В. Ф. Тарасов, Разрешимость некоторых точно решаемых солитоно-подобных уравнений через гипергеометрические функции, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1996, том 2, выпуск 4, 1247–1255

Разрешимость некоторых точно решаемых солитоно-подобных уравнений через гипергеометрические функции

В. Ф. ТАРАСОВ
Брянский государственный технический университет
e-mail: tarasov@bitmcnit.bryansk.su

УДК 517.588+517.95+532.592

Ключевые слова: солитон, солитрон, уединенные волны, ${}_pF_q$-функция.

Аннотация

Показано, что некоторые известные «модельные» уравнения (размерности $1 + 1$) в теории солитонов могут быть разрешены через гипергеометрические функции ${}_pF_q$-типа. Такой подход позволяет установить связь между «модельными» уравнениями и простыми функциональными соотношениями (в виде диаграмм) этих функций. Это дает возможность по-новому подойти к решению ряда «обратных задач» в теории солитонов и получить новые «модели» уединенных волн.

Abstract

V. F. Tarasov, The solvability of some exactly solvable soliton-like equations in terms of hypergeometric functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **2**(1996), 1247–1255.

It is shown that some nonlinear wave evolution equations in $1 + 1$-dimensional space-time in the soliton theory can be solved in terms of hypergepmetric functions of ${}_pF_q$-type. Such approach allows to establish the connection between «model» equations and simple functional relations (in the form of diagrams) of these functions; the latter gives the possibility to consider a number of «inverse problems» in the soliton theory in a new way and to get new «models» of solitary waves.

1 Введение

Как известно [1–5], при изучении нелинейных волновых эволюционных $(1 + 1)$-размерности уравнений особый интерес представляют так называемые «точно решаемые модели» солитонов и солитронов (подробный список которых дан в [2], глава 1.8).

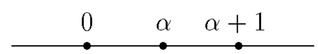
В данной статье предлагается новый метод исследования таких «модельных» уравнений с помощью гипергеометрических функций типа ${}_pF_q((a_p); (b_q); h(z))$ [6], использующий простые функциональные соотношения

Фундаментальная и прикладная математика 1996, **2**, № 4, 1247–1255.

для этих функций (в виде диаграмм). Такой подход позволяет также по-новому подойти к решению ряда «обратных задач» и получить (тем самым) новые «модели» уединенных волн в теории солитонов.

Именно таким путем в [7] (см. теоремы 1 и 2) были получены два множества солитоно-подобных уравнений типа $KdV(\tau, \alpha)$ и $RLW(\tau, \alpha)$, где $\tau \geqslant 1$ есть порядок старшей производной по t, а параметр $\alpha > 0$ определяет «модификацию» этих уравнений. Кроме того, там же (см. теорема 3) было установлено, что эти два типа уравнений «зарождаются» из двухточечного диаграммного соотношения

$$ {}_1F_0(\alpha; -; h) = (1-h)\, {}_1F_0(\alpha+1; -; h), \tag{1}$$



если их решения записать в виде

$$ y(z) = \frac{\omega}{\operatorname{ch}^{2\alpha} z} = \frac{\omega}{(1-h)^{\alpha}} = \omega\, {}_1F_0(\alpha; -; h), \tag{2}$$

где $h = -\operatorname{sh}^2(z)$ есть «внутренняя» функция для ${}_1F_0$-функции, $z = k(x - vt)$, ω есть амплитуда волны и $v > 0$ — ее скорость, $t \geqslant 0$ фиксировано, при условии, что $y(\pm\infty, t) = 0$ и $y(x, 0) = y_0(x) < \infty$.

Очевидно, что функция (2) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) первого порядка

$$ y' = \left(\frac{\alpha h'}{1-h} + \frac{\omega'}{\omega}\right) y, \quad \left({}' = \frac{d}{dz}\right). $$

Все основные обозначения стандартны, как в цитируемых источниках.

Статья имеет следующее содержание:

1. Введение.
2. Разрешимость модельных уравнений типа NLS, φ^4, Brg и Hxl через ${}_1F_0$-функции.
3. Разрешимость SG-уравнения через ${}_2F_1$-функцию.

2 Разрешимость модельных уравнений типа NLS, φ^4, Brg и Hxl через ${}_1F_0$-функции

Рассмотрим здесь следующие известные «модельные» уравнения в теории солитонов: нелинейное уравнение Шредингера (NLS), уравнение φ^4 в квантовой теории поля, уравнение диффузии Бюргерса (Brg) и уравнение Хаксли (Hxl).

2.1 Уравнение NLS

Как известно [3, 5], это уравнение имеет вид

$$ i\dot{\varphi} + \varphi'' + \beta\varphi|\varphi^2| = 0, \quad \left({}^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial t},\ {}' = \frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3}$$

Его решение

$$\varphi(x,t) = \frac{\omega}{\operatorname{ch} z} \tag{4}$$

удовлетворяет условию $\varphi \to 0$ при $|x| \to \infty$, $t \geqslant 0$, где $z = k(x - vt)$, $\omega = k\sqrt{2/\beta} \cdot \exp(i\Phi)$, $\Phi(x,t) = vx/2 - (v^2/4 - k^2)t$, $\beta > 0$ — параметр.

Рассмотрим «обобщенное» уравнение NLS

$$i\varepsilon\dot{\varphi} + \gamma\varphi'' + \beta\varphi|\varphi^2| = 0, \tag{3$'$}$$

где ε и γ — параметры. Подставляя (4) в (3$'$) и учитывая

$$|e^{i\Phi}| = 1 \quad \text{и} \quad |\varphi^2| = \frac{2k^2}{\beta \cdot \operatorname{ch}^2 z},$$

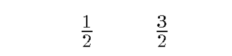
мы получаем алгебраическое уравнение

$$(\varepsilon - \gamma)\left(\frac{v^2}{4} - k^2\right) + 2k^2\frac{1-\gamma}{\operatorname{ch}^2 z} + i(\varepsilon - \gamma)kv \cdot \operatorname{th} z = 0.$$

Отсюда следует: $\varepsilon = \gamma = 1$, а параметры v и k не зависят друг от друга.

Покажем теперь, что уравнение (3) сводится к соотношению (1). С этой целью представим решение (4) в гипергеометрическом виде (2) с $\alpha = 1/2$, то есть

$$\varphi(x,t) = \omega\left(\frac{1}{2}; -; h\right). \tag{4$'$}$$



Тогда, находя частные производные от $\varphi(x,t)$ и учитывая

$$|\omega^2| = \frac{2k^2}{\beta}, \quad |\varphi^2| = |\omega^2|\,{}_1F_0^2\left(\frac{1}{2}; -; h\right) = \frac{|\omega^2|}{1-h},$$

уравнение (3) преобразуем к виду

$$i(\dot{h}/2 + \Phi' h')\,{}_1F_0\left(\frac{3}{2}; -; h\right) - (\dot{\Phi} + (\Phi')^2)\,{}_1F_0\left(\frac{1}{2}; -; h\right) +$$
$$+ (h''/2 + 3(h')^2)/(4(1-h) + 2k^2) \cdot {}_1F_0\left(\frac{3}{2}; -; h\right) = 0, \tag{5}$$

где $\dot{\Phi} + (\Phi')^2 = k^2$. Отсюда имеем:

$$\dot{h}/2 + \Phi' h' = 0,$$

$$((h''/2 + 3(h')^2)/(4(1-h)) + 2k^2)/k^2 = 1 - h.$$

Как видно, в результате из (5) мы получили соотношение (1) с $\alpha = 1/2$.

2.2 Уравнение φ^4

Как известно [2–4], это уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} - \varphi'' = m^2\varphi - \lambda \cdot \varphi^3. \tag{6}$$

Его решение

$$\varphi_{\pm}(x,t) = (\pm)\omega \cdot \operatorname{th} z \tag{7}$$

удовлетворяет условиям $\varphi_+ \to \pm\omega$ и $\varphi_- \to \mp\omega$ при $x \to \pm\infty$, $t \geqslant 0$, где $z = k(x-vt)$, $\omega = m/\sqrt{\lambda}$, $m^2 = 2k^2(1-v^2) > 0$, $\lambda > 0$ — параметр (символы φ_+ и φ_- соотносят «кинку» и «антикинку»).

Очевидно, что функция (7) удовлетворяет ОДУ

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2}{\operatorname{ch} 2z}\varphi.$$

Рассмотрим «обобщенное» уравнение φ^4

$$\varepsilon\ddot{\varphi} - \gamma\varphi'' = m^2\varphi - \lambda \cdot \varphi^3, \tag{6$'$}$$

где ε и γ — параметры. Подставляя (7) в (6$'$), имеем

$$-2\varepsilon\dot{z}^2 + 2\gamma(z')^2 = (m^2 - \lambda \cdot \omega^2)\operatorname{ch}^2 z + \lambda \cdot \omega^2.$$

Отсюда следует:

$$m^2 - \lambda \cdot \omega^2 = 0, \quad 2k^2(\gamma - \varepsilon v^2) = m^2.$$

Известно [2], что кинко-подобные решения (7) есть солитроны, а не солитоны, так как при столкновении кинка и антикинка их формы не сохраняются (возникают осцилляции). На эту интерпретацию (почему φ^4-кинк есть солитрон, а не солитон) можно посмотреть иначе: функция $\operatorname{th} z$ не является гипергеометрической. В самом деле, имеем

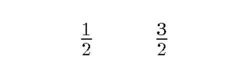
$$\operatorname{th} z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}(2^{2n}-1)B_n z^{2n-1} \pm \cdots, \tag{8}$$

где $|z| < \pi/2$, B_n — числа Бернулли [6]. Однако если для функции (8) сделать «искусственную» форму

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\sqrt{1-h}} \equiv \omega \cdot {}_1F_0\left(\frac{1}{2}; -; h\right), \tag{8$'$}$$

где $h = -\operatorname{sh}^2 z$, $\omega_0 = \operatorname{sh} z$ — «искусственная» весовая функция для ${}_1F_0$-функции, тогда решение (7) можно записать в «гипергеометрическом» виде:

$$\varphi(x,t) = (\omega \cdot \omega_0)\, {}_1F_0\left(\frac{1}{2}; -; h\right). \tag{7$'$}$$



Подставляя (7′) в (6) (после упрощений), имеем

$$ {}_1F_0\left(\frac{1}{2}; -; h\right) = \left[-\frac{1}{3}h_z \cdot \operatorname{cth} z - \frac{1}{6}h_{zz} - \frac{h_z^2}{4(1-h)} - \frac{2}{3}h\right] {}_1F_0\left(\frac{3}{2}; -; h\right), $$

где выражение в квадратной скобке дает $(1-h)$, то есть мы вновь получили соотношение (1) с $\alpha = 1/2$.

2.3 Уравнение *Brg*

Как известно [3,8], это уравнение имеет вид

$$ \dot{u} + uu' = \delta u''. \tag{9} $$

Его решение

$$ u(x,t) = \omega(1 - \operatorname{th} z) \tag{10} $$

удовлетворяет условиям $u \to 0$ при $x \to +\infty$ и $u \to 2\omega$ при $x \to -\infty$, $t \geqslant 0$, где $z = k(x - vt)$, $\omega = v = 2k\delta > 0$, $\delta > 0$ — параметр.

Очевидно, что функция (10) удовлетворяет ОДУ

$$ \frac{du}{dz} + \frac{u}{\operatorname{ch} z(\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)} = 0. $$

Рассмотрим «обобщенное» уравнение *Brg*

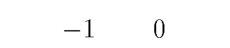
$$ \varepsilon\dot{u} + \gamma uu' = \delta u'', \tag{9′} $$

где ε и γ — параметры. Подставляя (10) в (9′), имеем

$$ \omega = 2k\delta/\gamma > 0, \quad v = 2k\delta/\varepsilon > 0. $$

Представим решение (10) в виде

$$ u(x,t) = \omega\, {}_1F_0(-1; -; h), \tag{10′} $$



где $h = \operatorname{th} z$.

Как и выше, находя частные производные от этой функции, мы получаем

$$ \dot{h}\, {}_1F_0(0; -; h) + \omega h'\, {}_1F_0(-1; -; h) = \delta h''\, {}_1F_0(0; -; h), \tag{11} $$

где ${}_1F_0(0; -; h) = 1$, $(\delta h'' - \dot{h})/(\omega h') = 1 - h$.

Отсюда следует

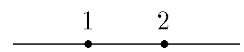
$$ (\dot{z} + \omega z') + h(2\delta z' - \omega)z' = 0, $$

то есть мы имеем $\omega = -\dot{z}/z' = v$, $\omega = 2k\delta$.

В результате, мы вновь получили из (11) соотношение (1) с $\alpha = -1$.

Замечание. Решение (10) можно записать также в виде

$$u(x,t) = \frac{2\omega}{1-h} = 2\omega\, {}_1F_0(-1;-;h),$$



где $h = -\exp(2z)$. Тогда вместо (11) мы имеем

$$\dot h\, {}_1F_0(2;-;h) + 2\omega\, {}_1F_0(1;-;h)\, {}_1F_0(2;-;h) = \delta(h''\, {}_1F_0(2;-;h) + 2(h')^2\, {}_1F_0(3;-;h)).$$

Отсюда мы вновь получаем соотношение (1) с $\alpha = 1$, так как справедлива формула

$$2\delta(h')^2 = 2\omega h' + (1-h)(\dot h - \delta h''),$$

из которой следует $\omega = v = 2k\delta$.

2.4 Уравнение *Hxl*

Как известно [9, 10], это уравнение имеет вид

$$u'' - \dot u = u(u-1)(u-a). \tag{12}$$

Его решение

$$u(x,t) = \frac{1}{1+e^z} \tag{13}$$

удовлетворяет условиям $u \to 0$ при $x \to +\infty$ и $u \to 1$ при $x \to -\infty$, $t \geqslant 0$, где $z = k(x - vt)$, $v = (1-2a)/\sqrt{2} > 0$, $k = 1/\sqrt{2}$, $a > 0$ — параметр.

Очевидно, что функция (13) удовлетворяет ОДУ

$$\frac{du}{dz} + \frac{u}{1+e^{-z}} = 0.$$

Рассмотрим «обобщенное» уравнение *Hxl*

$$\gamma u'' - \varepsilon \dot u = \delta u(u-1)(u-a), \tag{12$'$}$$

где γ, ε и δ — параметры. Подставляя (13) в (12$'$), имеем

$$\varepsilon v = (1-2a)\sqrt{\delta\gamma/2}, \quad k = \sqrt{\delta/2\gamma} > 0.$$

Представим решение (13) в виде

$$u(x,t) = \omega\, {}_1F_0(1;-;h), \tag{13$'$}$$

где $h = -e^z$, $\omega = 1$. Подставляя (13$'$) в (12) (после упрощений), имеем

$${}_1F_0(1;-;h) = [(h - 2(h')^2)/(h'' - \dot h + ah)]\, {}_1F_0(2;-;h),$$

где выражение в квадратной скобке дает $(1-h)$, то есть мы вновь получили соотношение (1) с $\alpha = 1$.

3 Разрешимость SG-уравнения через ${}_2F_1$-функцию

Как известно [3–5, 11], это уравнение имеет вид

$$y'' - \ddot{y} = \sin y. \tag{14}$$

Его решение

$$y(x,t) = 4 \operatorname{arctg} e^z \tag{15}$$

удовлетворяет условиям $y \to 0$ при $x \to -\infty$ и $y \to 2\pi$ при $x \to +\infty$, $t \geqslant 0$, где $z = k(x - vt)$, $k^2(1 - v^2) = 1$.

Учитывая элементарные формулы

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right],$$

находим

$$\sin y = -2\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^2 z} = \omega \frac{1+h}{(1-h)^2},$$

где $\omega = 4e^z$, $h = -e^{2z}$.

Рассмотрим «обобщенное» уравнение SG

$$\delta y'' - \varepsilon \ddot{y} = \gamma \cdot \omega \frac{1+h}{(1-h)^2}, \tag{14$'$}$$

где δ, ε и γ — параметры. Подставляя (15) в (14′), имеем

$$k^2(\delta - \varepsilon v^2) = \gamma.$$

Представим решение (15) в виде

$$y(x,t) = \omega\, {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; h), \tag{15$'$}$$

где $\alpha_1 \equiv \alpha = 1$, $\alpha_2 = \alpha - 1/2$, $\beta = \alpha + 1/2$.

Легко убедиться в том, что эта функция удовлетворяет ОДУ второго порядка

$$h(1-h)y'' + \left[(\beta - (1 + \alpha_1 + \alpha_2)h)h' - h(1-h)\left(2\frac{\omega'}{\omega} + \frac{h''}{h'}\right)\right] y' =$$
$$= \left\{\frac{\omega'}{\omega}[\cdot] + h(1-h)\frac{\omega''}{\omega} + \alpha_1\alpha_2(h')^2\right\} y,$$

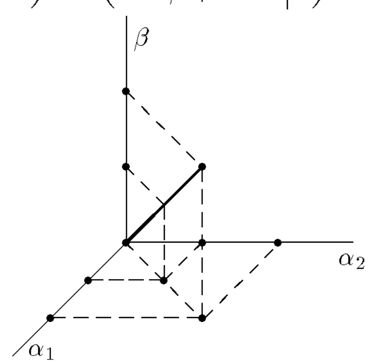
которое можно привести к виду

$$(1-h)y'' - (1+h)y' = 0 \quad \text{или} \quad y'' + \operatorname{th} z \cdot y' = 0, \quad \left({}' = \frac{d}{dz}\right).$$

Как известно, для функции Гаусса ${}_2F_1$ имеет место функциональное соотношение (с диаграммой)

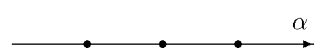
$$h(1-h)\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{\beta(\beta+1)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha_1+2,\,\alpha_2+2\\ \beta+2\end{matrix}\middle|\,h\right)+$$

$$+\left(1-\frac{h}{\beta}(1+\alpha_1+\alpha_2)\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha_1+1,\,\alpha_2+1\\ \beta+1\end{matrix}\middle|\,h\right)={}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha_1,\,\alpha_2\\ \beta\end{matrix}\middle|\,h\right),$$



которое приводится к «одномерному» виду

$$\frac{2\alpha+2}{2\alpha+3}h(1-h)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+2,\,\alpha+3/2\\ \alpha+5/2\end{matrix}\middle|\,h\right)+$$



$$+\left(1-\frac{4\alpha+1}{2\alpha+1}h\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+1,\,\alpha+1/2\\ \alpha+3/2\end{matrix}\middle|\,h\right)={}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\,\alpha-1/2\\ \alpha+1/2\end{matrix}\middle|\,h\right). \qquad (16)$$

Покажем, что именно из этого «диаграммного» соотношения (при $\alpha=1$) «зарождается» уравнение SG. С этой целью сначала найдем частные производные от функции $(15')$ и подставим их в (14), тогда (после упрощений) получаем

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\,1/2\\ 3/2\end{matrix}\middle|\,h\right)+\frac{8}{3}h\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}2,\,3/2\\ 5/2\end{matrix}\middle|\,h\right)+\frac{8}{5}h^2\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}3,\,5/2\\ 7/2\end{matrix}\middle|\,h\right)=$$

$$=\frac{1+h}{(1-h)^2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}0,\,-1/2\\ 1/2\end{matrix}\middle|\,h\right),$$

при условии, что $(\omega'/\omega)^2-\ddot{\omega}/\omega=1$, то есть $k^2(1-v^2)=1$.

Если в последней диаграмме вместо ${}_2F_1(0,-1/2;1/2;h)$ подставить левую часть формулы (16) с $\alpha=0$, то из нее следует соотношение (16) с $\alpha=1$.

Автор благодарит Н. М. Матвеева за полезные обсуждения.

Литература

[1] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 479 с.

[2] Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. Спектральные преобразования и солитоны: Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений / Под ред. В. Е. Захарова. — М.: Мир, 1985. — 469 с.

[3] Е. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.

[4] Р. Раджараман. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — М.: Мир, 1985. — 416 с.

[5] S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov. Theory of solitons. The method of inverse scattering. — New York: Plenum, 1984.

[6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965. — 295 с.

[7] V. F. Tarasov. The KdV and RLW sets // Int. J. Modern Phys. B. — 1995. — V. 9, № 20. — P. 2689–2698. (См. также Успехи матем. наук. — 1995. — Т. 50, № 4. — С. 116).

[8] J. M. Burgers. The nonlinear diffusion equation. — Dordrecht: Reidel, 1974.

[9] A. F. Huxley. Muscle structure and theories of contraction // Progress in Biophysics and Biophysical Cemistry. — 1957. — V. 7. — P. 255–318.

[10] А. Ф. Филиппов. Многоликий солитон. — М.: Наука, 1990. — 288 с.

[11] Э. Г. Позняк, А. Г. Попов. Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика. — М.: Знание, 1991. — № 6. — 45 с.

Статья поступила в редакцию в декабре 1995 г.