МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004г., том 16, номер 2, стр. 93-101

ОЦЕНКА РОСТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ФЕРРОМАГНЕТИКА ДЛЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

© *Е.П. Жидков, Е.Е. Перепелкин*

Постановка задачи магнитостатики возникает при поиске распределения магнитного поля, создаваемого магнитной системой, входящей в состав многих физических установок, таких, например, как ускорители. Часто бывает, что область, в которой решается краевая задача магнитостатики, имеет кусочно-гладкую границу. В таких случаях при численном нахождении решения задачи необходимо учитывать характер его поведения в окрестности угловой точки. Дается верхняя оценка допустимого роста магнитного поля в окрестности угловой точки. На основании полученной оценки предлагается метод сгущения разностной сетки вблизи угловой точки. Приводится пример расчета модельной задачи в области, содержащей угловую точку.

ESTIMATION OF MAGNETIC FIELD GROWTH IN CORNER DOMAIN FOR MAGNETOSTATIC PROBLEM

E.P. Zhidkov, E.E. Perepelkin

Magnetostatic problem arises when searching the magnetic field distribution, generated by magnet systems encountered in many physical devices such as accelerators. The domain, in which a boundary value problem is solved, has often a piecewise-smooth boundary. In such cases, numerical calculations of the problem require the consideration of the solution behaviour in the corner domain. An upper estimate is given of maximum possible growth of the magnetic field in the corner domain. In terms of this estimate a method is proposed of condensing the differential grid near the corner domain. An example is given of the modeling problem in the corner domain.

1. Введение

Во многих физических установках используются магнитные системы различной конфигурации. Примером могут служить спектрометрические магниты. С практической точки зрения очень важно с хорошей точностью знать распределение магнитного поля, создаваемого такой системой.

Реально проблема сводится к постановке задачи магнитостатики о нахождении распределения магнитного поля рассматриваемой магнитной системы.

Из-за сложной конфигурации магнитной системы решение задачи обычно ищется численными методами. Очень часто при расчете конкретной магнитной системы область, в которой решается краевая задача, имеет кусочно-гладкую границу. В таких случаях решение задачи или производные решения могут иметь особенность. Поэтому необходимо использовать специальные методы при численном поиске решения.

2. Оценка роста магнитного поля

Покажем, что в окрестности угловой точки ферромагнетика магнитное поле удовлетворяет условию

$$H(s) \le C_0 \ln\frac{1}{r_s} + w(s), \tag{1}$$

где C_0 – постоянная величина, $w(s)$ – ограниченная функция, r_s – расстояние до угловой точки.

Исходя из интегральной постановки задачи магнитостатики [1] магнитное поле представимо в виде

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_C(s) - \nabla_s \int\limits_{\Omega_f} (\mathbf{M}(p), \nabla_p \Psi(s,p)) d\upsilon_p, \tag{2}$$

где $\mathbf{H}_C$ – поле от источников с током, $\mathbf{M}$ – вектор намагниченности ферромагнетика, функция $\Psi(s,p)$ равна $1/(4\pi r_{sp})$ или $\ln r_{sp}/(2\pi)$ соответственно для 3-мерного и 2-мерного случая; Ω_f – область ферромагнетика.

Вектор намагниченности

$$\mathbf{M} = \mu_0 \chi(H)\mathbf{H} = \mu_0(\mu(H) - 1)\mathbf{H},$$

где μ_0 – постоянная величина, $\chi(H)$ – магнитная восприимчивость, а $\mu(H)$ – магнитная проницаемость ферромагнетика.

При больших полях ($H \to \infty$) для $\mu(H)$ справедливо представление [2,3]

$$\mu(\mathrm{H}) = 1 + \frac{A}{H} - \frac{B}{H^2} \quad \text{при } H \to \infty,$$

где A, B – постоянные положительные величины.

Следовательно, при $H \to \infty$ величина $\mathrm{M} = |\mathbf{M}|$ ограничена некоторой константой $M_0 = \mu_0 A$.

Рассмотрим 2-мерный случай, из (2) получим

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_C(s) - \frac{1}{2\pi} \nabla_s \int\limits_{\Omega_f} \left(\mathbf{M}(p), \frac{\mathbf{r}_{sp}}{r_{sp}^2} \right) d\upsilon_p.$$

Здесь первое слагаемое ограничено, поэтому оценим второе слагаемое

$$\left| \nabla_s \int\limits_{\Omega_f} \left(\mathbf{M}(p), \frac{\mathbf{r}_{sp}}{r_{sp}^2} \right) d\upsilon_p \right| \le \left| \int\limits_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{M^{(x)}(p)(x_p - x_s) + M^{(y)}(p)(y_p - y_s)}{(x_p - x_s)^2 + (y_p - y_s)^2} \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial y_s} \frac{M^{(x)}(p)(x_p - x_s) + M^{(y)}(p)(y_p - y_s)}{(x_p - x_s)^2 + (y_p - y_s)^2} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega_f} \frac{M^{(x)}(\overline{x}^2 - \overline{y}^2) + 2M^{(y)}\overline{xy}}{(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)^2} d\upsilon_p \right| + \left| \int\limits_{\Omega_f} \frac{M^{(y)}(\overline{y}^2 - \overline{x}^2) + 2M^{(y)}\overline{xy}}{(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)^2} d\upsilon_p \right| \le$$

$$\le 2 \int\limits_{\Omega_f} \frac{2r_{sp}^2 \left| M^{(x)} \right| + 2r_{sp}^2 \left| M^{(y)} \right|}{r_{sp}^4} d\upsilon_p \le 8M_0 \int\limits_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} d\upsilon_p,$$

где $\overline{x} = x_p - x_s$, $\overline{y} = y_p - y_s$. Вычислим интеграл $\int\limits_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} d\upsilon_p$.

$$\int\limits_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} d\upsilon_p = \int\limits_{\nu_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} d\upsilon_p + \int\limits_{\Omega_f \setminus \nu_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} d\upsilon_p,$$

где $\nu_\delta = \Omega_f \cap S_\delta(Q)$ есть угловой сектор в точке Q (см. рис.1).

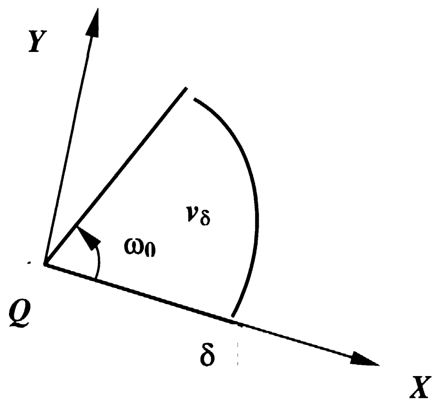

Рис.1.

Интеграл по области $\Omega_f \setminus \nu_\delta$ будет ограничен, поэтому рассмотрим только интеграл по области ν_δ.

$$\int\limits_{\nu_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} d\upsilon_p = \int\limits_0^{\omega_0} d\varphi_p \int\limits_0^{\delta} \frac{r_p dr_p}{r_p^2 + r_s^2 - 2r_p r_s \cos\varphi_{sp}} =$$

$$= \int\limits_0^{\omega_0} d\varphi_p \left(\int\limits_0^1 \frac{tdt}{1 + t^2 - 2t\cos\varphi_{sp}} + \int\limits_1^{\delta/r_s} \frac{tdt}{1 + t^2 - 2t\cos\varphi_{sp}} \right),$$

где $t = r_p/r_s$. Далее воспользуемся выражением для производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\varphi_{sp}}} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{+\infty} P_m(\cos\varphi_{sp}) t^m, & |t| < 1, \\ \sum\limits_{m=0}^{+\infty} P_m(\cos\varphi_{sp}) t^{-m-1}, & |t| > 1, \end{cases}$$

в результате получим

$$\int\limits_{\nu_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} d\upsilon_p = \int\limits_0^{\omega_0} d\varphi_p \left(\int\limits_0^1 tdt \sum_{m,k=0}^{+\infty} P_m P_k t^{k+m} + \int\limits_1^{\delta/r_s} tdt \sum_{m,k=0}^{+\infty} P_m P_k t^{-(k+m+2)} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{\omega_0} d\varphi_p \left(\sum_{m,k=0}^{+\infty} P_m P_k \left.\frac{t^{k+m}}{k+m+2}\right|_0^1 + \sum_{m+k\neq 0}^{+\infty} P_m P_k \left.\frac{t^{-(k+m)}}{-(k+m)}\right|_1^{\delta/r_s} \right) +$$

$$+ \int\limits_0^{\omega_0} d\varphi_p P_0^2 \ln t \Big|_1^{\delta/r_s} = \omega_0 \ln\frac{\delta}{r_s} + \sum_{m,k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{m,k}}{m+k+2} + \sum_{m+k\neq 0}^{+\infty} \frac{\alpha_{m,k}}{m+k} \left(\left(\frac{r_s}{\delta}\right)^{m+k} - 1 \right) =$$

$$= C_1 \ln\frac{1}{r_s} + w_1(s),$$

где $\alpha_{m,k} = \int\limits_0^{\omega_0} P_m(\cos\varphi_{sp})P_k(\cos\varphi_{sp})d\varphi_p$, C_1 – постоянная величина, $w_1(s)$ – ограниченная функция. Таким образом, установлена справедливость выражения (1).

3. Метод сгущения сетки в окрестности угловой точки

В [5-7] приведены примеры построения разностной сетки для некоторых краевых задач в областях с угловой точкой. Основная идея состоит в сгущении разностной сетки или конечных элементов с тем, чтобы сделать приемлемой погрешность аппроксимации задачи. Эта погрешность слагается из интегралов по элементарным областям, которые оцениваются величинами вида

$$Ch_i^{\beta}\|u\|_{k,i}, \tag{3}$$

где h_i – диаметр i-й элементарной области или ячейки сетки; β – положительное число; $\|u\|_{k,i}$ – норма функции на этой области, содержащая k-ю производную; C – константа, не зависящая от этих множителей. Тогда можно, например, потребовать, чтобы величины (3) оказались одинаковыми в рассматриваемой области. С этой целью можно уменьшать h_i^{β} обратно пропорционально величинам $\|u\|_{k,i}$ при подходе к особым точкам.

Покажем справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathbf{V}(s)$ *– решение задачи магнитостатики в интегральной постановке, найденное численным методом, а* $\mathbf{H}(s)$ *– точное решение. Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{V}-\mathbf{H}\|^2_{L_2(D)} < \gamma h^2(\ln^2 h - \alpha\ln h - \beta) + O(h^4), \tag{4}$$

где α,β,γ *– постоянные положительные величины;* h *– диаметр области* D*, являющейся ячейкой разностной сетки, содержащей угловую точку ферромагнетика.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2) для $\mathbf{V}(s)$ справедливо выражение

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{H}_C(s) - \frac{1}{2\pi}\nabla_s \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega_j} \left(\mathbf{M}(\mathbf{H}_j), \frac{\mathbf{r}_{sp_j}}{r^2_{sp_j}} \right) dv, \tag{5}$$

где $\mathbf{H}_j$ – значение поля в ячейке Ω_j, $j=1,\ldots,N$; $\bigcup\limits_{j=1}^{N}\Omega_j = \Omega_f$; r_{sp_j} – расстояние от точки s до точки $p_j \in \Omega_j$.

Рассмотрим разницу $\mathbf{V}(s)-\mathbf{H}(s)$.

$$\mathbf{V}(s)-\mathbf{H}(s) = -\frac{1}{2\pi}\nabla_s \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega_j} \left(\mathbf{M}(\mathbf{H}_j)\text{-}\mathbf{M}(\mathbf{H}(p_j)), \frac{\mathbf{r}_{sp_j}}{r^2_{sp_j}} \right) dv.$$

В силу ограниченности величины $|\mathbf{M}|<M_0$ следует $|\mathbf{M}(\mathbf{H}_j)-\mathbf{M}(\mathbf{H}(p_j))|<2M_0$ для $j=1\ldots N$. Таким образом, получим

$$|\mathbf{V}(s)-\mathbf{H}(s)| < \frac{8M_0}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega_j}\frac{dv}{r^2_{sp_j}} = \frac{8M_0}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega_j\cap S_\delta(Q)}\frac{dv}{r^2_{sp_j}} + \frac{8M_0}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega_j\setminus S_\delta(Q)}\frac{dv}{r^2_{sp_j}}.$$

В результате, используя оценку, полученную в предыдущем пункте, находим

$$|\mathbf{V}(s)-\mathbf{H}(s)| < C_2 \ln\frac{1}{r_s} + w_2(s). \tag{6}$$

Теперь остается оценить $\|\mathbf{V}-\mathbf{H}\|^2_{L_2(D)}$, где область D является $S_\delta(Q)$ – δ-окрестностью точки Q. Используя (6), получаем

$$\|\mathbf{V}-\mathbf{H}\|^2_{L_2(D)} = \int_D |\mathbf{V}(s)-\mathbf{H}(s)|^2 dv < \gamma h^2(\ln^2 h - \alpha \ln h - \beta) + O(h^4),$$

где h=2δ, α,β,γ – постоянные значения. Полученный результат соответствует (4).

Исходя из сказанного выше и неравенства (4) был предложен следующий метод сгущения разностной сетки:

$$\int_0^{h_1}\left|\ln\frac{1}{x}\right|^2 dx = d_0, \quad \int_{x_{m-1}}^{x_m}\left|\ln\frac{1}{x}\right|^2 dx = d_0, \quad x_m - x_{m-1} = h_m, \quad m = 1,2,\ldots,M.$$

Здесь d_0 – некоторая постоянная величина, M – число разбиений вдоль оси координат (OX или OY) в окрестности угловой точки, h_m – шаг сетки, x_m – координата узла сетки вдоль оси OX или OY (начало системы координат находится в угловой точке), значение $|x|<1$.

4. Расчет магнитного поля в окрестности угловой точки

В разделе 2 была приведена верхняя оценка допустимого роста магнитного поля в окрестности угловой точки ферромагнетика. В разделе 3, исходя из сделанной оценки, был предложен метод сгущения разностной сетки в окрестности угловой точки. В этом разделе приведены результаты численного расчета магнитной системы с использованием такого метода. Из расчетов видно, что описанный метод сгущения сетки дает существенное улучшение точности вычисляемого распределения магнитного поля.

Рассматривалась магнитная система, изображенная на рис.2. Область Ω_v соответствует вакууму, а область Ω_f заполнена ферромагнетиком. Линейные размеры системы указаны в табл. 1. В рассматриваемой области решалась краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\upsilon\dfrac{\partial A_z}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\upsilon\dfrac{\partial A_z}{\partial y} = 0, \qquad p \in \Omega_f \cup \Omega_v = \Omega, \\ A_z|_{\Gamma_-} = A_z|_{\Gamma_+}, \\ \upsilon\dfrac{\partial A_z}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_+} = \dfrac{\partial A_z}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_-}, \\ A_z|_{x=0} = C, \quad A_z|_{x=x_2} = -C, \quad \dfrac{\partial A_z}{\partial n}\bigg|_{y=0,y_1}, \end{cases} \tag{7}$$

соответствующая постановке задачи магнитостатики относительно векторного потенциала A_z [4]. Функция $\upsilon=1/\mu(B)$, где $\mu(B)$ – магнитная проницаемость ферромагнетика, B – модуль вектора магнитной индукции **B**=rot**A**, $\Gamma_\pm$ – граница раздела сред, C – постоянная величина.

Таблица 1

x_1, м	x_2, м	y_1, м	y_2, м
0.5	1.0	0.5	1.0

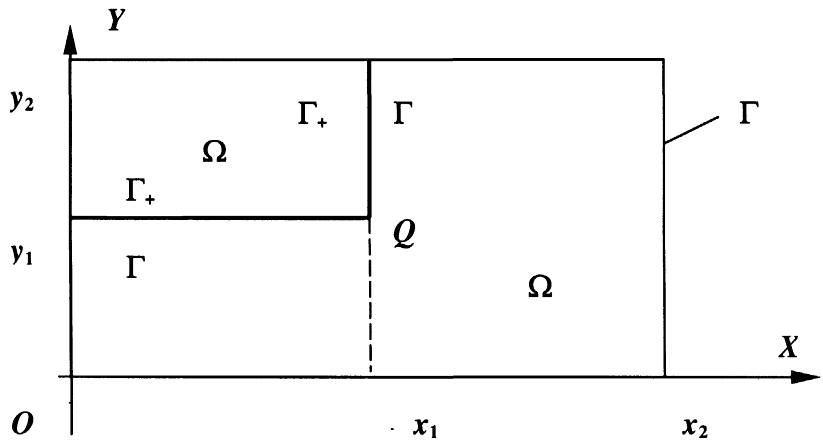

Рис.2.

Точка Q на рис.2 является угловой точкой с координатами (x_1,y_1). На рис.3 штриховой линией изображена окрестность Π_Q угловой точки $Q(x_1,y_1)$. Величина $\Delta x = \Delta y = 0.2$ м.

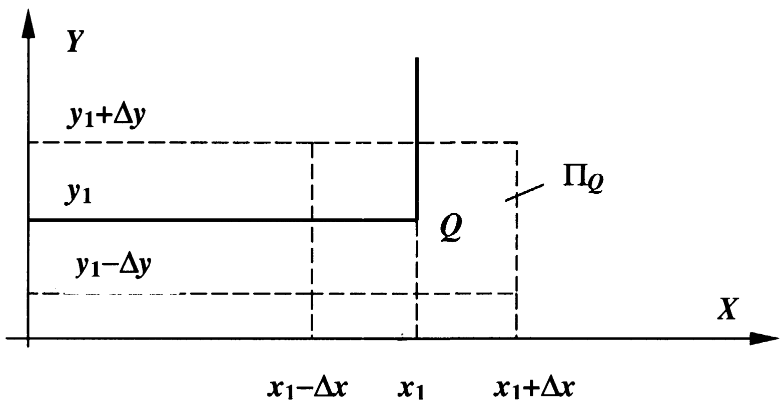

Рис.3.

Для оценки эффективности описанного в разделе 3 метода сгущения разностной сетки проводились следующие вычисления:

1-й вариант. Находилось решение задачи (1) на последовательности сеток $(10k) \cdot (10k)$, где k=1,2,4,8,10,20,40. Т.е. получались сетки 10·10, 20·20,..., 400·400. При этом в окрестности угловой точки Π_Q шаг сетки был равномерный;

2-й вариант. Задача (1) рассчитывалась на той же последовательности сеток при k=1,2,4,8, только в области Π_Q шаг сетки выбирался согласно описанному в разделе 3 методу сгущения разностной сетки. В области $\Omega \backslash \Pi_Q$, по сравнению с предыдущим вариантом, шаг разностной сетки не изменялся. Количество узловых точек в области Π_Q оставалось прежним, менялось только их распределение. На рис.4 изображен приблизительный вид сетки в окрестности угловой точки Q.

Результаты, полученные из вычислений по первому варианту, считались как бы «эталонными», так как при увеличении числа разбиений предполагалось, что точность вычисляемого решения должна увеличиваться, за исключением, возможно, некоторой окрестности угловой точки.

Далее результаты, полученные при вычислении по второму варианту, сравнивались с результатами, полученными по первому варианту.

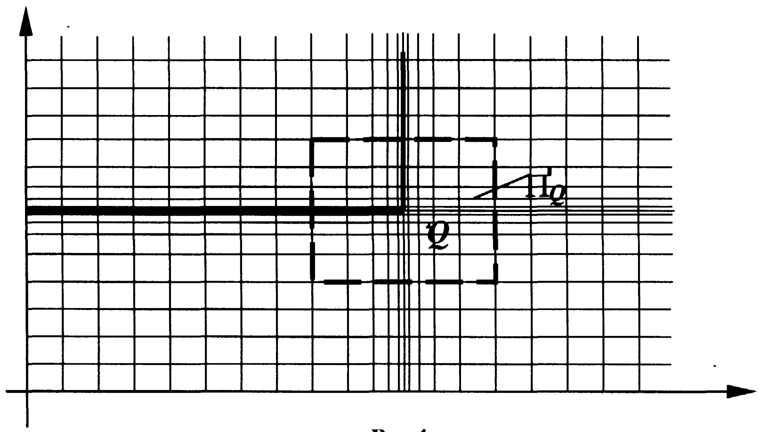

Рис.4.

На рис. 5 – 8 представлены распределения $B_y(x)$ при $y=y_1$ для различных сеток. На всех рисунках «эталонное» распределение $B_y(x)$, Рассчитанное на сетке 400·400, обозначено trace1. Графики, обозначенные trace2 и trace3, – это распределения $B_y(x)$, рассчитанные по первому и по второму варианту соответственно. На рис.5 показаны распределения, вычисленные на сетке10·10, на рис.6 – на сетке 20·20, на рис.7 – на сетке 40·40, на рис. 8 – на сетке 80·80.

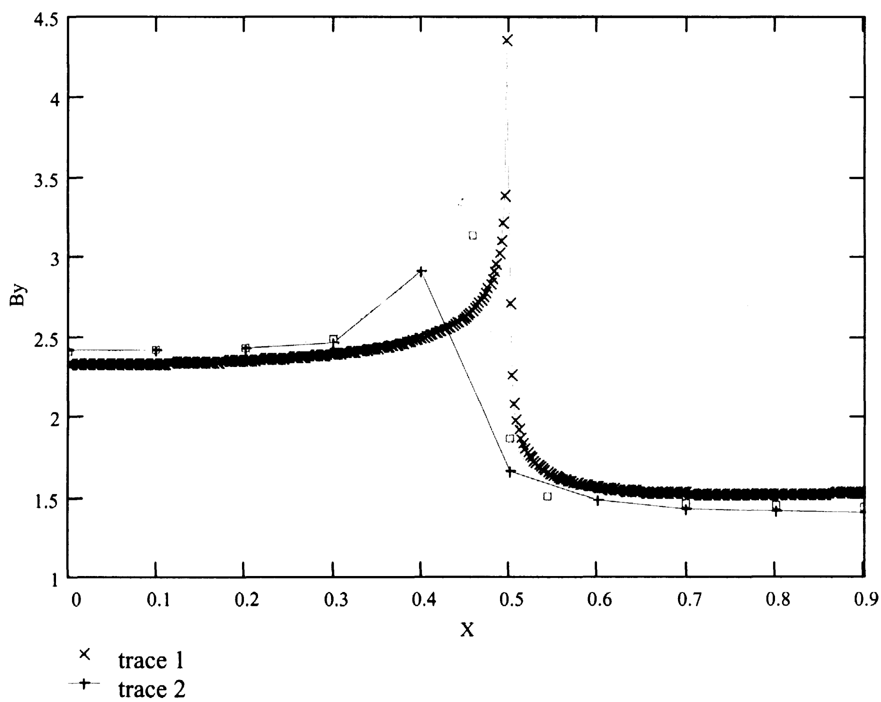

Рис.5.

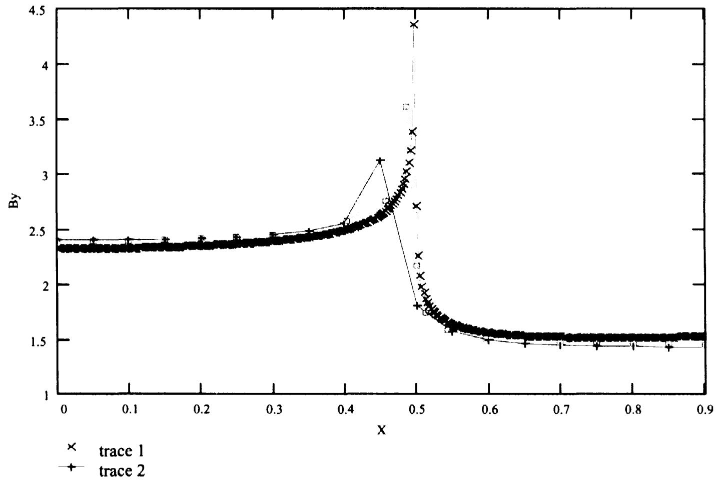

Рис.6.

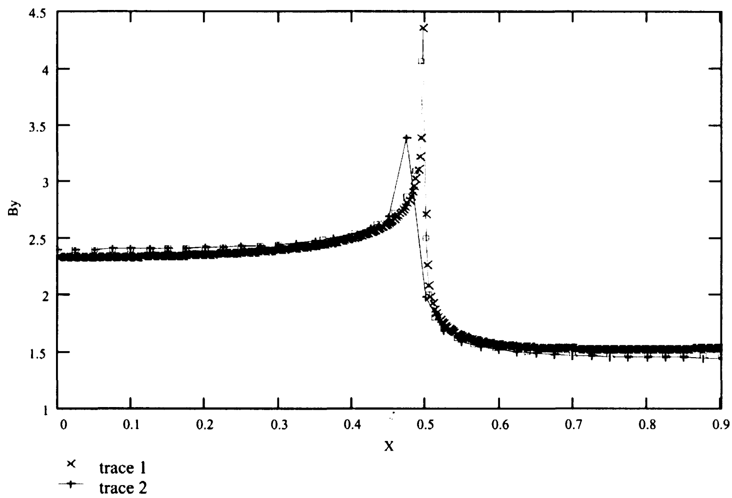

Рис.7

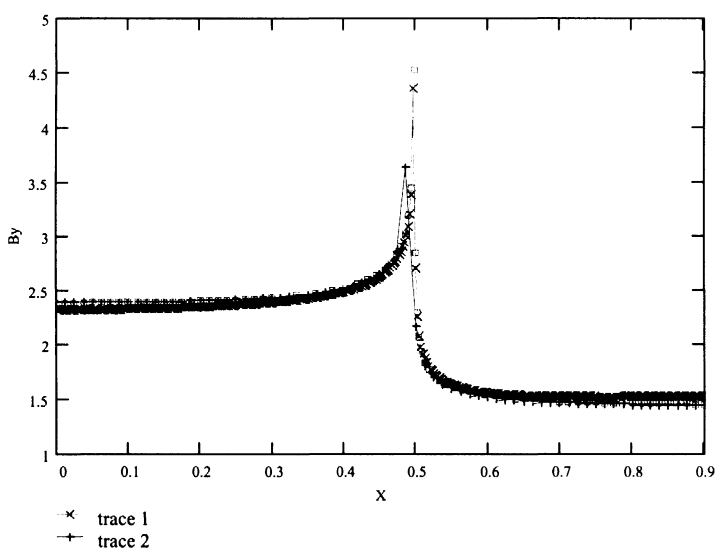

Рис.8.

Ниже приводится сравнительная табл.2 значений поля в трех точках: $P_1(0,0)$, $P_2(x_1,0)$ и $Q(x_1,y_1)$.

Таблица 2

Равномерная сетка в области Π_Q			
Сетка	$B_y(P_1)$, Тл	$B_y(P_2)$, Тл	$B_y(Q)$, Тл
10·10	2.274	2.074	2.902
20·20	2.248	2.038	3.126
40·40	2.237	2.024	3.374
80·80	2.231	2.018	3.645
100·100	2.23	2.017	3.738
200·200	2.206	2.014	4.045
400·400	2.158	2.012	4.358
Неравномерная сетка в области Π_Q			
Сетка	$B_y(P_1)$, Тл	$B_y(P_2)$, Тл	$B_y(Q)$, Тл
10·10	2.266	2.038	3.133
20·20	2.241	2.02	3.604
40·40	2.233	2.015	4.061
80·80	2.229	2.013	4.527

Из табл.2 и графиков, приведенных на рис. 5-8, видно, что точность расчетов по второму варианту (неравномерная сетка) существенно выше аналогичных расчетов по первому варианту (равномерная сетка). Отсюда можно заключить, что предложенный метод построения разностной сетки в окрестности угловой точки оправдывает свое использование и дает результаты по точности, сравнимые с результатами, получаемыми лишь на сетках с числом узлов по каждой оси в 4 - 5 раз большим, чем у исходной сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Martin N.* Wilson. Superconducting Magnets. Oxford University Press, New York, 1983.
2. *Akulov N.* Theorie der Feinstruktur der Magnetisie rungskurven der Einkristalle. –Zeitschr. Phys., 1931, Bd 69.
3. *Парфенов В.В.* Исследование магнитной восприимчивости ферромагнетиков в области высоких полей. – Известия АН СССР. Серия физическая, 1952, т. XVI, №5.
4. *Айрян Э.А. и др.* Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц., ЭЧАЯ, 1990, т.21, вып.1, с. 251-307.
5. *Волков Е.А.* Метод сеток и бесконечных областей с кусочно-гладкой границей. ДАН СССР, т.168, №3, 1966.
6. *Шайдуров В.В.* Численное решение задачи Дирихле в области с углами, Вычислительные методы в прикладной математике. – Новосибирск: Наука, 1982.
7. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 27.06.03.