т.81, № 3, с.445–478.
2. А н д р е е в Е.М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского. – Мат.сб., 1970,т.83,№2,с.256–260.
3. А н д р е е в Е.М. О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами. – Мат.заметки,1970,т.83,№4,с.521–527.
4. В и н б е р г Э.Б. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского. – Мат.сб.,1967,т.72, № 3, с.471–488.
5. В и н б е р г Э.Б. О группах единиц некоторых квадратичных форм. – Мат.сб., 1972, т.87, № 1, с.18–36.
6. В и н б е р г Э.Б. Отсутствие кристаллографических групп отражений компактного типа в пространстве Лобачевского размерно-

сти $\geqslant 30$. Деп. в ВИНИТИ I.УП.1982, № 3417-82 Деп., 51с.
7. Д а н и л о в В.И. Геометрия торических многообразий. – Успехи мат.наук, 1978, т.33, № 2, с.85-134.
8. К а п л и н с к а я И.М. О дискретных группах, порожденных отражениями в гранях симплициальных призм в пространствах Лобачевского. – Мат.заметки, 1974, т.15, № I, с.159-164.
9. М а к а р о в В.С. О федоровских группах четырехмерного и пятимерного пространств Лобачевского. – Исследования по общей алгебре, Кишиневский ун-т, 1970, с.120-129.
10. Н и к у л и н В.В. О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. – Изв. АН СССР, сер.матем., 1981, т.45, № I, с.113-142.
11. C o x e t e r H.S.M. Discrete groups generated by reflections. – Ann.Math., 1934, vol.35, N 3, p.588-621.
12. L a n n e r F. On complexes with transitive groups of automorphisms. – Comm.Sem.Math.Univ.Lund, 1950, vol.11, p.1-71.
13. P o i n c a r e H. Theorie des groupes fuchsiennes. – Acta math., 1882, vol.1, p.1-62. (Русский перевод в книге А.Пуанкаре. Избранные труды, т.3. М., "Наука", 1974, с.9-62.)
14. S t a n l e y R.P. The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings. – Studies in Appl.Math., 1975, vol.54, N 2, p.135-142.