УДК 517.925.51

Б. Н. СКАЧКОВ

О ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА С ПРОИЗВОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Lx, \tag{1}$$

где x — n-мерный вещественный вектор, L — постоянная вещественная квадратная матрица вида

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & & -p \end{pmatrix}.$$

В работе [1] предложен способ построения квадратичной формы $v = x'Bx$, $B = B'$, производная которой, взятая в силу системы (1), имеет вид $\dot{v} = -x'Gx$, $G = G'$ с произвольной матрицей G. Иными словами, решено матричное уравнение Ляпунова: $L'B + BL = -G$. Получить все $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, можно, положив $B = Q$,

$$q_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\min(\alpha, n-\beta)} (-1)^k g_{\alpha+1-k, \beta+k}, \quad \alpha \leqslant \beta, \quad q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}, \quad \alpha > \beta.$$

Чтобы получить $g_{\alpha\alpha}$ и убрать с главной диагонали то, что получается на ней от Q, полагаем $B = P + Q$, где $P = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k$,

$$p_{\alpha\beta}^{(k)} = \begin{cases} 0 \text{ при } \min(\alpha, \beta) < k \leqslant \max(\alpha, \beta), \\ p_{n+k-\alpha-\beta} (-1)^{k-1+\max(\alpha,\beta)} \text{ при } \alpha, \beta < k, \\ p_{n+k-\alpha-\beta} (-1)^{k+\min(\alpha,\beta)} \text{ при } \alpha, \beta \geqslant k, \end{cases}$$

причем вектор c, составленный из коэффициентов c_k, должен удовлетворять уравнению

$$2H(p, p_0)\, c = q, \tag{2}$$

$$H(p, p_0) = \begin{pmatrix} p_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -p_{n-2} & p_{n-1} & -p_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p_0 & p_1 \end{pmatrix},$$

$$q_\alpha = g_{\alpha\alpha} + 2 \sum_{k=1}^{\min(\alpha-1, n-\beta)} (-1)^k g_{\alpha-k, \beta+k}.$$

Поскольку $\det H(p, p_0)$ совпадает с n-м определителем Гурвица характеристического многочлена матрицы L, $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} p_k \lambda^{n-k} p_0 = 1$, уравнение (2) разрешимо, если не существует λ_0 такого, что $p(\lambda_0) = p(-\lambda_0) = 0$.

Интересны случаи, когда удается указать матрицу G такую, что уравнение (2) решается без предварительных условий. Тогда по свойствам матриц G и $B(G)$ иногда можно судить об асимптотической устойчивости системы (1). Один из таких случаев тот [2], когда $x'G_1x = 2(p_1x_n + p_3x_{n-2} + p_5x_{n-4} + \dots)^2$ и в (2) $c = (\dots p_5, 0, p_3, 0, p_1)$. В этом случае матрица B_1 — матрица Эрмита.

Другой случай разрешимости (2) получим, положив $x'G_2x = 2(p_{n-1}x_1 + p_{n-3}x_3 + p_{n-5}x_5 + \dots)^2$. Тогда в (2) $c = \frac{p_{n-1}}{p_n}(p_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-3}, \dots, p_0) - (0, p_{n-3}, 0, p_{n-5}, \dots)$. В этом случае

$$x'B_2x = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \frac{p_{n-1}}{p_n} \Big[(p_{n-1}x_1 + p_{n-2}x_2 + \dots + p_0x_n) -$$

$$- \frac{p_n}{p_{n-1}} (p_{n-3}x_2 + p_{n-5}x_4 + p_{n-7}x_6 + \ldots)\Big]^2, \quad b_{\alpha\beta} = 0, \ \alpha + \beta \text{ — не четн.},$$

$$b_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{\min(\beta, n-\alpha-1)} (-1)^k p_{n-\alpha-k-1} \, p_{n-\beta+k} - \Delta_{\alpha\beta} \frac{p_n}{p_{n-1}} \times$$

$$\times p_{n-\alpha-1} p_{n-\beta-1}, \ \alpha + \beta \text{ — четн.}, \ \alpha \geqslant \beta,$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = 0, \ \alpha, \ \beta \text{ — не четн.}, \ \Delta_{\alpha\beta} = 1, \ \alpha, \ \beta \text{ — четн.}, \ b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}, \ \alpha < \beta.$$

Из определенной положительности матрицы B_2 следует асимптотическая устойчивость системы (1).

Кроме определенной положительности B_2 для асимптотической устойчивости системы (1) требуется еще условие $x'G_2x \not\equiv 0$ вдоль решения системы (1). Последнее неравенство доказывается так же, как $x'G_1x \not\equiv 0$ в [3]. В [3] используется то обстоятельство, что из определенной положительности B_1 следует отличие от нуля n-го определителя Гурвица многочлена $p(\lambda)$, но из определенной положительности B_2 следует определенная положительность B_1, поскольку $L'B_2L = B_1$.

Функция $x'B_2x$ удобна при исследовании некоторых нелинейных систем дифференциальных уравнений автоматического регулирования.

Литература

1. Скачков Б. Н. Функция Ляпунова для одного класса систем авторегулирования.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 9, с. 1719—1723.
2. Parks P. C. Further Comment on «A Symmetric Matrix Formulation of the Hurwitz — Routh Stability Criterion».— IEEE, Trans. on Automatic Control (Corespondenc), 1963, vol. AC-8, p. 270—271.
3. Reiss R., Reiss G. Comment on a Note by Parks.— IEEE, Trans on Atomatic Control, 1964, vol. 9, N 1, p. 122.

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию 17 мая 1982 г.

УДК 517.925.52

С. П. ТОКАРЕВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УСТОЙЧИВОГО ИНВАРИАНТНОГО ТОРА

В работе изучается вопрос об эквивалентности некоторых аналитических систем вблизи инвариантного тора. В отличие от других результатов в этом направлении от линейного приближения рассматриваемых систем не требуется, чтобы оно имело постоянную матрицу или было приводимо к такому виду.

Будем предполагать, что все встречающиеся в дальнейшем функции вещественны при вещественных значениях аргументов и 2π-периодичны по угловым переменным. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(\varphi)x + X_0(x, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega, \tag{1}$$

где $x \in C^\mu$, $\varphi \in C^\nu$; ω — вещественный постоянный ν-мерный вектор; $A(\varphi)$ — квадратная $\mu \times \mu$-матрица; $X_0(x, \varphi)$ — μ-мерная вектор-функция; $A(\varphi)$ и $X_0(x, \varphi)$ аналитичны при

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\mu} |x_i|^2\Big)^{1/2} < \delta_0, \ \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu} |\operatorname{Im} \varphi_j| < \sigma_0; \ \frac{\partial X_0}{\partial x}(0, \varphi) \equiv 0,$$

$X_0(0, \varphi) \equiv 0$; для любого вещественного вектора φ матрица $1/2(A(\varphi) + A^*(\varphi))$ имеет отрицательные собственные числа.

Наряду с (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{gathered} \dot{y} = A(\psi)y + X_0(y, \psi) + X_2(y, \psi) \equiv X_3(y, \psi), \\ \dot{\psi} = \omega + \Phi_2(y, \psi) \equiv \Phi_3(y, \psi), \end{gathered} \tag{2}$$

где вектор-функции $X_2(y, \psi)$ и $\Phi_2(y, \psi)$ аналитичны при $\|y\| < \delta_1$, $\max_{1 \leqslant j \leqslant \nu} |\operatorname{Im} \psi_j| < \sigma_1$.