E. G. Emel'yanov, Some properties of the moduli of families of curves,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1985, Volume 144, 72–82

Е.Г.Емельянов

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ

1°. Пусть $\overline{\mathbb{C}}'$ – замкнутая плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с исключенными отмеченными точками $a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_m$ $(n+2m\geqslant 4, n+m\geqslant 3)$ и пусть $\mathcal{H}$ – семейство гомотопических классов замкнутых жордановых кривых $H_i, i=1,\dots,j+m$, на $\overline{\mathbb{C}}'$, где $H_i, i=1,\dots,j$, – класс кривых, не гомотопных нулю на $\overline{\mathbb{C}}'$, $H_{j+l}, l=1,\dots,m$, – класс кривых, гомотопных точечной кривой в b_l *). Пусть $\mathcal{P}_{\overline{\mathbb{C}}}(\alpha_1,\dots,\alpha_{j+m})$, где $\alpha_1,\dots,\alpha_{j+m}$ – заданные положительные числа, – проблема модуля, состоящая в нахождении точной нижней границы $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{C}}}(\alpha_1,\dots,\alpha_{j+m})$ соответствующего двойного интеграла в классе всех допустимых метрик. По теореме 0.I из [I], для экстремальной метрики $\rho^*(z)|dz|$ этой проблемы модуля имеем выражение $\rho^*(z)|dz| = |Q(z)|^{1/2}|dz|$, где

$$Q(z)\,dz^2 = \frac{P(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}'(z-a_k)\prod\limits_{l=1}^{m}{}'(z-b_l)^2}\,dz^2, \tag{I}$$

$P(z)$ – полином степени $\leqslant n+2m-4$, однозначно определяемый выбором семейства $\mathcal{H}$ и нормирующими условиями для допустимых метрик, и справедливо равенство (ср. с формулой (0.7) в [I])

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{C}}}(\alpha_1,\dots,\alpha_{j+m}) = \iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}}\left[\rho^*(z)^2 - \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{j+l}^2}{4\pi^2|z-b_l|^2(1+|z-b_l|^2)}\right]dx\,dy. \tag{2}$$

Замыкания критических траекторий дифференциала (I) разбивают $\overline{\mathbb{C}}'\cup\{b_1,\dots,b_m\}$ на семейство $\mathcal{D}$ областей $D_i, i=1,\dots,j+m$, где D_i, $i=1,\dots,j$, – двусвязная область, ассоциированная с H_i (некоторые из этих областей могут быть вырожденными), D_{j+l}, $l=1,\dots,m$, – односвязная область, ассоциированная с H_{j+l}. Для любого допустимого семейства $\widetilde{\mathcal{D}}$ областей $\widetilde{D}_i$ имеем неравенство

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{C}}}(\alpha_1,\dots,\alpha_{j+m}) \geqslant \sum_{i=1}^{j+m}\alpha_i^2 M(\widetilde{D}_i) \tag{3}$$

(здесь $M(\widetilde{D}_i)$ – модуль области $\widetilde{D}_i$, ассоциированный с классом H_i), и равенство в (3) реализуется только в случае $\widetilde{D}_i = D_i$, $i=1,\dots,j+m$.

*) Везде в дальнейшем пользуемся терминологией и обозначениями в [I].

Для областей семейства $\mathfrak{D}$ будем использовать обозначение $M(D_l) = M_l$. В частности, имеем

$$M_{j+l} = \frac{1}{2\pi} \log R(D_{j+l}, b_l), \quad \text{если} \quad b_l \neq \infty,$$

где через $R(\Omega, \omega)$ обозначаем конформный радиус односвязной области Ω относительно точки $\omega \in \Omega$.

Целью данной работы является изучение зависимости модуля $\mathcal{M}_{\bar{\mathbb{C}}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j+m})$ от параметров α_i и от расположения отмеченных точек a_k, b_l. Эту величину для краткости будем обозначать через $\mathcal{M}$, указывая в скобках соответствующую переменную: например, $\mathcal{M}(\alpha_k)$ или $\mathcal{M}(b_l)$. Имеют место следующие теоремы. *)

ТЕОРЕМА I.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \mathcal{M}(\alpha_k) = 2\alpha_k M_k, \quad k = 1, \ldots, j+m. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 2. Для $b_l \in \{b_1, \ldots, b_m\}$, $b_l \neq \infty$, имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \bar{b}_l} \mathcal{M}(b_l) = -\frac{\alpha_{j+l}^2}{4\pi} \overline{Q'_{j+l}(b_l)}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_{j+l}^2 Q_{j+l}(z) = -4\pi^2 (z - b_l)^2 Q(z), \quad Q_{j+l}(b_l) = 1.$$

ТЕОРЕМА 3. Для $a_k \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_k \neq \infty$, имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \bar{a}_k} \mathcal{M}(a_k) = \pi \overline{Q_k(a_k)}, \tag{6}$$

где

$$Q_k(z) = (z - a_k) Q(z).$$

2^0. Теорема I известна для частных случаев (см., например, [2]), и поскольку ее доказательство достаточно просто, то на нем мы здесь не останавливаемся. Доказательство теорем 2 и 3 основывается на следующей лемме.

ЛЕММА. Пусть $F(z)$ и $h(z, \zeta)$ – вещественнозначные функции, определенные при $|z - w| < \delta$, $|\zeta - w| < \delta$ для некоторого комплексного w и $\delta > 0$ и удовлетворяющие следующим условиям:

---

*) Теорема 3 независимо и несколько другим путем доказана А.Ю.Солыниным: см. его работу, публикуемую на стр.136–145 настоящего сборника. Аналогичное замечание относится к следствию на стр.80 (Прим.ред.)

I) Функция $h(z,\zeta)$ для любого z, $|z-w|<\delta$, непрерывна по ζ, а для любого ζ, $|\zeta-w|<\delta$ ($\mathbb{R}$ –) аналитическая по z, т.е.

$$h(z+\Delta,\zeta)-h(z,\zeta)=\sum_{\substack{m_1+m_2=1\\ m_1,m_2\geqslant 0}}^{\infty} C_{m_1,m_2}(\zeta)\,\Delta_1^{m_1}\Delta_2^{m_2} \tag{7}$$

при $\Delta=\Delta_1+i\Delta_2$ и $|\Delta_k|<\delta$, $k=1,2$.

2) Производные $\frac{\partial^s}{\partial z^s}h(z,\zeta)\Big|_{z=\zeta}$, $s=1,2,\ldots$, непрерывны по ζ при $|\zeta-w|<\delta$.

3) Существует такая постоянная $\alpha>0$, что для любых z и ζ, где $|z-w|<\delta$, $|\zeta-w|<\delta$, выполняется условие

$$F(z)-F(\zeta)\geqslant \alpha^2\big(h(z,\zeta)-h(\zeta,\zeta)\big). \tag{8}$$

Тогда $F(z)$ – гладкая функция для $|z-w|<\delta$, и имеет место равенство:

$$\frac{\partial}{\partial z}F(\zeta)=\alpha^2\frac{\partial}{\partial z}h(z,\zeta)\Big|_{z=\zeta}. \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Меняя в (8) ролями z и ζ, получаем

$$F(z)-F(\zeta)\leqslant \alpha^2\big(h(z,z)-h(\zeta,z)\big). \tag{8 }$$

Полагая $z-\zeta=\Delta=\Delta_1+i\Delta_2$, на основании (7) имеем

$$h(z,\zeta)-h(\zeta,\zeta)=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial u}h(u,\zeta)\Big|_{u=\zeta}\cdot(z-\zeta)\right\}+\sum_{\substack{m_1+m_2=2\\ m_1,m_2\geqslant 0}}^{\infty} C_{m_1,m_2}(\zeta)\Delta_1^{m_1}\Delta_2^{m_2}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial u}h(u,\zeta)\Big|_{u=\zeta}\cdot(z-\zeta)\right\}+O(|\Delta|)\quad\text{при } z\to\zeta. \tag{I0}$$

Точно так же

$$h(z,z)-h(\zeta,z)=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial u}h(u,z)\Big|_{u=z}\cdot(z-\zeta)\right\}-\sum_{\substack{m_1+m_2=2\\ m_1,m_2\geqslant 0}}^{\infty} C_{m_1,m_2}(z)\,(-\Delta_1)^{m_1}(-\Delta_2)^{m_2}.$$

По условию 2), $C_{m_1,m_2}(z)\longrightarrow C_{m_1,m_2}(\zeta)$ при $z\to\zeta$ и, так как ряд (7) равномерно сходится при $|\Delta_k|<\delta$, $k=1,2$, то

$$h(z,z)-h(\zeta,z)=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial u}h(u,\zeta)\Big|_{u=\zeta}\cdot(z-\zeta)\right\}+O(|\Delta|). \tag{I0$'$}$$

Подставляя (I0) в (8) и (I0$'$) в (8), получаем двойное неравенство, из которого и следует утверждение леммы.

3^0. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $b_\ell \neq \infty$ и точка b принадлежит достаточно малой окрестности b_ℓ. Модулю $\mathcal{M}(b)$ соответствует квадратичный дифференциал $Q(z,b)\,dz^2$, определяющий экстремальное разбиение $\overline{\mathbb{C}}$ на области $D_i(b)$, $i=1,\dots,j+m$. Пусть $M_i(b)$ – модуль области $D_i(b)$, ассоциированный с классом H_i. В соответствии с ранее введенными обозначениями, имеем равенства $M_i(b_\ell)=M_i$, $D_i(b_\ell)=D_i$. Стандартное рассуждение, которое мы здесь не приводим, показывает, что из единственности экстремальной метрики рассматриваемой проблемы модуля следует непрерывность $Q(z,b)$ и $M_i(b)$ по b.

Пусть $\zeta = g(z,b)$ – однолистное отображение $D_{j+\ell}$ на круг $\Delta=\{|\zeta|<1\}$, $g(b,b)=0$, $g'(b,b)=1/R(b)$, $R(b)>0$. Здесь $R(b)=R(D_{j+\ell},b_\ell)$ и $M_{j+\ell}(b)=\frac{1}{2\pi}\log R(b)$. Известно (см. [I]), что $g(z,b)$ удовлетворяет в $D_{j+\ell}$ уравнению

$$\alpha_{j+\ell}^2\left(\frac{g'(z,b)}{g(z,b)}\right)^2 = -4\pi^2 Q(z,b). \tag{II}$$

Пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что круг $\Delta_\varepsilon(b_\ell)=\{b:|b-b_\ell|<\varepsilon\}$ содержится в $D_{j+\ell}(b)$. Положим

$$h(z,b)=\frac{1}{2\pi}\log R\left(D_{j+\ell}(b),z\right).$$

Покажем, что $h(z,b)$ удовлетворяет условиям леммы. Имеем

$$2\pi\cdot 2\frac{\partial}{\partial z}h(z,b) = -\frac{g''(z,b)}{g'(z,b)} - \frac{2\overline{g(z,b)}\cdot g'(z,b)}{1-|g(z,b)|^2},$$

откуда

$$2\pi\cdot 2\frac{\partial}{\partial z}h(z,b)\Big|_{z=b} = -\frac{g''(b,b)}{g'(b,b)},\quad 2\pi\cdot 2\frac{\partial^s}{\partial z^s}h(z,b)\Big|_{z=b} =$$

$$= -\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\frac{g''(z,b)}{g'(z,b)}\Big|_{z=b},\quad s=2,3,\dots \tag{I2}$$

Перепишем (II) в виде

$$g'^2(z,b)=\frac{g^2(z,b)}{(z-b)^2}\cdot Q_{j+\ell}(z,b), \tag{II$'$}$$

где $Q_{j+\ell}(z,b)$ определено также, как в (5). При $|z-b|<\delta$, где $\delta>0$ и достаточно мало, имеет место разложение

$$Q^{1/2}_{j+\ell}(z,b)=1+\sum_{s=1}^{\infty} A_s(b)(z-b)^s ,$$

где $A_s(b)$ – непрерывны по b, $s=1,2,\ldots$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z-b$ в (II), получаем рекуррентное соотношение

$$\frac{k-1}{k!}\, g^{(k)}(b,b)=\sum_{s=1}^{k-1} g^{(s)}(b,b)\,\frac{A_{k-s}(b)}{s!} . \qquad (13)$$

В силу (12) и (13) ясно, что $\frac{\partial^s}{\partial z^s} h(z,b)\Big|_{z=b}$ непрерывны по b для $s=1,2,\ldots$. ($\mathbb{R}$-)-аналитичность функции $h(z,b)$ по z легко следует из ее определения. Наконец, на основании неравенства (3) и утверждения о случае равенства в (3) имеем

$$\mathcal{M}(b)=\sum_{i\neq j+\ell} \alpha_i^2 M_i(b)+\alpha^2_{j+\ell} h(b,b) ,$$

$$\mathcal{M}(z)>\sum_{i\neq j+\ell} \alpha_i^2 M_i(b)+\alpha^2_{j+\ell} h(z,b) ,$$

откуда

$$\mathcal{M}(z)-\mathcal{M}(b)>\alpha^2_{j+\ell}\left(h(z,b)-h(b,b)\right) .$$

Таким образом, для функции $h(z,b)$ выполняются все условия леммы. Из (12) и (13) находим

$$2\,\frac{\partial}{\partial z} h(z,b)\Big|_{z=b}=-\frac{1}{2\pi}\,\frac{g''(b,b)}{g'(b,b)}=-\frac{1}{2\pi}\cdot 2A_1(b)=-\frac{1}{2\pi}\, Q'_{j+\ell}(b,b). \qquad (14)$$

Применяя лемму и используя (14), получаем

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathcal{M}(b_\ell)=\alpha^2_{j+\ell}\,\frac{\partial}{\partial z} h(z,b_\ell)\Big|_{z=b_\ell}=-\frac{\alpha^2_{j+\ell}}{4\pi}\, Q'_{j+\ell}(b_\ell,b_\ell),$$

что равносильно (5). Этим теорема 2 доказана.

4°. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $a_k\neq\infty$ и точка a принадлежит достаточно малой окрестности a_k. Пусть по-прежнему модулю $\mathcal{M}(a)$ соответствует дифференциал $Q(z,a)\,dz^2$ и семейство областей $D_i(a)$ с модулями $M_i(a)$. Как и при доказательстве теоремы 2, мы опускаем несложное рассуждение, показывающее, что $Q(z,a)$ и $M_i(a)$ непрерывны по a.

Пусть сначала точка a_k не совпадает ни с одним из нулей дифференциала (I). Тогда она служит простым полюсом указанного дифференциала, и из нее выходит единственная траектория γ_{a_k}, Q-длина которой пусть равна $4\beta>0$. Из соображений непрерывности ясно, что существует такая окрестность V точки a_k, что любая точка $a\in V$ является простым полюсом дифференциала $Q(z,a)\,dz^2$, и длина в $Q(z,a)$-метрике выходящей из нее траектории γ_a больше 2β.

Возможны два случая. I) Точка a_k лежит на границе некоторой круговой области $D_{j+l}=D_{j+l}(a_k)$. Те же соображения непрерывности позволяют считать, что в этом случае и любая точка $a\in V$ лежит на границе круговой области $D_{j+l}(a)$ дифференциала $Q(z,a)\,dz^2$.

2) Точка a_k лежит на границе некоторой кольцевой области $D_i=D_i(a_k)$. Тогда и любая точка $a\in V$ принадлежит границе кольцевой области $D_i(a)$ дифференциала $Q(z,a)\,dz^2$.

Рассмотрим случай I). Пусть $\zeta=g(z,a)$ – конформное отображение $D_{j+l}(a)$ на круг $\Delta=\{|\zeta|<1\}$, $g(b_l,a)=0$, $g(a,a)=1$, и $w=\omega(\zeta)$ – отображение Δ на круг $|w|<1$ с разрезом по отрезку $[A,1]$, $\omega(1)=A$, $\omega(e^{\pm i\beta})=1$. Пусть $\widehat{D}_{j+l}(a)$ – область, получаемая присоединением к $D_{j+l}(a)$ дуги $(s,a]$ кривой γ_a, $Q(z,a)$-длина которой равна β. Тогда суперпозиция $\varphi(z,a)=\omega\circ g(z,a)$ аналитически продолжима до отображения $\widehat{D}_{j+l}(a)$ на круг $|w|<1$ и поэтому регулярна в точке a. Положим

$$h(z,a)=\frac{1}{2\pi}\log R\left(\Delta\setminus\left[\varphi(z,a),\frac{\varphi(z,a)}{|\varphi(z,a)|}\right],0\right)-\frac{1}{2\pi}\log|\varphi'(b_l,a)|.$$

Покажем, что функция $h(z,a)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Обозначив $x=x(z,a)=|\varphi(z,a)|$, имеем

$$h(z,a)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{4x}{(1+x)^2}-\text{const}, \tag{I5}$$

откуда видна $(\mathbb{R}-)$ аналитичность функции $h(z,a)$ по z. Из (II) и определения функции $\omega(\zeta)$ следует, что $\varphi(z,a)$ удовлетворяет в области $\widehat{D}_{j+l}(a)$ уравнению

$$\varphi'^2(z,a)=\frac{\varphi^2(z,a)}{A}\,\frac{\varphi(z,a)-A}{z-a}\,\frac{1-A\varphi(z,a)}{(1-\varphi(z,a))^2}\,\frac{4\pi^2}{\alpha_{j+l}^2}\,Q_k(z,a), \tag{I6}$$

где $Q_k(z,a)$ определяется также, как в (6), $A=\varphi(a,a)$. Из

(I6) по индукции нетрудно убедиться, в том, что $\varphi^{(s)}(a,a)$, $s=1,2,\ldots$, выражаются через A и значения $Q_k^{(\sigma)}(a,a)$ при $\sigma \leqslant s$, следовательно, непрерывны по a. В свою очередь, из (I5) следует, что при $s=1,2,\ldots$ $\frac{\partial^s}{\partial z^s} h(z,a)$ выражаются через A и производные $\varphi^{(\sigma)}(a,a)$ и тем самым непрерывны по a. Непосредственный подсчет показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial z} h(z,a)\Big|_{z=a} = \frac{\pi}{\alpha_{j+l}^2} Q_k(a,a). \tag{I7}$$

Как и при доказательстве теоремы 2, получаем неравенство

$$\mathcal{M}(z) - \mathcal{M}(a) \geqslant \alpha_{j+l}^2 \big(h(z,a) - h(a,a)\big).$$

Применяя лемму и используя (I7), находим

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{M}(a_k) = \alpha_{j+l}^2 \frac{\partial}{\partial z} h(z,a_k)\Big|_{z=a_k} = \pi Q_k(a_k,a_k),$$

что равносильно (6).

Рассмотрим случай 2). Пусть $\zeta = q(z,a)$ – отображение двусвязной области $D_l(a)$ на кольцо $\mathcal{K}(\rho,1) = \{\zeta : \rho < |\zeta| < 1\}$, $q(a,a)=1$ и $w=\omega(\zeta)$ – отображение кольца $\mathcal{K}(\rho,1)$ на кольцо $\mathcal{K}(\rho_1,1)$ с разрезом по отрезку $[A,1]$, $\omega(1)=A$, $\omega(e^{\pm i\beta})=1$. Как и в случае I), суперпозиция $\varphi(z,a) = \omega \circ q(z,a)$ регулярна в точке a. Положим

$$h(z,a) = \frac{1}{2\pi} \log \operatorname{Mod}\left(\mathcal{K}(\rho_1,1) \setminus \left[\varphi(z,a), \frac{\varphi(z,a)}{|\varphi(z,a)|}\right]\right).$$

Покажем, что функция $h(z,a)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Пусть $x = x(z,a) = |\varphi(z,a)|$. Функция $u = H(w) = \kappa\, sn\left\{\frac{2}{\pi i} K(\kappa^2) \log i w, \kappa^2\right\}$, $H(1)=\kappa$, при надлежащем κ отображает кольцо $\mathcal{K}(\rho_1,1)$ на круг $|u|<1$ с разрезом по отрезку $[-\kappa,\kappa]$. Рассматривая конформный автоморфизм круга $\tau(u) = (u-a)/(1-au)$, при котором $[-\kappa, H(x)]$ переходит в отрезок $[-\kappa(x),\kappa(x)]$, находим

$$h(z,a) = \frac{1}{8} \frac{K'(\kappa^2(x))}{K(\kappa^2(x))}, \qquad \kappa(x) = \kappa + \frac{\sqrt{1-\kappa^2}\,(H(x)-\kappa)}{\sqrt{1-\kappa^2} + \sqrt{1-H^2(x)}} =$$

$$= \kappa + \kappa(1-\kappa^4)\frac{K^2(\kappa^2)}{\pi^2}(1-x)^2 + \ldots$$

Из этого выражения видна ($\mathbb{R}$-) аналитичность функции $h(z,a)$ по z. Справедливость условий 2) и 3) леммы устанавливается так же, как и в предыдущем случае. Непосредственное вычисление дает равенство

$$\frac{\partial}{\partial z} h(z,a)\Big|_{z=a} = \frac{\pi}{\alpha_i^2} Q_k(a,a).$$

Применяя лемму, отсюда получаем равенство (6).

Осталось рассмотреть случай совпадения точки a_k с одним из нулей дифференциала (I). В этом случае модуль $\mathcal{M}(a_k)$ имеет то же значение, что и модуль в экстремально-метрической проблеме $\mathcal{M}'$, где точка a_k исключена из числа заданных. Ясно, что если к отмеченным точкам проблемы $\mathcal{M}'$ присоединить точку a, то модуль может только уменьшиться. Отсюда следует, что функция $\mathcal{M}(a)$ имеет в точке a_k локальный максимум. Теперь из условия $\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{M}(a) \to 0$ при $a \to a_k$ заключаем, что $\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{M}(a_k) = 0$, т.е. что формула (6) верна и в этом случае. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 имеет следующий геометрический смысл: градиент $\mathcal{M}(a)$ в точке a_k направлен по касательной к критической траектории γ_{a_k} дифференциала (I), выходящей из a_k.

5°. При использовании метода экстремальных метрик важным моментом оказывается доказательство монотонности изменения величины $\mathcal{M}(a_i)$ или $\mathcal{M}(b_l)$ при движении простого полюса a_i или двойного полюса b_l вдоль некоторой кривой. При этом удобно рассматривать кривую, являющуюся траекторией некоторого квадратичного дифференциала $Q_0(z)\,dz^2$. Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР I. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Im} a > 0$, и пусть $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = a$, $b_1 = \infty$. Пусть $H_1^{(1)}$ и $H_1^{(2)}$ - классы кривых на $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{-1\ 1\ a, \infty\}$, отделяющих -1 и 1 от a и ∞ и гомотопных соответственно разрезу по отрезку $[-1,1]$ и разрезу по ломаной с вершинами $-1, a+i\varepsilon, 1$, где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало, H_2 - класс кривых на $\overline{\mathbb{C}}'$, гомотопных окружности $|z| = r$ при достаточно большом r. Через $\mathcal{M}^{(j)}(\alpha, a)$, где $\alpha > 0$, обозначаем модуль в экстремально-метрической проблеме $\mathcal{P}^{(j)}(1,\alpha)$ для пар классов $H_1^{(j)}$ и H_2, $j=1,2$; эти проблемы модуля подробно исследованы в [3]. Рассмотрим изменение модуля $\mathcal{M}^{(j)}(\alpha, a)$ при движении точки a по дуге эллипса $L = \{z : |z+1| + |z-1| = 2\rho, \rho > 1\}$, являющейся траекторией дифференциала

$$Q_0(z)\,dz^2 = -\frac{dz^2}{z^2-1}. \tag{19}$$

ТЕОРЕМА 4. Модуль $\mathcal{M}^{(j)}(\alpha, a)$, $j=1,2$, монотонно возрастает при движении точки a по дуге эллипса L от точки $z_1 = \rho$ пересечения L с положительной вещественной полуосью до точки

$z_2 = i\sqrt{\rho^2-1}$ пересечения L с положительной мнимой полуосью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ассоциированным с рассматриваемой проблемой модуля квадратичным дифференциалом является (см. [3])

$$Q^{(j)}(z)\,dz^2 = -\frac{z-c^{(j)}}{z-a}\,\frac{dz^2}{z^2-1}, \quad j=1,2, \tag{20}$$

где $c^{(j)} = c^{(j)}(a,\alpha)$. Ортогональными траекториями дифференциала (19) служат гиперболы с фокусами в -1 и 1. Рассмотрим ветвь Γ такой гиперболы, проходящую через точку a, и обозначим через Ω_1 и Ω_2 компоненты $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, $1\in\Omega_1$. По замечанию к теореме 3 достаточно доказать, что критическая траектория $\gamma_a^{(j)}$ дифференциала (20) выходит из точки a в область Ω_2.

Легко видеть, что касание траекторий дифференциала (20) с ортогональными траекториями дифференциала (19) происходит в точках интервала $(a, c^{(j)})$. Допустим, что $\gamma_a^{(j)}$ выходит из точки a в Ω_1. Тогда, взяв точку $z_0\in\Omega_2$, достаточно близкую к a, и рассматривая проходящую через z_0 траекторию дифференциала (20), видим, что она должна иметь две точки пересечения с Γ. На дуге этой траектории, заключенной между указанными точками, должна быть точка касания с ортогональной траекторией дифференциала (19). Отсюда следует, что $(a,c^{(j)}]\subset\Omega_2$. Траектория $\gamma_a^{(j)}$ в таком случае должна пересекать Γ. Из результатов в [3] следует, что подобласть $\Omega_1'\subset\Omega_1$, отсекаемая от Ω_1 траекторией $\gamma_a^{(j)}$, не может содержать точку $z=1$. Поэтому на $\gamma_a^{(j)}\cap\Omega_1$ существует точка касания с ортогональной траекторией дифференциала (19), что противоречит полученному выше условию $(a,c^{(j)}]\subset\Omega_2$. Это противоречие и доказывает теорему.

Пусть $E(\omega_1,\dots,\omega_k)$ – континуум наименьшей емкости, содержащий указанные точки. Если α достаточно велико, то кольцевая область $D_1^{(j)}$ дифференциала (20) вырождается (см. [3]), и из теоремы 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ. Емкость $E(-1,1,a)$ монотонно убывает при движении точки a по дуге эллипса L от z_1 к z_2.

Это следствие дополняет известный результат Дженкинса [4] о минимуме $\operatorname{cap} E(-1,1,a)$ при $a\in L$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Im} a>0$ и пусть $a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=a$, $a_4=\bar a$, $b_1=\infty$. Пусть H_1 - класс кривых на $\mathbb{C}'=\mathbb{C}\setminus\{-1,1,a,\bar a,\infty\}$, отделяющих точки $a,\bar a$ от $-1,1,\infty$ и гомотопных разрезу по ломаной с вершинами $a, 1+\varepsilon, \bar a$, где $\varepsilon>0$ и достаточно мало, H_2 - класс кривых на $\mathbb{C}'$, гомотопных окружности $|z|=r$ при достаточно большом r. Через $\mathcal{M}(\alpha,a)$, где $\alpha>0$, обозначаем модуль в проблеме $\mathcal{P}(1,\alpha)$ для классов H_1 и H_2.

ТЕОРЕМА 5. Модуль $\mathcal{M}(\alpha, a)$ монотонно убывает при движении точки a по дуге эллипса L от z_1 к z_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данной задачи ассоциированным дифференциалом служит

$$Q(z)\,dz^2 = -\frac{(z-c_1)(z-c_2)\,dz^2}{(z^2-1)(z-a)(z-\bar{a})} . \tag{21}$$

Легко видеть, что в зависимости от расположения точки a и величины α возможны три случая: $c_1 \leqslant -1,\ c_2 = -1$; $-1 < c_1 = c_2 < 1$; $c_1 = 1,\ c_2 \geqslant 1$. Условие касания траекторий дифференциала (21) с ортогональными траекториями дифференциала (19) имеет вид

$$\frac{(z-c_1)(z-c_2)}{(z-a)(z-\bar{a})} = t , \tag{22}$$

где t – вещественное. Алгебраическая кривая, определяемая уравнением (22), представляет собой объединение вещественной оси с ортогональной к ней окружностью C, проходящей через точки $a, \bar{a}$ и точки s_1, s_2, $s_1 < s_2$, которые легко вычисляются. Условию $t < 0$ отвечает дуга C' окружности C, соединяющая точки $a, \bar{a}$ и проходящая через точку s_1, а также интервал $(c_1, -1)$, если $c_1 < -1$, и $(1, c_1)$, если $c_1 > 1$. Пусть кривая Γ и области Ω_1 и Ω_2 те же, что и в предыдущем примере. Покажем, что траектория γ_a дифференциала (21) выходит из точки a в область Ω_1. Предположим противное. В таком случае дуга C' должна целиком лежать в Ω_1. Если область D_1 экстремального разбиения данной задачи не вырождается, то траектория γ_a пересекает вещественную ось в некоторой точке $z_0 = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и потому пересекается с Γ. Но тогда на Γ должна существовать точка касания с траекторией дифференциала (21), что невозможно. Если же $D_1 = \varnothing$ и γ_a не пересекается с Γ, то необходимо имеет место случай $c_1 = c_2 = c$, $0 < c < 1$. Пусть x – точка пересечения Γ с вещественной осью, Γ' – дуга гиперболы Γ, соединяющая точки a и x. Внутри криволинейного треугольника, ограниченного Γ', дугой траектории γ_a и отрезком $[c, x]$, нет критических точек дифференциала (21). Поскольку отрезок $[c, x]$ – дуга траектории дифференциала (21), то на Γ' должна существовать точка касания с траекторией этого дифференциала, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Если α достаточно велико, то двусвязная область D_1 вырождается, а $D_2 = \bar{\mathbb{C}} \setminus E(-1, 1, a, \bar{a})$. Поэтому в качестве следствия теоремы 5 получаем результат, ранее доказанный С.И.Федоровым [5] другим путем: $\operatorname{cap} E(-1, 1, a, \bar{a})$ монотонно возрастает при движении точки a по эллипсу L от z_1 до z_2.

Литература

1. К у з ь м и н а Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.139. 240 с.
2. H u c k e m a n n F. On extremal decomposition of the unit disk. - J.Anal.Math., 1967, vol.19, p.173-202.
3. К у з ь м и н а Г.В. Об одной проблеме модуля для семейств кривых. - Препринты ЛОМИ, P-6-83. Л.:ЛОМИ, 1983. 43 с.
4. J e n k i n s J.A. On certain geometrical problems associated with capasity. - Math. Nachr., 1969, Bd 39, H. 4 - 6, S. 349-356.
5. Ф е д о р о в С.И. О вариационной проблеме Чеботарева в теории емкости плоских множеств и теоремах покрытия для однолистных конформных отображений. - Мат.сб., 1984, т.124(166), № 1 (5), с.121-139.