Ю. Г. Смирнов, М. А. Москалева, Обоснование численного метода решения задачи дифракции на пересекающихся телах и экранах, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2019, выпуск 4, 4–11

DOI: 10.21685/2072-3040-2019-4-1

УДК 517.3
DOI 10.21685/2072-3040-2019-4-1

Ю. Г. Смирнов, М. А. Москалева

ОБОСНОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТЕЛАХ И ЭКРАНАХ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Задачи дифракции электромагнитных волн на пересекающихся телах и экранах имеют большое значение при решении прикладных задач, связанных, например, с исследованием и оценкой зон радиопокрытия в контролируемых помещениях. Целями данной работы является доказательство гладкости решений интегродифференциальной системы, отвечающей исходной задаче, и обоснование численного метода решения исследуемой задачи.

Материалы и методы. Рассматриваемая задача дифракции сведена к системе интегродифференциальных уравнений при помощи теории потенциалов. Для исследования полученной системы применяются элементы теории псевдодифференциальных операторов.

Результаты. Доказана гладкость решений интегродифференциальной системы, отвечающей задаче дифракции электромагнитных волн на пересекающихся телах и экранах. Обосновано применение численного метода (схема Галеркина) для решения системы интегродифференциальных уравнений.

Выводы. Полученные результаты могут быть применены для решения различных прикладных задач в радиолокации, электронике, других областях электродинамики и техники.

Ключевые слова: дифракция электромагнитных волн, неоднородные анизотропные тела, идеально проводящие экраны, эллиптический оператор, система интегродифференциальных уравнений.

Yu. G. Smirnov, M. A. Moskaleva

SUBSTANTIATION OF THE NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE DIFFRACTION PROBLEM ON A SYSTEM OF INTERSECTING BODIES AND SCREENS

Abstract.

Background. The problems of electromagnetic wave diffraction on the intersecting bodies and screens are important for solving applied problems associated, for

[1] Работа поддержана РФФИ (грант № 18-31-00108).

example, with the study and radio coverage areas estimate in controlled rooms. The objectives of this study are to prove the smoothness of the solutions of the integro-differential system corresponding to the problem of electromagnetic waves diffraction on a system of intersecting bodies and screens, and to substantiate a numerical method for solving the problem under study.

Material and methods. The problem under investigation is reduced to a system of integro-differential equations using potential theory. The properties of the system are studied using pseudodifferential calculus in Sobolev spaces.

Results. The smoothness of the solutions of the obtained system is proved. The application of the numerical method (Galerkin scheme) for solving a system of integro-differential equations is substantiated.

Conclusions. The results can be applied to solve various applied problems in radiolocation, electronics, and other fields of electrodynamics and technology.

Keywords: electromagnetic wave diffraction, inhomogeneous anisotropic bodies, perfectly conducting screens, elliptic operator, a system of integral-differential equations.

Введение

В настоящее время происходит стремительное развитие радиотехники и радиоэлектроники. Сейчас любые технические средства оборудованы огромным количеством различных радиоэлектронных систем. Поэтому возникает проблема их электромагнитной совместимости. Для оценки электромагнитной обстановки (ЭМО) внутри и снаружи изделия широко применяются методы математического моделирования. Очень часто по объективным причинам эти методы являются единственно возможным способом провести такую оценку. Многие задачи анализа ЭМО сводятся к задачам дифракции электромагнитных волн. Поскольку аналитическое решение исследуемых задач, ввиду их достаточной сложности, не всегда представляется возможным, обоснование численных методов для приближенного решения задачи дифракции является актуальным.

В данной статье доказана эллиптичность матричного оператора системы интегродифференциальных уравнений, отвечающей задаче дифракции электромагнитных волн на пересекающихся телах и экранах. Благодаря доказанному свойству оператора обосновано применение проекционного метода (доказана сходимость метода в выбранных пространствах) для численного решения исходной задачи. Также с учетом доказанной эллиптичности задачи получены результаты о гладкости решений системы уравнений, соответствующей исследуемой задаче.

1. Постановка задачи дифракции

Пусть в однородном и изотропном пространстве $\mathbb{R}^3$ с постоянными значениями μ_e и ε_e такими, что

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0\,,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e \geq 0\,, \tag{1}$$

расположена система рассеивателей, представляющих собой пересекающиеся диэлектрические тела и бесконечно тонкие идеально проводящие экраны. На рис. 1 представлен пример подобной системы.

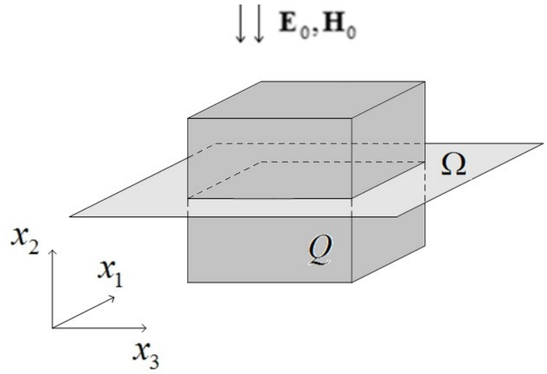

Рис. 1

Систему рассеивателей будем рассматривать как некоторую область Q с постоянной положительной магнитной проницаемостью μ_e.

Рассматриваемая область является объединением неоднородных анизотропных тел с кусочно-гладкой границей ∂Q [1] и попарно непересекающихся идеально проводящих экранов ($\bar{\Omega} \subset \partial Q$) с краями, имеющими трубчатые окрестности [2, 3].

Неоднородность задачи описывается тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$, причем $\varepsilon_{ij} \in C^{\infty}(\bar{Q})$. Всюду в $\bar{Q}$ для $\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon} / \varepsilon_e$ должно выполняться хотя бы одно из условий:

$$\operatorname{Re}\left(\hat{\varepsilon}_r(x) \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}\right) \geq C_1 |\mathrm{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1 \tag{2}$$

или

$$\operatorname{Im}\left(\hat{\varepsilon}_r(x) \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}\right) \geq C_2 |\mathrm{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \tag{3}$$

для всех $\mathrm{v} \in C^3$.

Требуется определить полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, удовлетворяющее в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$:

– уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_e \mathbf{H}; \end{cases} \tag{4}$$

– условиям непрерывности касательных компонент на неэкранированной части границы области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q'} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q'} = 0, \tag{5}$$

где $\partial Q' := \partial Q \setminus \bar{\Omega}$;

– краевому условию на поверхности экрана Ω (за исключением точек его края) [2]:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\Omega} = 0; \tag{6}$$

– условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3); \tag{7}$$

– условиям Сильвера – Мюллера [4]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = o(1/r), && \operatorname{Im} k > 0, \\ &\mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s = o(1/r), && \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s = o(1/r) \quad r \to \infty, \\ &\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = O(1/r), && \operatorname{Im} k = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

для рассеянного поля $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ ($r = |x|$, $\mathbf{e}_r = x / r$).

В пространстве $\mathbb{R}^3$ также должны выполняться условия гладкости:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(Q) \bigcap C^1\left(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}\right) \bigcap C\left(\overline{Q} \setminus \overline{\Omega}\right) \bigcap C\left(\left(\overline{Q}\right)^c \setminus \overline{\Omega}\right) \bigcap \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{P^+} \setminus \partial\Omega_\delta\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{P^-} \setminus \partial\Omega_\delta\right), \tag{9}$$

для полного электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$.

Полное поле представляется в виде суммы падающего и рассеянного полей. В качестве падающего поля будем рассматривать плоскую электромагнитную волну $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$. Поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ удовлетворяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 & = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 & = i\omega\mu_e \mathbf{H}_0. \end{cases}$$

Определение 1 [5]. Поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, для которого выполняются условия гладкости (9) и которое является решением задачи (4)–(8), будем называть квазиклассическим.

2. Система интегродифференциальных уравнений задачи дифракции

При использовании методов теории потенциалов исследуемую задачу можно свести к отвечающей ей системе интегродифференциальных уравнений. Подробно процесс сведения описан в работе [5]. Таким образом, система интегродифференциальных уравнений, которая соответствует исследуемой задаче дифракции на пересекающихся телах и экранах, имеет вид

$$\frac{1}{\overline{k}_e} \hat{\xi}(x) \mathbf{J}(x) - \frac{1}{\overline{k}_e}\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right) \int_Q G(x,y) \mathbf{J}(y)\, dy -$$

$$-\frac{1}{\overline{k}_e}\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right) \int_\Omega G(x,y) \mathbf{u}(y)\, ds_y = \frac{1}{\overline{k}_e} \mathbf{E}_0(x),\ x \in Q,$$

$$\left(-\left(k_e^2+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy-\right.$$

$$\left.-\left(k_e^2+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y\right)_\tau=\frac{1}{k_e}\mathbf{E}_{0,\tau}(x),\quad x\in\Omega. \qquad (10)$$

Здесь $k_e=\omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$ – волновое число свободного пространства; $\hat{\xi}(x)=\left(\hat{\varepsilon}_r(x)-\hat{\mathbf{I}}\right)^{-1}$ – параметр неоднородности тела; $\mathbf{J}=\left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0}-\hat{I}\right]\mathbf{E}$ – неизвестный вектор тока поляризации в Q; $\mathbf{u}$ – касательное векторное поле на Ω. Функцию Грина G удобно рассмотреть как сумму функций:

$$G(x,y)=G_0(x,y)+G_1(x,y),\text{ где } G_0(x,y)=\left(4\pi|x-y|\right)^{-1}.$$

Оператор системы (10) представим в виде разложения:

$$\hat{\mathcal{L}}=\hat{\mathcal{A}}+\hat{\mathcal{K}}^1+\hat{\mathcal{K}}^2, \qquad (11)$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{11}\mathbf{J}(x)=\frac{1}{k_e}\hat{\xi}(x)\mathbf{J}(x)-\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy;$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{12}\mathbf{u}(x)=-\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_\Omega G_0(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y,$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{21}\mathbf{J}(x)=\left(-\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy\right)_\tau,$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{22}\mathbf{u}(x)=\left(\left(k_e^2+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y\right)_\tau;$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{11}^1\mathbf{J}(x)=-\frac{k_e^2}{k_e}\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy,\ \hat{\mathcal{K}}_{12}^1\mathbf{u}(x)=-\frac{k_e^2}{k_e}\int\limits_\Omega G_0(x,y)\mathbf{u}(y)\,dy,$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{21}^1\mathbf{J}(x)=\left(-k_e\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy\right)_\tau,\ \hat{\mathcal{K}}_{22}^1\mathbf{u}(x)=\mathrm{O}.$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{11}^2\mathbf{J}(x)=\frac{1}{k_e}\hat{\xi}(x)\mathbf{J}(x)-\frac{1}{k_e}\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q G_1(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy,$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_{12}^{2}\mathbf{u}(x)=-\frac{1}{\overline{k}_e}\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{\Omega}G_1(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y,$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_{21}^{2}\mathbf{J}(x)=-\left(\left(k_e+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{Q}G_1(x,y)\mathbf{J}(y)dy\right)_{\tau},$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_{22}^{2}\mathbf{u}(x)=-\left(\left(k_e+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{\Omega}G_1(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\right)_{\tau}.$$

В работе [5] показана компактность операторов $\widehat{\mathcal{K}}^1$ и $\widehat{\mathcal{K}}^2$.

Для исследования свойств оператора полученной системы уравнений введем пространство $W=W\left(\overline{\Omega}\right)$ специального вида, являющееся пространством сечений векторных расслоений. Согласно этому действие матричного оператора $\widehat{\mathcal{L}}$ в пространствах Соболева на многообразиях с краем определяется как $\widehat{\mathcal{L}}:\mathbf{L}_2(Q)\times W\left(\overline{\Omega}\right)\to\mathbf{L}_2(Q)\times W'(\Omega)$.

3. Коэрцитивность квадратичной формы оператора задачи дифракции

Введем обозначения:

$$P:=\mathbf{L}_2(Q)\times W\left(\overline{\Omega}\right),\ P':=\mathbf{L}_2(Q)\times W'\left(\overline{\Omega}\right)\ \text{и}\ \mathbf{w}:=(\mathbf{J},\mathbf{u}),\ \mathbf{w}\in P.$$

Теорема 1. Квадратичная форма $\left\langle\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{w},\mathbf{w}\right\rangle$ оператора $\widehat{\mathcal{L}}$ является коэрцитивной, т.е. существует такой компактный оператор $\widehat{\mathcal{L}}^{c}:P\to P'$, что для всех $\mathbf{w}\in P$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Im}\left\langle\left(\widehat{\mathcal{L}}-\widehat{\mathcal{L}}^{c}\right)\mathbf{w},\mathbf{w}\right\rangle\geq\gamma\|\mathbf{w}\|_P^2 \qquad (12)$$

с некоторой константой $\gamma>0$.

Замечание. В (12) через $\langle\ ,\ \rangle$ мы обозначаем отношения антидвойственности на паре гильбертовых пространств H и антидвойственного H' к H. В формуле (12) $H=P$.

Теорема 2. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}:P\to P$ является эллиптическим и фредгольмовым с нулевым индексом, если выполняется (3) и хотя бы одно из условий (1) или (2).

Таким образом, при $\operatorname{Im}\varepsilon_e>0$ матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ является фредгольмовым оператором с нулевым индексом. В работе [5] показано, что матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ является инъективным. Отсюда следует

Теорема 3. Оператор

$$\widehat{\mathcal{L}}:\mathbf{L}_2(Q)\times W\left(\overline{\Omega}\right)\to\mathbf{L}_2(Q)\times W'(\Omega)$$

является непрерывно обратимым.

Теорема о непрерывной обратимости оператора $\widehat{\mathcal{L}}$ позволяет обосновать сходимость проекционного метода Галеркина, который применяется для численного решения исходной задачи дифракции.

4. Гладкость решений системы интегродифференциальных уравнений

Пусть падающее поле вне области Q является бесконечно дифференцируемым. В этом случае можно показать, что решение системы (10) является гладким, т.е. имеет место

Утверждение 1. Пусть тензор диэлектрической проницаемости скалярен: $\hat{\varepsilon}(x)=\varepsilon(x)\hat{\mathbf{I}}$, причем $\varepsilon(x)\in C^{\infty}\left(\bar{Q}\right)$ и $\varepsilon_r(x)>1$ при $x\in\bar{Q}$; падающее поле $\mathbf{E}_0(x)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right)$, а область Q имеет гладкую (класса C^{∞}) границу ∂Q. Пусть $\mathbf{E},\mathbf{u}\in L_2(Q)\times W'$ – решение системы. Тогда вектор-функции $\mathbf{E},\mathbf{H}$ удовлетворяют условиям гладкости (9). Более того, имеет место включение

$$\mathbf{E},\mathbf{H}\in C^{0,\alpha}\left(\bar{Q}\right)\bigcap C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^3\setminus\left(\bar{Q}\bigcup Q_{\Omega}\right)\right),$$

где $0<\alpha\le 1/2$, а Q_{Ω} – произвольная область в $\mathbb{R}^3$ такая, что $Q_{\Omega}\supset\bar{\Omega}$ и $\partial Q_{\Omega}\bigcap\bar{\Omega}=\varnothing$.

Для системы, представленной на рис. 1, доказательство утверждения можно сформулировать следующим образом. Условно данную задачу можно разбить на три области: поверхность экрана, выходящая за пределы пересечения с телом, области тела, разделенные экраном и область непосредственного пересечения тела и экрана.

В первом случае гладкость решений системы уравнений, отвечающей задаче дифракции, доказана в работе [3]. Для областей тела, внешней и внутренней к поверхности экрана, доказательство гладкости представлено в работе [5]. Из эллиптичности задачи следует, что во всех внутренних точках экрана и во всех внутренних точках тела есть гладкость решений системы уравнений.

Заключение

В данной статье представлено исследование задачи дифракции электромагнитных волн на системе пересекающихся тел и экранов. Представлено доказательство гладкости решений интегродифференциальной системы, отвечающей исходной задаче. Также доказана сходимость численного метода (схема Галеркина) для решения системы интегродифференциальных уравнений. Полученные результаты являются полезными для теоретического и численного исследования задач дифракции на пересекающихся телах и экранах.

Библиографический список

1. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – Москва : Радио и связь, 1998. – 160 с.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 268 с.
3. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – Москва : Радиотехника, 1996. – 176 с.

4. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния : пер. с. англ. / Д. Колтон, Р. Кресс. – Москва : Мир, 1987. – 311 с.
5. **Смирнов, Ю. Г.** Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Москва : РУСАЙНС, 2016. – 226 с.

References

1. Samokhin A. B. *Integral'nye i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii* [Integral equations and iterative methods in electromagnetic scattering]. Moscow: Radio i svyaz', 1998, 160 p. [In Russian]
2. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* [Mathematical methods for studying electrodynamics problems]. Penza: Izd-vo PGU, 2009, 268 p. [In Russian]
3. Il'inskiy A. S., Smirnov Yu. G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh* [Diffraction of electromagnetic waves on thin conductive screens]. Moscow: Radiotekhnika, 1996, 176 p. [In Russian] 4. Kolton D., Kress R. *Metody integral'nykh uravneniy v teorii rasseyaniya: per. s. angl.* [Methods of integral equations in scattering theory: translated from English]. Moscow: Mir, 1987, 311 p. [In Russian]
5. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektoro-magnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel* [The mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on the system of screens and heterogeneous body]. Moscow: RUSAYNS, 2016, 226 p. [In Russian]

Смирнов Юрий Геннадьевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Москалева Марина Александровна
младший научный сотрудник, научно-исследовательский центр «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: m.a.moskaleva1@gmail.com

Moskaleva Marina Aleksandrovna
Junior research assistant, the research center of “Supercomputer modeling in electrodynamics”, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Смирнов, Ю. Г. Обоснование численного метода решения задачи дифракции на пересекающихся телах и экранах / Ю. Г. Смирнов, М. А. Москалева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 4 (52). – С. 4–11. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-4-1.