И. Ф. Авдеев, Уточнение остатка в приближенном функциональном уравнении, *Чебышевский сб.*, 2012, том 13, выпуск 2, 8–11

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 2 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 511.331.1

УТОЧНЕНИЕ ОСТАТКА В ПРИБЛИЖЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

И. Ф. Авдеев (г. Москва)

Аннотация

В данной работе получено уточнение остаточного члена в приближенном функциональном уравнении Харди - Литтлвуда для $\zeta(s)$.

Исследования поведения дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в критической полосе существенным образом опираются на ее приближения отрезком ряда Дирихле. Впервые такое приближение было получено в 1921 году в работе Харди и Литтлвуда. [1]

Основной результат данной работы состоял в доказательстве равенства вида (приближенное функциональное уравнение Харди-Литтлвуда)

$$\zeta(s) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O\left(x^{-\sigma}\right) \tag{1}$$

при условиях

$$\mathrm{Re\,s} = \sigma > 0, \mathrm{t} > 0, \mathrm{x} \geqslant \frac{\mathrm{t}}{\pi} > 4, \mathrm{t} = \mathrm{Im\,s}.$$

Порядок остаточного члена в уравнении (1), вообще говоря, улучшению не подлежит, однако, рассматривая только полуцелые значения x остаточный член допускает понижение порядка.

Уточнение остатка в формуле (1) получим за счет явного выписывания его формы.

Введем обозначения

$$\rho_r(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi k y}{(2\pi k)^r}, & r - \text{четное}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k y}{(2\pi k)^r}, & r - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если x число полуцелое, то в предложенных выше условиях справедливо равенство*

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} - s\frac{\zeta(2)}{4\pi^2 x^{s+1}} + R, \tag{2}$$

где

$$R = s(s+1)\int_x^\infty \frac{1}{y^{s+2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi k y}{2\pi^2 k^2} dy = 2s\,(s+1)\int_x^\infty \frac{\rho_2\,(y)}{y^{s+2}} dy,$$

$$|R| \leqslant \frac{t+1}{x}\frac{t+2}{x}\frac{2x^{-\sigma}}{\pi^3}.$$

Доказательство приведенной леммы опирается на иное представлении функции $\zeta(s)$ основанное на формуле суммирования Сонина [2], вместо формулы суммирования Эйлера.

Подробное доказательство леммы проведено автором в журнале „Ученые записки Орловского государственного университета" за май 2012 года.

Используя приведенную выше лемму, получим дальнейшее улучшение остатка в формуле (1).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если x число полуцелое, то в предложенных выше обозначениях справедливо равенство*

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + \frac{s\zeta(2)}{4\pi^2 x^{s+1}} + \frac{s(s+1)(s+2)}{x^{s+3}2^3\pi^4}\zeta(4)\left(1-\frac{1}{2^3}\right) + R_4$$

где

$$R_4 = \frac{1}{2}\ s(s+1)(s+2)(s+3)\int_x^\infty \frac{\rho_4(y)}{y^{s+4}} dy =$$
$$= s(s+1)(s+2)(s+3)\int_x^\infty \frac{1}{y^{s+4}} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi k y}{8\pi^4 k^4} dy.$$

Доказательство.

Выполним интегрирование по частям в выражении для R в формуле (2), получим

$$R = s(s+1)\int_x^\infty \frac{1}{y^{s+2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi k y}{2\pi^2 k^2} dy =$$
$$= s(s+1)\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\pi^2 k^2}\int_x^\infty \frac{\cos 2\pi k y}{y^{s+2}} dy = s(s+1)\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4\pi^3 k^3}\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}(\sin 2\pi k y)}{y^{s+2}}.$$

Применяя интегрирование по частям, учитывая что

$$U=\frac{1}{y^{s+2}},\ dV=\mathrm{d}(\sin 2\pi ky)$$

$$dU=\frac{-(s+2)}{y^{s+3}},\ V=sin2\pi ky.$$

Имеем

$$R=s\left(s+1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi^3k^3}\left(\left.\frac{sin2\pi ky}{y^{s+2}2\pi k}\right|_x^{\infty}+\left(s+2\right)\int_x^{\infty}\frac{sin2\pi ky}{y^{s+3}}dy\right)=$$

$$=s\left(s+1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi^3k^3}\left(\left(s+2\right)\int_x^{\infty}\frac{sin2\pi ky}{y^{s+3}}dy-\frac{sin2\pi kx}{x^{s+2}}\right).$$

Поскольку x — полуцелое, т.е. $x=M+1/2$, то получим

$$\frac{sin2\pi kx}{x^{s+2}}=\frac{sin2\pi k\left(M+1/2\right)}{\left(M+1/2\right)^{s+2}}=\frac{sin\left(2\pi kM+\pi k\right)}{\left(M+1/2\right)^{s+2}}=0.$$

Следовательно

$$R=\ s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi^3k^3}\int_x^{\infty}\frac{sin2\pi ky}{y^{s+3}}dy=$$

$$=s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi^3k^3}\frac{1}{2\pi k}\int_x^{\infty}\frac{d\left(cos2\pi ky\right)}{y^{s+3}}=$$

$$=s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi^3k^3}\frac{1}{2\pi k}\left(\left.\frac{cos2\pi ky}{y^{s+3}}\right|_x^{\infty}+\left(s+3\right)\int_x^{\infty}\frac{cos2\pi ky}{y^{s+4}}dy\right)=$$

$$=s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8\pi^4k^4}\left.\frac{cos2\pi ky}{y^{s+3}}\right|_x^{\infty}+$$

$$+s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\left(s+3\right)\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\frac{1}{y^{s+4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos2\pi ky}{2\pi^4k^4}dy=$$

$$s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8\pi^4k^4}\left.\frac{cos2\pi ky}{y^{s+3}}\right|_x^{\infty}+$$

$$s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\left(s+3\right)\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\frac{1}{y^{s+4}}\rho_4\left(y\right)dy=$$

$$=-s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8\pi^4k^4}\frac{cos2\pi kx}{x^{s+3}}+\frac{1}{2}s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\left(s+3\right)\int_x^{\infty}\frac{\rho_4\left(y\right)}{y^{s+4}}dy.$$

Теперь вычислим значение суммы при $x = M + 1/2$.

Получим

$$- s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8\pi^4k^4}\frac{cos\left(2\pi kM+\pi k\right)}{x^{s+3}}+$$
$$+\frac{1}{2}s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\left(s+3\right)\int_x^{\infty}\frac{\rho_4\left(y\right)}{y^{s+4}}dy=$$
$$=\frac{-s(s+1)(s+2)}{x^{s+3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8\pi^4k^4}(-1)^k+\frac{1}{2}s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\left(s+3\right)\int_x^{\infty}\frac{\rho_4\left(y\right)}{y^{s+4}}dy.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k^4}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k\right)^4}=-\zeta\left(4\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right).$$

Имеем

$$R=\frac{s(s+1)(s+2)}{x^{s+3}2^3\pi^4}\zeta\left(4\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{2}s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\left(s+3\right)\int_x^{\infty}\frac{\rho_4\left(y\right)}{y^{s+4}}dy.$$

В результате, подставляя полученные выражения в формулу (2), получаем утверждение теоремы.

Заметим, что интегральный член последнего выражения в R_4 оценивается величиной H, где $H = \dfrac{\left|s\left(s+1\right)\left(s+2\right)\right|}{600x^{\sigma+3}}$. Тем самым получено дальнейшее улучшение остаточного члена при условии, что $x > \left|s+2\right|$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math. Zs., 10 (1921), — С. 283 — 317.

[2] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981 г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Получено 28.03.2012