А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
СЕМИНАР

Том 6
Выпуск 3 РУКОВОДИТЕЛЬ А.И.МАЛЬЦЕВ 1967 г.

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В.П.ШУНКОВ

Знаменитая теорема Фробениуса [1] допускает следующую формулировку:

Пусть G - конечная группа, H - её собственная подгруппа. Если подгруппа H совпадает со своим нормализатором и взаимно проста со всеми с ней сопряженными (отличными от неё) подгруппами, то совокупность элементов группы G, не принадлежащих подгруппам, сопряженным с H, вместе с единицей составляет нормальный делитель.

В настоящей статье эта теорема обобщается на тот случай, когда G - периодическая группа с конечной подгруппой H чётного порядка, удовлетворяющей условиям вышесформулированной теоремы, причём доказательство теоремы 2 (§ 2) для бесконечного случая не зависит от теоремы Фробениуса.

Теоремы 1 и 2 развивают некоторые идеи доклада автора, прочитанного в октябре 1966 года на Батумском симпозиуме, посвященном памяти Отто Юльевича Шмидта.

§ 1.

Группу (конечную или бесконечную) будем называть группой чётного порядка, если она содержит инволюции, и группой нечётного порядка, если она инволюций не содержит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подгруппа H некоторой группы G 2-взаимно проста со всеми своими сопряженными, если она пересекается с любой другой, с ней сопряженной в G, подгруппой, отличной от неё, по подгруппе нечётного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент g некоторой группы G называется строго вещественным относительно инволюции t, если $t^{-1}gt=g^{-1}$.

ЛЕММА 1. *Пусть G - периодическая группа, H - её собственная подгруппа чётного порядка, совпадающая со своим нормализатором.*

Если подгруппа H 2-взаимно проста со своими сопряженными, то между множеством инволюций из H и некоторым множеством инволюций любого смежного класса Hg, $g\in G$, можно установить взаимно однозначное соответствие. Если G - конечная группа, то число инволюций из H совпадает с числом инволюций из Hg.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i - некоторая инволюция из H, $\mathfrak{M}$ - множество всех инволюций из H.

Обозначим через C_j элемент $C_j = ig^{-1}jg$, где j - любая инволюция из $\mathfrak{M}$. Если $g\in H$, то $Hg=H$ и утверждение леммы очевидно.

Пусть $g\notin H$, но тогда $|C_j|$ - нечётное число. Действительно, если бы порядок элемента C_j был бы чётен, то из условия леммы вытекало бы, что $C_j \in H$ и пересечение $H\cap g^{-1}Hg$ было бы чётным, что невозможно.

Итак, порядок элемента C_j нечётен, а потому для некоторого числа $r_j > 0$

$$C_j^{-r_j}\, i\, C_j^{r_j} = g^{-1}jg.$$

Отсюда и из условий леммы следует, что

$$c_j^{z_j} g^{-1} = h_j \in H, \quad c_j^{z_j} = h_j g.$$

Очевидно, $i_1 = i c_j^{z_j}$ - инволюция из Hg. Если множество $\mathfrak{M}$ состоит из одной инволюции i, то соответствие, о котором говорится в лемме, найдено.

Пусть в множестве $\mathfrak{M}$ содержится более чем один элемент, и j' - инволюция из $\mathfrak{M}$, отличная от j. Как и выше, можно показать существование такого элемента $c_{j'}^{z_{j'}} = h_{j'} g$, что

$$c_{j'}^{-z_{j'}} i \, c_{j'}^{z_{j'}} = g^{-1} j' g.$$

Элемент $i_2 = i c_{j'}^{z_{j'}}$ - инволюция из Hg. Допустим, что $i_1 = i_2$. Из этого равенства вытекает

$$c_j^{z_j} = c_{j'}^{z_{j'}}$$

а из последнего равенства, ввиду выбора элементов $c_j^{z_j}$, $c_{j'}^{z_{j'}}$, получаем $j = j'$, что невозможно, так как $j \neq j'$. Таким образом, мы доказали, что соответствие

$$j \to i_1$$

является взаимно однозначным отображением множества всех инволюций из H на некоторое подмножество инволюций из Hg.

Пусть теперь G - конечная группа, $n = [G : H]$, k - число инволюций из H. Из условий леммы вытекает, что общее число инволюций в G равно $s = nk$. Пусть Hg - любой смежный класс. Выше было доказано, что множество инволюций из H эквивалентно некоторому подмножеству инволюций из Hg. Отсюда следует, что число инволюций из Hg не меньше числа k. Однако оно не может быть строго больше числа k. В противном случае число инволюций в G, ввиду $s = nk$, было бы больше s, что невозможно.

Лемма доказана.

Отметим здесь, что, когда группа G конечна, доказанная лемма при некоторых дополнительных ограничениях (подгруппа H изолирована) неявно содержится в работе [2].

ЛЕММА 2. Пусть G - группа, H - её подгруппа, удовлетворяющие условиям леммы 1. Тогда

1) любой элемент $g \in G$ обладает представлением $g = hj$, $h \in H$, j – некоторая инволюция из G;

2) для любой инволюции $j \in G$, $j \notin H$ в подгруппе H существует некоторое множество $\mathfrak{A}$ различных элементов той же мощности, что и мощность множества инволюций из H, что для каждого элемента $a \in \mathfrak{A}$ имеет место соотношение: $j^{-1}aj = a^{-1}$;

3) все инволюции из H сопряжены в H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 1, в смежном классе Hg существует инволюция j. Но тогда, очевидно, $g = hj$, $h \in H$. Далее, по лемме 1 в Hg существует множество инволюций $\mathfrak{M}(g)$, эквивалентное множеству всех инволюций $\mathfrak{M}$ из H. Пусть i_1 и i_2 – две различные инволюции из $\mathfrak{M}(g)$. По вышедоказанному

$$i_1 = h_1 j, \quad i_2 = h_2 j,$$

где $h_1, h_2 \in H$. Очевидно, $h_1 \neq h_2$ и

$$j^{-1}h_1 j = h_1^{-1}, \quad j^{-1}h_2 j = h_2^{-1}.$$

Для каждой инволюции $i \in \mathfrak{M}(g)$ существует единственный элемент $h \in H$, для которого $i = hj$. Множество $\mathfrak{A}$ таких элементов эквивалентно $\mathfrak{M}(g)$, а это означает, что оно будет эквивалентно также множеству $\mathfrak{M}$.

Что касается утверждения 3) леммы 2, то оно вытекает из 2 – взаимной простоты подгруппы N и из условия леммы: $N_G(H) = H$

Лемма доказана

Пусть G – периодическая группа, i и k – её некоторые различные инволюции.

Множество $M(i,k)$ строго вещественных элементов нечётного порядка, содержащее единицу группы, относительно инволюции i, назовём 2-свободным, если для любого элемента $c \in M(i,k)$ элемент $s = ic^{-1}kc$ имеет нечётный порядок и множество $M(i,k)$

не содержится ни в каком большем множестве элементов группы G с перечисленными выше свойствами.

В частности, когда $C=1$, то элемент $b=ik$ имеет нечётный порядок и, следовательно, существует такой элемент $a\in\{b\}$, что $a^{-1}ka=i$.

ЛЕММА 3. 2-свободное множество $\mathcal{M}(i,k)$ можно представить в виде теоретико-множественной суммы подмножеств $\mathcal{M}_\alpha, \alpha\in\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{M}(i,k)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}}\mathcal{M}_\alpha, \tag{1}$$

обладающих следующими свойствами:

1) подмножества $\mathcal{M}_\alpha, \alpha\in\mathfrak{M}$, попарно не пересекаются;

2) для каждого $\mathcal{M}_\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{M}$, существует такой элемент $\tau_\alpha\in C_G(k)$, что все элементы из $\tau_\alpha\mathcal{M}_\alpha$ строго вещественны относительно инволюции $j=i\alpha^{-1}$, причём если $\alpha\neq\beta$, то $\tau_\alpha\neq\tau_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C - произвольный элемент из $\mathcal{M}(i,k)$. Рассмотрим элемент $S=ic^{-1}kc$. Так как порядок элемента S нечётен, то для некоторого элемента $S_1\in\{S\}$ будем иметь

$$S_1^{-1}c^{-1}kcS_1=i.$$

С другой стороны, $a^{-1}ka=i$. Из последних двух равенств получаем

$$aS_1^{-1}c^{-1}kcS_1a^{-1}=k.$$

Следовательно,

$$cS_1a^{-1}=h\in C_G(k),\quad S_1=c^{-1}ha.$$

Пусть $g=c^{-1}h$. Тогда $S_1=ga$. Протрансформируем последнее равенство с помощью инволюции

$$i:\quad i^{-1}S_1i=i^{-1}gii^{-1}ai.$$

Ввиду строгой вещественности элементов S_1 и a относительно инволюции i, получим

$$S_1^{-1} = a^{-1}g^{-1} = i^{-1}gia^{-1}$$

или

$$ai^{-1}gia^{-1} = g^{-1}.$$

Очевидно, $j = ia^{-1}$ – инволюция и

$$j^{-1}(h^{-1}c)j = (h^{-1}c)^{-1}.$$

Так как c – произвольный элемент из $\mathcal{M}(i,k)$, то мы доказали, что для любого элемента $c \in \mathcal{M}(i,k)$ существует такой элемент $\tau \in C_G(k)$, что $q = \tau c$ – строго вещественный элемент относительно инволюции $j = ia^{-1}$.

Отсюда, очевидно, вытекает справедливость леммы.

Лемма доказана.

В дальнейшем через $\mathcal{M}_1$ будем обозначать множество всех элементов из $\mathcal{M}(i,k)$, строго вещественных относительно инволюции $j = ia^{-1}$, и условимся считать $\tau_1 = 1$.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\mathcal{M}(i,k) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} \mathcal{M}_\alpha .$$

Если для некоторого α множество $\mathcal{M}_\alpha$ бесконечно, то централизатор элемента $d_\alpha = a^{-1}\tau_\alpha$ бесконечен и содержит все элементы вида cS^{-1}, где c и S – произвольные элементы из $\mathcal{M}_\alpha$, причём $k \notin C_G(d_\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 3 элементы вида $\tau_\alpha c$ и $\tau_\alpha S$ строго вещественны относительно инволюции $j = ia^{-1}$:

$$j^{-1}\tau_\alpha cj = c^{-1}\tau_\alpha^{-1},$$

$$j^{-1}\tau_\alpha Sj = S^{-1}\tau_\alpha^{-1},$$

$$j^{-1}(S^{-1}\tau_\alpha^{-1})j = \tau_\alpha S .$$

Из первого и последнего равенств получим :

$$j^{-1}s^{-1}cj = \tau_\alpha s c^{-1}\tau_\alpha^{-1}$$

или

$$a i^{-1}(s^{-1}c) i a^{-1} = \tau_\alpha s c^{-1}\tau_\alpha^{-1} \qquad (j = i a^{-1}) .$$

Так как элементы s и c строго вещественны относительно инволюции i , то из последнего равенства получим

$$\tau_\alpha^{-1}\, a(sc^{-1})a^{-1}\tau_\alpha = sc^{-1}.$$

Очевидно, совокупность элементов вида sc^{-1} , где $s, c \in M_\alpha$, бесконечна и, следовательно, централизатор элемента $d_\alpha = a^{-1}\tau_\alpha$ бесконечен, причём $k \notin C_G(d_\alpha)$.

Действительно, допустим, что $k \in C_G(d_\alpha)$, то есть

$$k^{-1}d_\alpha k = k^{-1}a^{-1}kk^{-1}\tau_\alpha k = d_\alpha .$$

Так как $\tau_\alpha \in C_G(k)$, то из перестановочности элементов τ_α и k получим

$$k^{-1}a^{-1}k\,\tau_\alpha = a^{-1}\tau_\alpha \quad \text{или} \quad k^{-1}a^{-1}k = a^{-1}.$$

Последнее равенство невозможно, так как по предположению $a^{-1}ka = i \neq k$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G - бесконечная периодическая группа, k - её инволюция. Тогда либо централизатор некоторой инволюции из G бесконечен, либо в G существует бесконечная подгруппа с нетривиальным центром, не содержащая инволюции k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C_G(k)$ - бесконечная группа, то утверждение теоремы справедливо.

Пусть $C_G(k)$ - конечная группа. Если для любой инволюции $t \in G$ элемент tk имел бы чётный порядок, то из конечности централизатора $C_G(k)$ и бесконечности группы G , очевидно, вытекало бы существование инволюции с бесконечным централизатором в G , Пусть для некоторой инволюции $i \in G$ элемент $b = ik$ нечётного порядка, причём $k \neq i$.

Обозначим через T множество всех строго вещественных элементов нечётного порядка группы G относительно инволюции i.

Из тех же соображений, что и выше относительно элементов вида ik, вытекает бесконечность множества T. Далее, очевидно, что в T существует лишь конечное число элементов, для которых порядки элементов вида: $u = ib^{-1}kb$, $b \in T$ чётны. Выбрасывая такие элементы из T, мы получим бесконечное 2-свободное множество $M(i,k)$.

Так как $C_G(k)$ – конечная группа, то $M(i,k) = M_1 + M_2 + \dots + M_n$, где M_e $(e = 1, 2, \dots, n)$ – подмножества, определенные в лемме 3.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, остаётся применить леммы 3 и 4.

Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. При некотором ограничении, накладываемом на мощность группы G, метод доказательства теоремы 1 позволяет установить существование в группе G собственных подгрупп мощности группы G, если только силовская 2-подгруппа группы G не инвариантна в G.

§ 2.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G – периодическая группа, H – её некоторая собственная конечная подгруппа чётного порядка.*

Если подгруппа H совпадает со своим нормализатором и взаимно проста со всеми с ней сопряженными подгруппами (отличными от неё), то совокупность элементов группы G, не принадлежащих подгруппам, сопряженным с H, вместе с единицей составляет абелев нормальный делитель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Когда группа G конечна, то теорема 2 является частным случаем хорошо известной теоремы Фробениуса.

Пусть G – бесконечная группа. Ввиду леммы 2 и условий теоремы 2, подгруппа H обладает единственной инволюцией. Обозначим её через k. Тогда для любой другой инволюции i элемент $b=ik\neq 1$ и нечётного порядка, а для некоторого элемента $a\in\{b\}$ будем иметь $a^{-1}ka=i$.

Так как централизатор любой инволюции конечен, то группа G обладает бесконечным 2-свободным множеством $M(i,k)$, очевидно, совпадающим с множеством всех строго вещественных элементов нечётного порядка относительно инволюции i.

$$M(i,k)=M_1+M_2+\ldots+M_n,$$

где M_e $(e=1,2,\ldots,n)$ – множества, определенные в лемме 3.

ЛЕММА 5. Если $H=\{k\}$, то утверждение теоремы 2 справедливо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 1 и 2, в каждом смежном классе Hg существует строго вещественный элемент нечётного порядка относительно инволюции k.

Пусть C и S – два таких элемента. Рассмотрим элемент $S^{-1}CS$. Он имеет нечётный порядок. Для некоторого строго вещественного элемента g $S^{-1}cS\in Hg$, $S^{-1}cS=hg$, где $h\in H$.

Если бы $h=k$, то элемент $S^{-1}cS$ -инволюция, что невозможно. Следовательно, $h=1$ и $S^{-1}cS=g$.

Так как элементы S, c, g строго вещественны относительно инволюции k, то $k^{-1}(S^{-1}cS)k=k^{-1}gk=g^{-1}$. С другой стороны, $k^{-1}(S^{-1}cS)k=k^{-1}S^{-1}kk^{-1}ckk^{-1}Sk=Sc^{-1}S^{-1}$. Отсюда $g^{-1}=S^{-1}c^{-1}S=Sc^{-1}S^{-1}$, $c^{-1}=S^2c^{-1}S^{-2}$. Так как элемент S нечётного порядка, то $cS=Sc$. Группа G порождается инволюцией k и всеми строго вещественными элементами нечётного порядка относительно инволюции k. Отсюда, очевидно, вытекает справедливость леммы 5.

ЛЕММА 6. Пусть T – бесконечная абелева подгруппа из G, все элементы которой строго вещественны относительно инволюции i. Тогда $T\subseteq M_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T – бесконечная группа, то для некоторого e пересечение $T\cap M_e$ состоит более, чем из одного элемента.

Пусть c и s – два различных элемента из $T\cap \mathcal{M}_e$ и $h=cs^{-1}$.

Так как $h\neq 1$ и $i^{-1}hi=h^{-1}$, то ввиду условий теоремы 2 и леммы 5, $C_G(h)$ – абелева группа, причём $T<C_G(h)$ и каждый элемент из $C_G(h)$ строго вещественный относительно инволюции i. По лемме 4 элемент $d=a^{-1}\tau_e\in C_G(h)$. Следовательно, $i^{-1}di=d^{-1}$. Так как элемент a строго вещественный относительно i, то $i^{-1}a^{-1}\tau_e i=ai^{-1}\tau_e i=\tau_e^{-1}a$. Отсюда $j^{-1}\tau_e j=\tau_e^{-1}$. Последнее равенство возможно только при условии $\tau_e=1$, так как $\tau_e\in H$ и $j\notin H$.

Лемма доказана.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2. Так как $\mathcal{M}(i,k)$ бесконечно, а число подмножеств $\mathcal{M}_e$ $(e=1,2,\dots,n)$ конечно, то по крайней мере для некоторого числа q $\mathcal{M}_q$ бесконечно. Ввиду леммы 4, $C_G(d)$, $d=a^{-1}\tau_q$ бесконечен и содержит все элементы вида cs^{-1}, где $c,s\in\mathcal{M}_q$.

Покажем, что $C_G(d)$ – абелева группа и каждый элемент из $C_G(d)$ строго вещественный элемент относительно некоторой инволюции $t\in G$.

Пусть $h=cs^{-1}\neq 1$. Так как c и s строго вещественны относительно инволюции i, то элементы c и s можно представить в виде: $c=ii_1$, $s=ii_2$, $h=cs^{-1}=ii_1i_2i^{-1}$. Отсюда следует, что h строго вещественный относительно инволюции $t=ii_1i^{-1}$. Ввиду леммы 5, централизатор $C_G(h)$ – абелева группа и каждый элемент из $C_G(h)$ строго вещественный относительно инволюции t. Так как $d\in C_G(h)$, то $t^{-1}dt=d^{-1}$ и, следовательно, $C_G(h)=C_G(d)$ – бесконечная группа, все элементы которой строго вещественны относительно инволюции t. Очевидно, все инволюции в G сопряжены, в частности, инволюции i и t:

$$g^{-1}tg=i\,,\qquad g\in G\,.$$

Но тогда бесконечная абелева подгруппа $g^{-1}C_G(d)g=T$ состоит из строго вещественных элементов относительно инволюции i. По лемме 6 $T\subseteq\mathcal{M}_1$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{M}_1$ – бесконечная абелева подгруппа.

Очевидно, централизатор любого неединичного элемента из $\mathcal{M}_1$ в G содержится в $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_1=C_G(a)$.

Докажем, что $G = \mathcal{M}_1 \lambda H$. Допустим, что $G \neq \mathcal{M}_1 \lambda H$. Если все инволюции из G содержатся в $\mathcal{M}_1 \lambda \{k\}$, то, очевидно, $G = \mathcal{M}_1 \lambda H$. Пусть t – инволюция, не принадлежащая подгруппе $\mathcal{M}_1 \lambda \{k\}$. Рассмотрим элемент $b = kt$. Он имеет нечётный порядок и, следовательно, для некоторого элемента $c \in \{b\}$ будем иметь $c^{-1} t c = k$.

Из конечности $C_G(t)$ и леммы 3 вытекает, что

$$\mathcal{M}(k, t) = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{B}_n,$$

где $\mathcal{B}_e$ $(e = 1, 2, \dots, n)$ – подмножества, определенные в лемме 3, и $\mathcal{B}_1 \subseteq C_G(c)$. Аналогичными рассуждениями, которые были приведены для $\mathcal{M}_1$, можно показать, что $\mathcal{B}_1$ – бесконечная абелева подгруппа и централизатор любого неединичного элемента из $\mathcal{B}_1$ в G содержится в $\mathcal{B}_1$.

Все элементы из подгрупп $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{B}_1$ строго вещественны относительно инволюции k.

Рассмотрим 2-свободное множество $\mathcal{M}(k, i) = \bar{\mathcal{M}}_1 + \bar{\mathcal{M}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{M}}_n$. Очевидно, $\mathcal{M}_1 = \bar{\mathcal{M}}_1$. Ввиду леммы 6, $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$, но тогда $t \in \mathcal{M}_1 \lambda \{k\}$, что противоречит предположению $t \notin \mathcal{M}_1 \lambda \{k\}$.

Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. При некотором ограничении, накладываемом на мощность группы G, теорема 2 может быть доказана (тем же методом) для того случая, когда мощность подгруппы H строго меньше мощности группы G.

Поступила в редакцию
23. У. 1967 г.

Литература

1. М.Холл. Теория групп, М., ИЛ, 1963.

2. В.М.Бусаркин. Строение изолированных подгрупп в конечных группах. – Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. IУ, вып. 1, стр. 33–50.

A GENERALIZATION OF THE THEOREM OF FROBENIUS ON PERIODIC GROUPS

V.P.Shunkov (Krasnojarsk)

(Summary)

The well-known theorem of Frobenius is transferred on any periodic group G with a finite subgroup H of the even order which contains involutions, coincides with its normalizator and is coprime with its conjugated subgroups.