Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

P. P. Kargaev, Nonclassical weighted norm estimates for some Calderón–Zygmund operators on the plane, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1994, Volume 217, 74–82

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.174
January 17, 2025, 07:51:30

П. П. Каргаев

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ КАЛЬДЕРОНА—ЗИГМУНДА НА ПЛОСКОСТИ

0. Пусть μ-борелевская мера с компактным носителем F в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию Карлесона. В данной работе изучается поведение операторов Кальдерона–Зигмунда A_K с ядрами $K(\zeta, z) = (\zeta - z)^{-2}$, $K(\zeta, z) = (|\zeta - z|(\zeta - z))^{-1}$:

$$A_K(f)(z) = \int\limits_F K(\zeta, z) f(\zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus F.$$

Нас интересует, при каких условиях на неубывающую положительную функцию ψ, удовлетворяющую соотношению $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt < +\infty$, оператор A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$, где m-мера Лебега; $\Phi(z) = \rho(z)\psi(\rho(z))$, $z \in \mathbb{C} \setminus F$, ρ-расстояние до носителя F.

В случае, когда F-стандартное канторовское множество размерности 1, μ-мера Хаусдорфа размерности 1 на F, $K(\zeta, z) = (\zeta - z)^{-2}$, $\psi \equiv 1$ вопрос о том, действует ли A_K из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ поставил Е. М. Дынькин в обзоре [2]. Оказывается (см. теорему 3), в этом случае $A_K(L^2(\mu)) \subset L^2(\Phi m)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^1 \frac{\psi(t)}{t}\, dt < +\infty. \tag{0}$$

Это же условие на функцию ψ определяет ситуацию $A_K(L^2(\mu)) \subset L^2(\Phi m)$ и в том случае, когда μ удовлетворяет условию (5), $K(\zeta, z) = (|\zeta - z|(\zeta - z))^{-1}$ (см. теорему 4). В силу теоремы 1 неравенство (0) влечет соотношение $A_K(L^2(\mu)) \subset L^2(\Phi m)$ и для ядра $K(\zeta, z) = |\zeta - z|^{-2}$. Это означает, что эффект интерференции в описанных случаях полностью отсутствует.

1. Пусть μ-борелевская мера в $\mathbb{C}$ с компактным носителем $F = \operatorname{supp} \mu$. Предположим, что μ удовлетворяет условию Карлесона:

$$\mu(B(z, r)) \leqslant c_1 r, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad r > 0.$$

(Здесь и далее $B(z,r) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}$). Мы будем рассматривать интегральные операторы

$$A_K(f)(z) = \int\limits_F K(\zeta, z) f(\zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad f \in L^2(\mu), \quad z \in CF$$

($CF = \mathbb{C} \setminus F$) с ядрами $K : F \times CF \to \mathbb{C}$, которые удовлетворяют следующему условию:

$$|K(\zeta, z)| \leqslant c_2 |\zeta - z|^{-2}, \qquad \zeta \in F, \quad z \in CF. \tag{1}$$

Пусть далее ψ-неубывающая положительная функция, заданная на $(0, +\infty)$ и такая, что

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt < +\infty.$$

Обозначим через $\rho(z)$ расстояние от точки $z \in \mathbb{C}$ до множества F и положим $\Phi(z) = \psi(\rho(z))\rho(z)$, $z \in CF$.

Мы будем изучать условия на функцию ψ, при которых оператор A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ (здесь m-мера Лебега). В силу теоремы о замкнутом графике, если A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$, то он ограничен, то есть $A_K \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi m))$. Положим теперь

$$B_{K,\psi}(f)(z) = \Phi^{1/2}(z) A_K(f)(z), \qquad z \in CF, \quad f \in L^2(\mu).$$

Мы укажем условия на множество F, при выполнении которых оператор $B_{K,\psi}$ слабого типа (2,2). Заметим, что $B_{K,\psi} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(m))$ в том и только в том случае, когда $A_K \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi m))$ и при этом $\|B_{K,\psi}\| = \|A_K\|$.

2. Теорема 1. *Пусть*

$$\int\limits_0^1 \frac{\psi(t)}{t}\, dt < +\infty. \tag{2}$$

Тогда $A_K \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi m))$.

Доказательство. Пусть $f \in L^2(\mu)$, $g = A_K(f)$. Тогда из условия (1) и из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|g(z)|^2 \leqslant c_2^2 \int\limits_F \frac{|f(\zeta)|^2 \psi(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(\zeta) \int\limits_F \frac{d\mu(\zeta)}{\psi(|\zeta - z|)|\zeta - z|^2}, \qquad z \in CF,$$

Далее из карлесоновости меры μ и из возрастания ψ следует

$$\begin{aligned}&\int\limits_F \frac{d\mu(\zeta)}{\psi(|\zeta-z|)|\zeta-z|^2} \leqslant \frac{1}{\psi(\rho(z))}\int\limits_F \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-z|^2} \leqslant \frac{2c_1}{\psi(\rho(z))\rho(z)},\\ &|g(z)|^2\Phi(z) \leqslant 2c_1c_2^2\int\limits_F \frac{|f(\zeta)|^2\psi(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|^2}\,d\mu(\zeta) \quad z\in CF.\end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $A>0$, $G_A=\bigcup\limits_{z\in F}B(z,A)$. Тогда

$$\int\limits_{G_A}|g(z)|^2\Phi(z)\,dm(z)\leqslant$$

$$\leqslant 2c_1c_2^2\int\limits_F|f(\zeta)|^2\,d\mu(\zeta)\int\limits_{G_A}\frac{\psi(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|^2}\,dm(z)\leqslant$$

$$\leqslant 2c_1c_2^2\|f\|^2_{L^2(\mu)}\int\limits_0^a\frac{\psi(t)}{t}\,dt.$$

Здесь в качестве a можно взять, например, $A+\operatorname{diam}F$.

Пусть теперь $A=2\operatorname{diam}F$. Фиксируем некоторую точку $\zeta_0\in F$. Тогда для $\zeta\in F$, $z\notin G_A$ имеет место неравенство $|\zeta-z|\geqslant|z-\zeta_0|-\operatorname{diam}F\geqslant\frac12|z-\zeta_0|$. Отсюда

$$|g(z)|\leqslant c_2\int\limits_F\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^2}\,d\mu(\zeta)\leqslant\frac{4c_2}{|z-\zeta_0|^2}\|f\|_{L^2(\mu)}(\mu(F))^{1/2};$$

$$|g(z)|^2\Phi(z)\leqslant 16c_2^2\|f\|^2_{L^2(\mu)}(\mu(F))\psi(|z-\zeta_0|)|z-\zeta_0|^{-3},\quad z\notin G_A.$$

Наконец, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus G_A}|g(z)|^2\Phi(z)\,dm(z)\leqslant 16c_2^2\|f\|^2_{L^2(\mu)}\mu(F)\int\limits_A^{+\infty}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt. \tag{4}$$

2. Будем говорить, что F удовлетворяет условию Коточигова, если

$$\sup_{\zeta\in B(z,r)}\rho(\zeta)\geqslant c_3r,\qquad z\in\mathbb{C},\quad r>0,$$

где $c_3>0$ — некоторая константа.

Теорема 2. *Пусть F удовлетворяет условию Коточигова. Тогда $B_{K,\psi}$-оператор слабого типа (2,2), если F снабжено мерой μ, а CF — мерой Лебега m.*

Доказательство. Согласно теореме Шегрена (см. [1]), если выполнено условие Коточигова, то существует константа $c_F > 0$, зависящая только от множества F и такая, что для любой борелевской меры ν, у которой $\operatorname{supp}\nu \subset F$

$$m\left(\left\{z \in \mathbb{C} : \int\limits_F \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} > a\right\}\right) \leqslant c_F \nu(F)/a, \qquad a > 0.$$

Из неравенства (3) и из возрастания функции ψ получим для $f \in L^2(\mu)$, $g = B_{K,\psi}(f)$:

$$|g(z)|^2 \leqslant 2c_1c_2^2 \int\limits_F \frac{|f(\zeta)|^2\, d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, \psi(\rho(z) + \operatorname{diam} F), \qquad z \in CF.$$

Если теперь $A = 2\operatorname{diam} F$ и $\rho(z) < A$, то $\psi(\rho(z) + \operatorname{diam} F) < \psi\left(\frac{3A}{2}\right)$ и, применив теорему Шегрена к мере $|f|^2\mu$, получим

$$m(\{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < A, |g(z)| > a\}) \leqslant 2c_1c_2^2 \|f\|^2_{L^2(\mu)} \psi\left(\frac{3A}{2}\right) \Big/ a^2,$$
$$a > 0.$$

С другой стороны, мы получили при доказательстве теоремы 1 неравенство (4), из которого очевидно следует, что

$$m(\{z \in \mathbb{C} : \rho(z) \geqslant A, |g(z)| > a\}) \leqslant 16c_2^2 \|f\|^2_{L^2(\mu)} \mu(F) \int\limits_A^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt \Big/ a^2,$$
$$a > 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Пусть мера μ удовлетворяет следующему условию: существуют положительные константы $c_4 > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$\mu(B(z, r)) \geqslant c_4 r, \qquad z \in F, \quad 0 < r < \delta. \tag{5}$$

Тогда F удовлетворяет условию Коточигова.

Доказательство. Пусть Q-квадрат со стороной $r < 2\delta$. Разобьем Q на n^2 одинаковых квадратов. Предположим, что в каждом из них имеется точка множества F, расстояние которой от его границы больше или равно $\frac{r}{3n}$. Тогда, применяя неравенство (5) и используя условие Карлесона, имеем

$$c_4 n^2\left(\frac{r}{3n}\right) \leqslant c_1\frac{r}{\sqrt{2}}; \qquad n \leqslant \frac{3c_1}{\sqrt{2}c_4}.$$

3. Положим

$$K_1(\zeta, z) = (\zeta - z)^{-2}; \qquad \zeta \in F, \quad z \in CF;$$
$$\psi_1(t) = 1, \quad t > 0; \qquad \Phi_1(z) = \rho(z), \quad z \in CF.$$

Возьмем в качестве μ конечную сумму длин кривых, каждая из которых есть образ при некотором движении плоскости какой-то функции (своей для каждой кривой) $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, удовлетворяющей условию Липшица ($|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|$; $x_1, x_2 \in [a, b]$). Тогда хорошо известно (см., например, [2]), что $A_{K_1} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi_1 m))$. Может показаться, что ограниченность оператора A_{K_1} в этом случае связана только с карлесоновостью меры Хаусдорфа размерности 1 на F. Однако, это не так.

Рассмотрим канторовское множество $X \subset \mathbb{C}$ размерности 1. Оно строится так. Положим $E_0 = [0, 1]$, $E_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ и т.д. Множество E_n состоит из 2^n отрезков длины 4^{-n} каждый. Пусть $E = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} E_n$, $X = E \times E$. Мера Хаусдорфа размерности 1 на X совпадает с прямым произведением двух канторовских мер на E (о канторовских мерах см., например, [3]). Обозначим ее через ν. Тогда $\operatorname{supp}\nu = X$, мера ν удовлетворяет условию Карлесона и условию (5). Значит, к мере ν применима теорема 2 и при любой функции ψ, удовлетворяющей условиям пункта 1, оператор $B_{K,\psi}$ - оператор слабого типа (2,2). В частности, можно взять $\psi = \psi_1$.

В обзоре [2] Е. М. Дынькин предположил, что $A_{K_1} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi_1 m))$ (или, что то же самое, $B_{K_1,\psi_1} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(m)))$). Однако, эта гипотеза не подтвердилась. Более того, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $\mu = \nu$. Тогда оператор A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ в том и только в том случае, когда ψ удовлетворяет условию (2). При этом, если условие (2) не выполняетсия, то*

$$A_{K_1}(1) \notin L^2(\Phi m).$$

Доказательство. В силу теоремы 1 нам достаточно доказать, что из расходимости интеграла в левой части неравенства (2) следует, что $g = A_{K_1}(1) \notin L^2(\Phi m)$. Пусть $P = I_1 \times I_2 \subset [0,1] \times [0,1]$-прямоугольник, являющийся декартовым произведением двух дополнительных интервалов к множеству E. Сначала мы покажем, что существуют абсолютные константы $a > 0$, $b > 0$ такие, что

$$\int\limits_P |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant a\Phi(bl), \qquad l = \min\{|I_1|, |I_2|\}.$$

Действительно, пусть (x_0, y_0)-правая верхняя вершина $P, G = [x_0, 1] \times [y_0, 1]$, $G_1 = \mathbb{C} \setminus G$. В силу карлесоновости ν имеем

$$\int\limits_{G_1 \cap F} \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \leqslant \frac{4c_1}{l}, \qquad z \in (x_0 - \frac{l}{2}, x_0) \times (y_0 - \frac{l}{2}, y_0).$$

Положим $S_m = (x_0 - 2l4^{-m}, x_0 - \frac{3l}{2} \cdot 4^{-m}) \times (y_0 - 2l \cdot 4^{-m}, y_0 - \frac{3l}{2} 4^{-m})$, $Q_m = [x_0, x_0 + \frac{l}{2} \cdot 4^{-m}] \times [y_0, y_0 + \frac{l}{2} \cdot 4^{-m}]$, $m \geqslant 1$. Ясно, что для $z \in P$, $\zeta \in G$ выполняется неравенство $\operatorname{Re}((e^{-\frac{\pi i}{4}}(\zeta - z))^{-2}) \geqslant 0$; для $z \in S_m$, $\zeta \in Q_m$ имеет место неравенство $\operatorname{Re}((e^{-\frac{\pi i}{4}}(\zeta - z))^{-2}) \geqslant \geqslant 2c_0 4^{2m} \cdot l^{-2}$, где $c_0 > 0$-абсолютная постоянная. Отсюда имеем в силу равенства $\nu(Q_m) = \frac{l}{2} 4^{-m}$:

$$\left|\int\limits_{G \cap F} \frac{d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right| \geqslant \operatorname{Re}\left(\int\limits_{G \cap F} \frac{d\nu(\zeta)}{(e^{-\pi i/4}(\zeta - z))^2}\right) \geqslant \frac{c_0 4^m}{l}, \qquad z \in S_m.$$

Выберем теперь $m = \left[\log_4^+\left(\frac{5c_1}{c_0}\right) + 1\right]$. Тогда при $z \in S_m$

$$\left|\int\limits_F \frac{d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right| \geqslant \left|\int\limits_{F \cap G} \frac{d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right| - \int\limits_{F \cap G_1} \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \geqslant \frac{5c_1}{c_0} \cdot \frac{c_0}{l} - \frac{4c_1}{l} = c_1 l^{-1}.$$

Отсюда, наконец

$$\int\limits_P |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant \int\limits_{S_m} |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant \frac{c_1^2}{4} 4^{-2m} \Phi\left(\frac{3l\sqrt{2}}{2} \cdot 4^{-m}\right).$$

Таким образом, можно положить $a = \frac{c_1^2}{4} \cdot 4^{-2m}$, $b = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 4^{-m}$.

Всего прямоугольников P, у которых наименьшая сторона равна $2 \cdot 4^{-(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ имеется по крайней мере 4^n. Значит,

$$\int\limits_{CF} |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant \tfrac{1}{2} ab \sum_{n \geqslant 0} \psi\left(\frac{b}{2} 4^{-n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2} ab \sum_{n \geqslant 0} 4^n \psi\left(\frac{b}{2} 4^{-n}\right)\left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \geqslant \tfrac{1}{2} ab \int\limits_0^1 \frac{\psi(\frac{bt}{2})}{t}\, dt = +\infty.$$

4. В этом пункте мы разберем случай ядра

$$K_2(\zeta, z) = \big(|\zeta - z|(\zeta - z)\big)^{-1}, \qquad \zeta \in F, \quad z \in CF.$$

Теорема 4. *Пусть мера μ удовлетворяет условию* (5). *Тогда оператор A_{K_2} действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ в том и только в том случае, когда функция ψ удовлетворяет условию* (2). *При этом, если условие* (2) *не выполнено, то $A_{K_2}(1) \notin L^2(\Phi m)$.*

Доказательство. Опять в силу теоремы 1 нам достаточно показать, что из расходимости интеграла в левой части неравенства (2) следует, что $g = A_{K_2}(1) \notin L^2(\Phi m)$. Отметим, что из условия (5) имеем при $\rho(z) < \delta$

$$U(z) = \int\limits_F \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^3} \geqslant \int\limits_{B(\zeta_0, \rho(z)/2)} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^3} \geqslant \frac{c_4}{2\rho^2(z)}, \tag{6}$$

где $\zeta_0 \in F$ такова, что $\rho(z) = |\zeta_0 - z|$. Используя формулу Грина в комплексной форме и равенство

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{z|z|}\right) = -\frac{1}{2|z|^3}, \qquad z \neq 0$$

имеем $\frac{\partial g}{\partial \bar z} = -\frac{1}{2}U$,

$$i \oint\limits_{|\zeta - z| = r} g(\zeta)\, d\zeta = -2 \int\limits_{B(z,r)} \frac{\partial g}{\partial \bar\zeta}(\zeta)\, dm(\zeta) = \int\limits_{B(z,r)} U(\zeta)\, dm(\zeta), \tag{7}$$
$$0 < r < \rho(z).$$

Рассмотрим некоторое разбиение по Уитни множества CF (см. [4]) с помощью совокупности квадратов $\mathcal{F}$. Тогда

$$\sqrt{2}\, l_Q \leqslant \rho(z) \leqslant 5\sqrt{2}\, l_Q, \qquad z \in Q, \quad Q \in \mathcal{F},$$

где l_Q — длина сторон квадрата Q. Фиксируем какой-нибудь квадрат $P \in \mathcal{F}$ и положим $l = l_P$, z_0 — центр квадрата P. Тогда из неравенства Коши–Буняковского и из монотонности ψ получаем

$$\int\limits_P |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant \Phi(\sqrt{2}\, l) \left(\frac{1}{l} \int\limits_{B(z_0, l/2)} |g(\zeta)|\, dm(\zeta) \right)^2.$$

Учитывая (6) и (7) имеем для $l < \delta/5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{l}\int\limits_{B(z_0,l/2)}|g(\zeta)|\,dm(\zeta) &\geqslant \frac{1}{l}\int\limits_0^{l/2}dr\left(i\int\limits_{|\zeta-z_0|=r}g(\zeta)\,d\zeta\right)\geqslant\\ &\geqslant\frac{1}{4}\int\limits_{B(z_0,l/4)}U(\zeta)\,dm(\zeta)\geqslant\frac{c_4}{8}\int\limits_{B(z_0,l/4)}\frac{dm(\zeta)}{\rho^2(\zeta)}\geqslant\frac{\pi c_4}{2^8\cdot 5^2}=d_1.\end{aligned}\tag{8}$$

Далее, используя карлесоновость меры μ получим

$$\begin{aligned}\Phi(\sqrt{2}\,l)=\frac{2\psi(\sqrt{2}\,l)}{\sqrt{2}\,l}\cdot l^2 &\geqslant 2\int\limits_P\frac{\psi(\frac{1}{5}\,\rho(z))}{\rho(z)}\,dm(z)\geqslant\\ &\geqslant\frac{1}{c_1}\int\limits_P\psi\left(\tfrac{1}{5}\,\rho(z)\right)\,dm(z)\int\limits_F\frac{dm(\zeta)}{|\zeta-z|^2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Применяя неравенства (8), (9) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{CF}|g(\zeta)|^2\Phi(\zeta)\,dm(\zeta) &\geqslant d_1\sum_{P\in\mathcal{F},\,l_P<\frac{\delta}{5\sqrt{2}}}\Phi(\sqrt{2}\,l_P)\geqslant\\ &\geqslant\frac{d_1}{c_1}\int\limits_F d\mu(\zeta)\int\limits_G\frac{\psi(\frac{1}{5}\rho(z))}{|\zeta-z|^2}\,dm(z),\end{aligned}\tag{10}$$

где $G=\bigcup\limits_{z\in F}B(z,\frac{\delta}{5})$. Из замечания к теореме 2 следует, что F удовлетворяет условию Коточигова, так что существует положительная константа $c_5>0$ такая, что для любого квадрата Q найдется квадрат $\tilde{Q}\subset Q$, для которого $l_{\tilde{Q}}\geqslant c_5 l_Q$; $\rho(z)\geqslant l_{\tilde{Q}}$, $z\in\tilde{Q}$. Пусть теперь $\zeta\in\mathcal{F}$. Рассмотрим разбиение по Уитни множества $\mathbb{C}\setminus\{\zeta\}$ с помощью совокупности квадратов $\mathcal{P}$. Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\zeta,\delta/5)}\frac{\psi(\frac{1}{5}\rho(z))}{|\zeta-z|^2}\,dm(z) &\geqslant\sum_{P\in\mathcal{P},\,l_P<\frac{\delta}{25\sqrt{2}}}\int\limits_{\tilde{P}}\frac{\psi(\frac{1}{5}\rho(z))}{|\zeta-z|^2}\,dm(z)\geqslant\\ &\geqslant\frac{c_5^2}{50}\sum_{P\in\mathcal{P},\,l_P<\frac{\delta}{25\sqrt{2}}}\psi\left(\frac{c_5 l_P}{5}\right)\geqslant\frac{c_5^2}{25}\sum_{P\in\mathcal{P},\,l_P<\frac{\delta}{25\sqrt{2}}}\int\limits_P\frac{\psi\left(\frac{c_5|\zeta-z|}{25\sqrt{2}}\right)}{|\zeta-z|^2}\,dm(z)\geqslant\\ &\geqslant\frac{c_5^2}{25}\int\limits_{B(\zeta,\frac{\delta}{25})}\frac{\psi\left(\frac{c_5|\zeta-z|}{25\sqrt{2}}\right)}{|\zeta-z|^2}\,dm(z)=\frac{c_5^2}{25}\int\limits_0^{\frac{\delta c_5}{5^4\sqrt{2}}}\frac{\psi(t)}{t}\,dt.\end{aligned}\tag{11}$$

Наконец, из неравенств (10) и (11) получаем

$$\int\limits_{CF} |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant \frac{d_1 \mu(F) c_5^2}{25 c_1} \int\limits_0^{\frac{6c_5}{5^4\sqrt{2}}} \frac{\psi(t)}{t}\, dt = +\infty.$$

Литература

1. P. Sjögren, *Weak L_1 characterization of Poisson integrals, Green potentials, and H^p spaces.* — Trans. A. M. S. **233** (1977), 179–196.
2. Е. М. Дынькин, *Методы теории сингулярных интегралов (теория Литтлвуда–Пэли и ее приложения).* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **42** (1989), 105–198.
3. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеры в анализе.* М., Мир, 1967.
4. Е. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М., Мир, 1973.

Kargaev P. Nonclassical weighted norm estimates for some Calderon–Zygmund operators on the plane.

Let μ be a Borel measure with a compact support $F \subset \mathbb{C}$, ρ be the distance from the set F;

$$A_K(f)(z) = \int\limits_F K(\zeta, z) f(\zeta)\, dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{C} \setminus F,$$

where $K(\zeta, z) = (\zeta - z)^{-2}$ or $K(\zeta, z) = (|\zeta - z|(\zeta - z))^{-1}$ and m is the Lebesque measure. Let $\psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ be a nondecreasing positive function, $\Phi(z) = \psi(\rho(z))\rho(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus F$.

We prove that under some additional assumptions on μ the operator A_K is bounded from $L^2(\mu)$ to $L^2(\Phi m)$ if and only if

$$\int\limits_0^{+1} \frac{\psi(t)}{t}\, dt + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt < +\infty.$$

This means that the interference effect is not observed in such situations.

С.-Петербургский государственный Университет

Поступило 14 февраля 1994 г.