Дискретная математика

том 3 выпуск 2 * 1991

УДК 519.1, 513.83

ПЛОСКОСТНОСТЬ НАКРЫТИЙ ГРАФОВ

Н.П. Хоменко, В.Г. Лещенко

Найдены необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять заданный граф, чтобы его k-листные накрытия были плоскостными графами.

Под графом понимаем конечный топологический граф, допускающий кратные ребра и петли.

Топологическим графом G называется топологическое пространство, состоящее из множества G^0 точек – вершин графа и множества G^1 ребер – гомеоморфов интервала прямой, границы которых принадлежат G^0, $G = G^0 + G^1$ или $G = (G^0, G^1)$, $G^0 = \{x_i\}_1^n$, $G^1 = \{u_j\}_1^m$, m, $n \in \mathbf{N}$.

Родом графа называется наименьший род компактного ориентируемого 2-многообразия, в которое этот граф вложим. Граф называется *плоскостным,* если его род равен нулю, т.е. если он вложим в плоскость или в 2-сферу.

Гомоморфизмом графа G в граф $\mathcal{G}$ называется непрерывное отображение f: $G \to \mathcal{G}$, которое гомеоморфно отображает каждое ребро графа G на некоторое ребро графа $\mathcal{G}$, а каждую вершину графа G на некоторую вершину графа $\mathcal{G}$. Если при этом каждая вершина графа G имеет окрестность в G, ограничение на которую отображения f будет гомеоморфизмом, а граф $\mathcal{G}$ будет связным, то пара (G, f) называется *накрытием,* G – *накрывающим, а* $\mathcal{G}$ – *накрываемым пространствами.* Нетрудно убедиться, что прообразы всех точек пространства $\mathcal{G}$ равномощны, а накрытие (G, f) называется *k-листным,* если $|f^{-1}(x)| = k$ для каждой точки $x \in G$.

Метод Геффтера–Эдмондса и графы токов У. Гастина [1] послужили основой для решения рядом авторов проблемы Хивуда о раскраске карт, завершение которого принадлежит Дж. Янгсу и Г. Рингелю [2]. Совершенствуя и обобщая эту методику, Дж.Л. Гросс, С.Р. Альперт и Т.У. Таккер [3, 4] получили важные результаты в области исследования накрытий графов и связи этой тематики с вложениями графов в 2-многообразия. Дж.Л. Гросс и Т.У. Таккер, например, показали, что перестановочные напряжения дают конструкцию каждого накрывающего пространства заданного графа.

Д.А. Валлер, видимо, первым получил важные результаты по исследованию накрытий графов [5], не пользуясь методом Геффтера – Эдмондса, графами токов У. Гастина и их обобщениями. Он использовал то обстоятельство, что пара (объекты – графы, морфизмы – сохраняющие смежность отображения графов) представляет собой категорию. Проведение категориально-теоретических исследований 2-лист-

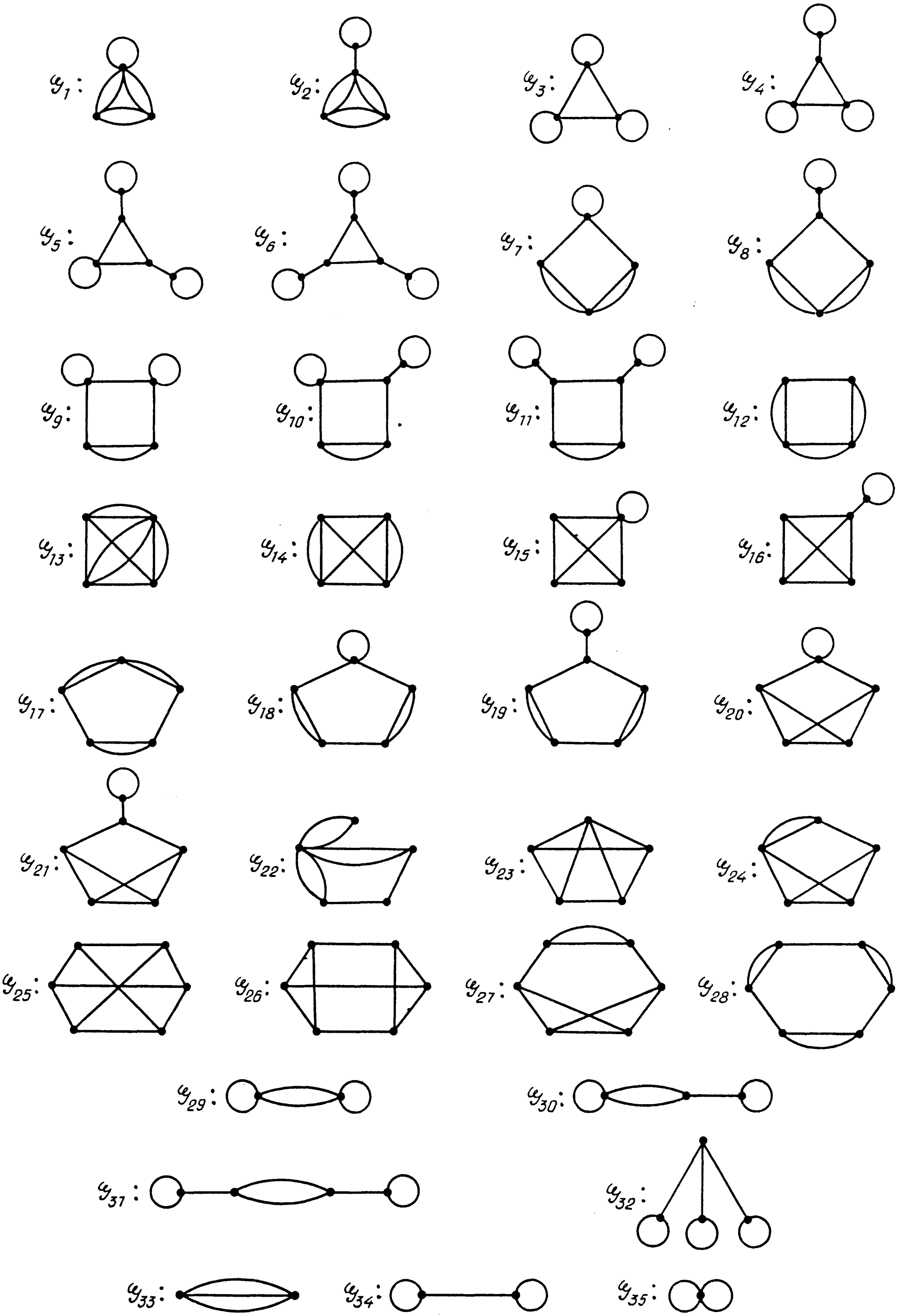
$\mathcal{G}_1$:
$\mathcal{G}_2$:
$\mathcal{G}_3$:
$\mathcal{G}_4$:
$\mathcal{G}_5$:
$\mathcal{G}_6$:
$\mathcal{G}_7$:
$\mathcal{G}_8$:
$\mathcal{G}_9$:
$\mathcal{G}_{10}$:
$\mathcal{G}_{11}$:
$\mathcal{G}_{12}$:
$\mathcal{G}_{13}$:
$\mathcal{G}_{14}$:
$\mathcal{G}_{15}$:
$\mathcal{G}_{16}$:
$\mathcal{G}_{17}$:
$\mathcal{G}_{18}$:
$\mathcal{G}_{19}$:
$\mathcal{G}_{20}$:
$\mathcal{G}_{21}$:
$\mathcal{G}_{22}$:
$\mathcal{G}_{23}$:
$\mathcal{G}_{24}$:
$\mathcal{G}_{25}$:
$\mathcal{G}_{26}$:
$\mathcal{G}_{27}$:
$\mathcal{G}_{28}$:
$\mathcal{G}_{29}$:
$\mathcal{G}_{30}$:
$\mathcal{G}_{31}$:
$\mathcal{G}_{32}$:
$\mathcal{G}_{33}$:
$\mathcal{G}_{34}$:
$\mathcal{G}_{35}$:

Рис.

ных накрытий графов позволило Д.А. Валлеру доказать классификационную теорему для 2-листных накрытий графов, найти верхнюю границу для числа различных таких накрытий и показать сложность проблемы нахождения количества неизоморфных 2-листных накрытий графов. М. Фарзан и Д.А. Валлер [6] обратили внимание на то, что в рассматриваемой категории имеется произведение, являющееся кронекеровым произведением графов. Это позволило им найти критерий плоскостности ряда простых случаев кронекеровых произведений двух графов. Случай произведения произвольного графа порядка выше четырех на граф K_2 не рассматривался ввиду его сложности. Кроме того, количество различных k-листных накрытий даже простого цикла совпадает с количеством разбиений числа k, выражаемого знаменитой формулой Рамануджана – Харди. Поэтому вряд ли когда-нибудь будет определено или достаточно четко описано множество неизоморфных k-листных накрытий произвольного графа при любом k. Следовательно, актуальным является описание свойств накрытий графов без использования структуры самих накрытий. Одним из подходов, обещающих успех в таком описании свойств накрытий графов, следует считать характеризацию свойств накрытий соответствующими этим свойствам наборами запрещенных подграфов накрываемых графов. Эта идея позволила авторам в настоящей работе установить следующий критерий плоскостности накрытий графов.

Т е о р е м а. *Любое k-листное накрытие произвольного заданного графа является плоскостным тогда и только тогда, когда заданный граф не содержит частичного графа, гомеоморфного* (*см. рис.*):

(A) *графу* K_5 *или графу* $K_{3,3}$, *если* $k = 1$;
(B) *хотя бы одному графу из множества* $\{\mathcal{G}_i\}_1^{28}$, *если* $k = 2$;
(C) *хотя бы одному графу из множества* $\{\mathcal{G}_i\}_{29}^{33}$, *если* $k = 3$;
(D) *хотя бы одному графу из множества* $\{\mathcal{G}_i\}_{33}^{34}$, *если* $k = 4$;
(E) *хотя бы одному графу из множества* $\{\mathcal{G}_i\}_{33}^{35}$, *если* $k \geqslant 5$.

Доказательство теоремы сводится к доказательству соответствующих пяти лемм. Перед доказательством лемм приведем необходимые понятия и определения, а также докажем вспомогательные предложения. Отметим, что многие стандартные понятия и обозначения взяты из работ [7–9].

Пусть $\succ$ – отношение упорядочения произвольного множества графов, при котором для любых двух негомеоморфных графов G', G'' из этого множества $G' \succ G''$ тогда и только тогда, когда граф G' содержит гомеоморфный графу G'' частичный граф; если графы G', G'' гомеоморфны, то $G' \succ G''$ тогда и только тогда, когда граф G' является подразбиением графа G''.

Пусть S_k – множество минимальных элементов упорядоченного отношением $\succ$ множества графов, каждый из которых имеет хотя бы одно неплоскостное k-листное накрытие $k \geqslant 1$.

Задача определения множества S_k $(k \geqslant 1)$ принадлежит классу экстремальных задач одного из двух типов, введенных авторами в работе [10]. Каждая задача этого класса состоит в характеризации произвольного заданного подмножества $\mathcal{P}$ множества частичных графов графа G с помощью экстремальных элементов упорядоченного некоторым отношением множества $f\mathcal{P}$ гомоморфов графов из $\mathcal{P}$ при заданном гомоморфизме f графа G.

Сформулируем вышеупомянутые пять лемм.

Л е м м а A. $S_1 = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Л е м м а B. $S_2 = \{\mathcal{G}_i\}_1^{28}$.

Л е м м а C. $S_3 = \{\mathcal{G}_i\}_{29}^{33}$.

Л е м м а D. $S_4 = \{\mathcal{G}_i\}_{33}^{34}$.

Л е м м а E. $S_k = \{\mathcal{G}_i\}_{33}^{35}$, $k \geqslant 5$.

Сразу отметим, что лемма A эквивалентна знаменитой теореме Понтрягина – Куратовского.

Пусть $\mathscr{U}_1(G)$ – множество 1-компонент графа G, $G\backslash(A)$ – граф, получающийся из G в результате удаления множества A его вершин, $A \subseteq G^0$, вместе с инцидентными им ребрами, $G\backslash(x) = G\backslash(\{x\})$, $x \in G^0$, $\tilde{G} = K_n \backslash G^1$, $n = |G^0|$.

Предложение 1. *Множество A, $A \subseteq G^0$, содержится в одном блоке графа G $(G \not\cong K_2)$ тогда и только тогда, когда в G не существует такой вершины x, что $G\backslash(x) = L_1 + L_2$, $L_i^0 \cap A \neq \phi$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq B^0$, B – блок графа G. Тогда в B, а следовательно, и в G не существует такой вершины x, что $G\backslash(x) = L_1 + L_2$, $L_i^0 \cap A \neq \phi$, $i = 1, 2$.

Пусть $A \not\subseteq B^0$ для любого блока B связного графа G, $A \subseteq G^0$. Тогда либо множество $\mathscr{U}_1(G\backslash(V\backslash A))$, где V – множество точек сочленения графа G, содержит такую 1-компоненту L, что $A \subseteq L^0$, либо существует такая вершина x, $x \in V\backslash A$, что $G\backslash(x) = L_1 + L_2$, $L_i^0 \cap A \neq \phi$, $i = 1, 2$. Пусть $A \subseteq L^0$, $L \in \mathscr{U}_1(G\backslash(V\backslash A))$. Если граф L не имеет точек сочленения, то он блок, что противоречит условию. Если L имеет единственную точку сочленения x, то существуют такие блоки B_1, B_2 графа L, что $(B_i^0 \backslash\{x\}) \cap A \neq \phi$, $i = 1, 2$. Следовательно, $G\backslash(x) = L_1 + L_2$, $L_i \supseteq B_i\backslash(x)$, $i = 1, 2$. Если граф L имеет две точки сочленения x_1, x_2, то x_1, $x_2 \in B_1^0$, где B_1 – некоторый блок графа L. Следовательно, существует такой блок B_2 графа L $(B_2 \neq B_1)$, что $(B_2^0 \backslash B_1^0) \cap A \neq \phi$. Поэтому $(B_i^0 \backslash\{x\}) \cap A \neq \phi$, $i = 1, 2$, $x = B_1 \cap B_2$. Следовательно, $G\backslash(x) = L_1 + L_2$, $L_i \supseteq B_i\backslash(x)$, $i = 1, 2$. Если, наконец, L имеет больше двух точек сочленения, то рассмотрим три из них: x, x_1, x_2. Обозначения этих точек выбраны так, чтобы существовала простая цепь $c(x_1, x, x_2; L)$. Тогда $G\backslash(x) = L_1 + L_2$, $L_i^0 \in x_i$, $i = 1, 2$.

Если граф G несвязен, то доказательство достаточности условия предложения сводится к изложенному выше, если $A \subseteq L_i^{(0)}$, $L_i' \in \mathscr{U}_1(G)$; оно является очевидным, если $A \cap L'^0 \neq \phi$, $L_i' \in \mathscr{U}_1(G)$, $i = 1, 2$, $G \not\cong \tilde{K}_2$.

Предложение 2. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, $\mathscr{F} \cong K_{3,3}$ или $\mathscr{F} \cong K_5$, $\mathscr{F} \subset G$, то существует такая 2-компонента B графа $f(\mathscr{F})$, что*

$$B^0 \supseteq f(\mathscr{F}^0(\rho > 2))\,.$$

Доказательство. Пусть условия предложения выполняются и предположим, что граф $f(\mathscr{F})$ не содержит такой 2-компоненты B, что $B^0 \supseteq f(\mathscr{F}^0(\rho > 2))$. Тогда, так как согласно 2-листности накрытия $(G, f) |f(\mathscr{F}^0(\rho > 2))| \geqslant 3$, в силу предложения 1 существует такая вершина x графа $f(\mathscr{F})$, что

$$f(\mathscr{F})\backslash(x) = L_1 + L_2, \quad L_i^0 \cap f(\mathscr{F}^0(\rho > 2)) \neq \phi, \quad i = 1, 2.$$

Пусть x является такой вершиной. Тогда

$$f^{-1}(L_1) \cap f^{-1}(L_2) = \phi,$$

$$f^{-1}(L_i^0) \cap (\mathscr{F}^0(\rho > 2)) \neq \phi, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, множество $f^{-1}(x)$ является разделяющим в графе $\mathscr{F}$ для некоторых двух элементов из $\mathscr{F}^0(\rho > 2)$. Это невозможно, так как $|f^{-1}(x)| = 2$ в силу 2-листности накрытия (G, f), а мощность множества вершин, разделяющего два элемента из $\mathscr{F}^0(\rho > 2)$ в графе $\mathscr{F}$, как легко убедиться, больше двух.

Справедливость только что доказанного предложения вытекает также из [11, предложение 4]. Пусть далее $\mathscr{P} = \{P \subseteq G\}$.

Определение 1. *$(\mathscr{P}, f)$-минимальным (максимальным)* в G графом называется такой элемент множества $\mathscr{P}$, гомоморф которого при гомоморфизме f графа G является минимальным (максимальным) элементом упорядоченного по включению множества $f\mathscr{P}$.

Определение 2. γ_0-*минимальным* в G графом называется $(\mathcal{P}, f)$-минимальный в G граф при $\mathcal{P} = \{P \subseteq G / f^{-1}f(P) = P,\ \gamma(P) > 0\}$, где $\gamma(P)$ – род графа P.

Определение 3. *f-ядром* графа F, или f^{-1}-*максимальным* в F, $F \subseteq G$, *графом* называется $(\mathcal{P}, f)$-максимальный в G граф при $\mathcal{P} = \{P \subseteq F / f^{-1}f(P) = P\}$, обозначается через $F^{\#}$ или $F^{\#}(f)$.

Предложение 3. *Если* $F \subseteq G$, *а* $f^{\#}F$ – *малый образ графа* F *по В.И. Пономареву, то* $f^{-1}(f^{\#}F) = F^{\#}(f)$.

Определение 4. *f-двойником* графа $F(F \subseteq G)$ называется такая часть F^* графа $f^{-1}f(F)$, что $F^* = F^*(f)$, $F^*(f) = f^{-1}f(F) \setminus (F \setminus F^{\#})$.

При 2-листности накрытия (G, f) и γ_0-минимальности в G графа H пусть в дальнейшем: $\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{F} \subset H / \mathcal{F} \cong K_{3,3}\}$, $\mathcal{H}_2 = \{\mathcal{F} \subset H / \mathcal{F} \cong K_5\}$, B – такая, как и в предложении 2, 2-компонента графа $f(H)$, $B^0 \supseteq f(\mathcal{F}^0(\rho > 2))$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, Y – множество принадлежащих B^0 точек сочленения графа $f(H)$, $r = |Y|$.

Предложение 4. *Если* (G, f) – 2-*листное накрытие некоторого графа*, H – γ-*минимальный в* G *граф*, $Y \neq \phi$, *то*

$$f(H) \setminus (B^0 \setminus Y) = \sum_1^r \Pi_i^0, \quad p_j(\Pi_i) = 1, \quad j = 0, 1, \quad \Pi_i^0(\rho = 1) \subseteq Y.$$

Доказательство. Пусть условия предложения выполняются. Рассмотрим произвольную точку y сочленения графа $f(H)$, $y \in Y \cap L^0$, $L \in \mathcal{U}_1(f(H) \setminus (B^0 \setminus Y))$. Согласно предложению 2 $\mathcal{F}^0(\rho > 2) \cap f^{-1}(L^0 \setminus \{y\}) = \phi$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, а в силу γ_0-минимальности в G граф H не содержит точек сочленения (см. следствие предложения 7 из [11]). Последнее утверждение следует также из того, что все точки сочленения графа H в силу его γ_0-минимальности в G содержатся в графе $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ и являются его точками сочленения, а это возможно тогда и только тогда, когда $|\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^{*0}| = 1$, что противоречит 2-листности накрытия (G, f). Поэтому $p_0(f^{-1}(L)) = 1$, так как любое 2-листное накрытие произвольного связного графа является связным графом, либо состоит из двух изоморфных накрываемому графу компонент, а последняя возможность привела бы к наличию в графе H точек сочленения. Известно [5], что произвольный связный граф F имеет связное 2-листное накрытие тогда и только тогда, когда $p_1(F) \geqslant 1$. Поэтому граф L содержит некоторый такой частичный граф Π, $p_j(\Pi) = 1$, $j = 0, 1$, $\Pi^0(\rho = 1) \in 2^{\{y\}}$, что $p_0(f^{-1}(\Pi)) = 1$. Так как $\mathcal{F}^0(\rho > 2) \subseteq f^{-1}(B^0)$, в силу γ_0-минимальности в G графа H, существует такая простая цепь c, $c = c(x, x^*; f^{-1}(L))$, что $c \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^0(\rho > 2) \cap c^0 \subseteq \partial c$, $\{x, x^*\} = f^{-1}(y)$. Не теряя общности можно считать, что $c = c(x, x^*; f^{-1}(\Pi))$. Таким образом, в силу γ_0-минимальности в G графа H $L \approx \Pi$, следовательно,

$$f(H) \setminus (B^0 \setminus Y) = \sum_1^r \Pi_i, \quad p_j(\Pi_i) = 1, \quad j = 0, 1, \quad \Pi_i^0(\rho = 1) \subseteq Y.$$

Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = B^0(\rho > 2) \setminus f(\mathcal{F}^0(\rho > 2))$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $\xi(\mathcal{F}) = |\mathcal{A}(\mathcal{F})|$, $\mathcal{F}_\xi^0$, $\mathcal{F}_\xi^0 = \{a \in \mathcal{F}^0 / f(a) \in \mathcal{A}(\mathcal{F})\}$ – множество ξ-существенных вершин графа $\mathcal{F}$.

Определение 5. ξ-*минимальным* в $\mathcal{H}_1$ графом называется такой граф $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1$, что $\xi(\mathcal{F}) = \min\limits_{\mathcal{F}' \in \mathcal{H}_1} \xi(\mathcal{F}')$.

Определение 6. ξ-*существенным* относительно графа $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, *пауком* графа H называется такой паук Π, $p_j(\Pi) = 1$, $j = 0, 1$, $\Pi \subset H$, что

$\Pi \cap \mathcal{F} = a, \qquad \Pi^0(\rho = 1) \in 2^{\{a\}}, \qquad a \in \mathcal{F}_\xi^0.$

Определение 7. ξ-*существенной* относительно графа $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, простой *цепью* графа H называется такая простая цепь c, $c \subset H$, что $c \cap \mathcal{F} = \partial c$ и $\partial c \cap \mathcal{F}_\xi^0 \neq \phi$.

Определение 8. *Индексом* простой цепи c графа H в графе $\mathcal{F}$, $c \subset H$, $c \cap \mathcal{F} = \partial c$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, называется число

$$i(c, \mathcal{F}) = \min_{c' \subset \mathcal{F},\ \partial c' = \partial c} |\mathcal{F}^0(\rho > 2) \cap (c'^0 \setminus \partial c')|,$$

где c' – простая цепь графа $\mathcal{F}$.

В [11–16] доказаны следующие леммы.

Лемма 1 [11]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, граф H γ_0-минимальный в G, а граф $\mathcal{F}$ ξ-минимальный в $\mathcal{H}_1$, то граф H не содержит ξ-существенных относительно $\mathcal{F}$ пауков.*

Лемма 2 [12]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, граф H γ_0-минимальный в G, граф $\mathcal{F}$ ξ-минимальный в $\mathcal{H}_1$, c – ξ-существенная относительно $\mathcal{F}$ простая цепь графа H, то $i(c, \mathcal{F}) > 0$.*

Лемма 3 [13]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, граф H γ_0-минимальный в G, граф $\mathcal{F}$ ξ-минимальный в $\mathcal{H}_1$, c – ξ-существенная относительно $\mathcal{F}$ простая цепь графа H, $\partial c \cap \mathcal{F}^0(\rho > 2) = \phi$, то $i(c, \mathcal{F}) \neq 1$.*

Лемма 4 [14, предложение 3]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 = \phi$, c – ξ-существенная относительно $\mathcal{F}$ простая цепь графа H, то $i(c, \mathcal{F}) = 0$.*

Лемма 5 [14, предложение 4]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H γ_0-минимальный в G граф, а $\mathcal{H}_1 = \phi$, то граф H не содержит ξ-существенных относительно $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_2$ пауков.*

Лемма 6 [14, предложение 5]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G, граф $\mathcal{H}_1 = \phi$, то $\mathcal{F}^0_\xi = \phi$.*

Лемма 7 [15]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G граф, $\mathcal{F}$ – ξ-минимальный в $\mathcal{H}_1$ граф, c – ξ-существенная относительно $\mathcal{F}$ простая цепь графа H, $\partial c \cap (\mathcal{F}^0(\rho > 2)) \neq \phi$, то $i(c, \mathcal{F}) \neq 1$.*

Лемма 8 [16]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G граф, $\mathcal{F}$ – ξ-минимальный в $\mathcal{H}_1$ граф, c – ξ-существенная относительно $\mathcal{F}$ простая цепь графа H, то $i(c, \mathcal{F}) \neq 2$.*

Предложение 5. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, $\mathcal{F}$ – ξ-минимальный в $\mathcal{H}_1$ граф или $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_2$ при $\mathcal{H}_1 = \phi$, то γ_0-минимальный в G граф H не содержит ξ-существенных относительно $\mathcal{F}$ пауков и простых цепей.*

Доказательство. Пусть условия предложения имеют место. Если $\mathcal{H}_1 = \phi$, то в силу леммы 5, а если $\mathcal{H}_1 \neq \phi$, то в силу леммы 1, граф H не содержит ξ-существенных относительно $\mathcal{F}$ пауков. В силу лемм 2 и 6 граф H не содержит ξ-существенных относительно $\mathcal{F}$ простых цепей индекса нуль. Согласно лемме 4 если индекс $i(c, \mathcal{F})$ ξ-существенной относительно $\mathcal{F}$ простой цепи c графа H в графе $\mathcal{F}$ больше нуля, то $\mathcal{H}_1 \neq \phi$. Согласно леммам 3 и 7 $i(c, \mathcal{F}) \neq 1$, а согласно лемме 8 $i(c, \mathcal{F}) \neq 2$. Так как для любой такой простой цепи c графа H, что $c \cap \mathcal{F} = \partial c$, $i(c, \mathcal{F}) \in \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, то предложение доказано.

Пусть $\mathcal{F}^0_\eta$, $\mathcal{F}^0_\eta = (\mathcal{F}^0(\rho > 2) \setminus \mathcal{F}^0_\xi) \cap f^{-1}(Y)$ – множество η-существенных вершин графа $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $\eta(\mathcal{F}) = |\mathcal{F}^0_\eta|$, $\xi\mathcal{H}_1$ – множество ξ-минимальных в $\mathcal{H}_1$ графов.

Определение 9. *η-минимальным* в $\xi\mathcal{H}_1$ графом называется такой граф $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1$, что

$$\eta(\mathcal{F}) = \min_{\mathcal{F}' \in \xi\mathcal{H}_1} \eta(\mathcal{F}').$$

Определение 10. *η-существенным* относительно графа $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, *пауком* графа H называется такой паук Π, $\Pi \subset H$, что

$$\Pi \cap \mathcal{F} = a, \quad a \in \mathcal{F}^0_\eta.$$

О п р е д е л е н и е 11. *η-существенной* относительно графа $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, простой *цепью* графа H называется такая простая цепь c, $c \subset H$, что

$$c \cap \mathcal{F} = \partial c, \quad \partial c \cap \mathcal{F}^0_\eta \neq \phi.$$

Л е м м а 9 [17]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G граф, $\mathcal{F}$ – ξ-минимальный в $\mathcal{H}_1$ граф, а при $\mathcal{H}_1 = \phi$ $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_2$ и $f(H) \in S_2$, то граф H не содержит η-существенных пауков и η-существенных простых цепей индекса нуль относительно $\mathcal{F}$.*

Л е м м а 10 [18]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G граф, $\mathcal{F}$ – η-минимальный в $\mathcal{H}_1$ граф, $f(H) \in S_2$, то граф H не содержит η-существенных простых цепей индекса один относительно $\mathcal{F}$*

Л е м м а 11 [19]. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G граф, $\mathcal{F}$ – η-минимальный в $\mathcal{H}_1$ граф, $f(H) \in S_2$, то граф H не содержит η-существенных простых цепей индекса два относительно $\mathcal{F}$*

П р е д л о ж е н и е 6. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G граф, $f(H) \in S_2$, то при $\mathcal{H}_1 \neq \phi$ $|B^0| \leqslant 6 - r$, а при $\mathcal{H}_1 = \phi$ $|B^0| \leqslant 5 - r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия предложения имеют место и предположим, что для некоторого η-минимального в $\xi\mathcal{H}_1$ графа $\mathcal{F}$, если $\mathcal{H}_1 \neq \phi$, или графа $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_2$, в противном случае найдется такой элемент y множества Y, что $f^{-1}(y) \not\subset \mathcal{F}^0$ $(\rho > 2)$. Тогда $\mathcal{F}^0_\eta \neq \phi$ и граф H содержит η-существенные относительно $\mathcal{F}$ пауки и простые цепи. Согласно лемме 9 граф H не содержит η-существенных пауков и простых цепей индекса нуль, согласно лемме 10 граф H не содержит η-существенных простых цепей индекса один, а согласно лемме 11 граф H не содержит η-существенных простых цепей индекса два относительно графа $\mathcal{F}$. Так как индекс $i(c, \mathcal{F})$ любой η-существенной относительно $\mathcal{F}$ простой цепи графа H принадлежит множеству $\{0, 1, 2\}$, предположение, что $f^{-1}(y) \not\subset \mathcal{F}^0$ $(\rho > 2)$, неверно. Поэтому $f^{-1}(y) \subset \mathcal{F}^0$ $(\rho > 2)$ для каждого y, $y \in Y$. Согласно предложению 5 $B^0(\rho > 2) \supseteq$ $\supseteq f(\mathcal{F}^0$ $(\rho > 2))$, следовательно, в силу условия $f(H) \in S_2$

$$|B^0| \leqslant |\mathcal{F}^0(\rho > 2)| - |Y| = |\mathcal{F}^0(\rho > 2)| - r.$$

Пусть G^{ku} – мультиграф, все ребра которого имеют кратность k, $k \geqslant 1$.

П р е д л о ж е н и е 7. *Если (G, f) – 2-листное накрытие некоторого графа, H – γ_0-минимальный в G граф, то кратность ребер графа $f(H)$ не превышает двух.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия предложения имеют место и предположим, что граф $f(H)$ содержит частичный граф L, изоморфный графу K_3^{2u}. Граф L', $L' = L \backslash u'$, $u' \in L^1$, имеет только два неизоморфные 2-листные накрытия: $F_1 + F_2$, $F_i \approx L'$, $i = 1, 2$ и F, $F \approx K_{2,2}$. В первом случае, если $u_1 \in F_1^1$, то $u_1^* \in F_2^1$, следовательно, $\gamma((H \backslash (u_1 + u_1^*))) > 0$, что противоречит γ_0-минимальности в G графа H. Во втором случае пусть u_1, u_2 – смежные ребра графа F. В силу 2-листности накрытия (G, f) $u_i^* \neq u_j$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Пусть $f^{-1}(u') = u + u^*$, тогда либо $\partial u = \partial u_i$ и $\partial u^* = \partial u_i^*$, либо $\partial u = \partial u_i^*$ и $\partial u^* = \partial u_i$, $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, $\gamma((H \backslash (u + u^*))) > 0$, что противоречит γ_0-минимальности в G графа H.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы B. Легко проверяется, что:

1) $\mathcal{G}_i \nsupseteq F$, $F \subseteq \mathcal{G}_j$, $i \neq j$;

2) $\mathcal{G}_i$ не содержит вершин степени 2;

3) $\mathcal{G}_i$ имеет хотя бы одно неплоскостное 2-листное накрытие, $i, j = 1(1)28$.

Это означает, что $\{\mathcal{G}_i\}_1^{28} \subseteq S_2$. Покажем, что имеет место и обратное включение. Так как граф, не содержащий вершин степени 2 и гомеоморфный образу $\mathcal{G}$ некоторого γ_0-минимального в себе его 2-листного накрытия (H, f), принадлежит множеству S_2, то согласно предложению 6 это множество совпадает с множеством минимальных элементов упорядоченного по включению множества графов, каждый из которых порядка не выше шести и имеет хотя бы одно неплоскостное 2-листное накрытие. Поэтому и в силу предложения 2

$$3 \leqslant |B^0| \leqslant |\mathcal{G}^0| \leqslant 6, \quad B \leqslant \mathcal{G},$$

для любого графа $\mathcal{G}$ из множества S_2. Согласно предложению 7, так как любое неплоскостное 2-листное накрытие каждого элемента множества S_2 является γ_0-минимальным в себе графом, кратность ребер графов из множества S_2 не превышает двух. Покажем, что любой элемент $\mathcal{G}$ множества S_2 содержится в множестве $\{\mathcal{G}_i\}_1^{28}$.

1. Пусть $|B^0| = 3$. Тогда $B \subseteq K_3^{2u}$. Нетрудно убедиться, что граф K_3^{2u} имеет единственный простой 2-листно накрывающий его граф, который триангулирует плоскость. Это означает, что $r > 0$. Если $B \approx K_3^{2u}$, то в силу γ_0-минимальности в себе графа H $r = 1$. Поэтому и согласно предложению 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $B \approx K_3$, то $r = 3$, так как $\mathcal{G}^0(\rho \leqslant 2) = \phi$. Поэтому и согласно предложению 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_i$, $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. Если $K_3 \subset B \subset K_3^{2u}$, то в силу γ_0-минимальности в себе графа H $r < 3$ и поэтому, как легко проверить, все 2-листные накрытия графа $\mathcal{G}$ плоскостные, что противоречит неплоскостности графа H.

2. Пусть $|B^0| = 4$. Согласно предложению 6 $0 \leqslant r \leqslant 2$.

Пусть $r = 0$. Как видно из приведенных в [8] диаграмм графов существуют три блока $K_{2,2}$, $K_4 \backslash u$, K_4 четвертого порядка. Граф $\mathcal{G}$ не может содержать более трех двукратных ребер, так как в противном случае он содержал бы частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_{12}$, что противоречило бы γ_0-минимальности в себе графа H. Если граф $\mathcal{G}$ имеет три двукратных ребра, то он содержит частичный граф, изоморфный либо простой цепи длины 3 с двукратными ребрами, либо графу $K_{1,3}^{2u}$, либо графу K_3^{2u}. Граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, в первом случае изоморфный графу $\mathcal{G}_{12}$, во втором – графу $\mathcal{G}_{13}$. В силу γ_0-минимальности в себе графа H либо $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{12}$, либо $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{13}$. В третьем случае любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ плоскостное, что противоречит неплоскостности графа H. Если граф $\mathcal{G}$ имеет два двукратных ребра, то он изоморфен графу $\mathcal{G}_{14}$. Действительно, если бы двукратные ребра графа $\mathcal{G}$ были смежными, то он имел бы только плоскостные 2-листные накрытия, также как и граф K_4 с двумя смежными двукратными ребрами, что противоречило бы неплоскостности графа H. Если граф $\mathcal{G}$ имеет не более одного двукратного ребра, то все его 2-листные накрытия плоскостные, что противоречит неплоскостности графа H.

Пусть $r = 1$. Если граф B не имеет двукратных ребер, то $B \approx K_4$, следовательно, в силу предложения 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{15}$ или $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{16}$. Если граф B имеет одно двукратное ребро, то в силу γ_0-минимальности в себе графа H граф B не содержит частичного графа, изоморфного графу K_4. Тогда любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ плоскостное, что противоречит неплоскостности графа H. Если граф B содержит два двукратных ребра, то в силу γ_0-минимальности в себе графа H он также не содержит частичного графа, изоморфного графу K_4. Нетрудно убедиться, что только при $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_i$ или когда граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{7, 8\}$, существует неплоскостное 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$. Если граф B содержит более двух двукратных ребер, то граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{1, 2, 7, 8, 12, 13\}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ плоскостное, что противоречит неплоскостности графа H.

Пусть $r = 2$. Если граф B не содержит двукратных ребер, то либо граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{15, 16\}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ графа плоскостное, что противоречит неплоскостности графа H. Если граф B содержит одно двукратное ребро, то либо $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_i$, $i \in \{9, 10, 11\}$, либо граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_j$, $j \in \{15, 16\}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ плоскостное, что противоречит неплоскостности графа H. Если граф B содержит более одного двукратного ребра, то граф $\mathcal{G}$ либо содержит частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{7, 8, 9, 10, 11, 15, 16\}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ плоскостное, что противоречит неплоскостности графа H.

3. Пусть $|B^0| = 5$. Согласно предложению 6 $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Пусть $r = 0$. Если граф $\mathcal{G}$ не содержит двукратных ребер, то, как видно из приведенных в [8] диаграмм графов на пяти вершинах, $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{23}$. Если граф $\mathcal{G}$ содержит одно двукратное ребро, то, так как $\mathcal{G}^0(\rho \leqslant 2) = \phi$, граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, изоморфный либо графу $\mathcal{G}_{23}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо графу $\mathcal{G}_{24}$. Следовательно, в силу предложения 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{24}$. Если граф $\mathcal{G}$ содержит два двукратных ребра, то либо он содержит частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_{24}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо граф $\mathcal{G}$ изоморфен графу, являющемуся частичным графом прямой по ребрам суммы графа $K_{1,4}^{2u}$ и простой цепи длины три. Нетрудно убедиться, что эта сумма не имеет неплоскостных 2-листных накрытий, а это противоречит неплоскостности графа H. Пусть граф $\mathcal{G}$ содержит три двукратных ребра. Если двукратные ребра графа $\mathcal{G}$ вместе с инцидентными им вершинами образуют простую цепь длины три с двукратными ребрами, то граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, гомеоморфный графу $\mathcal{G}_{12}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H. Если двукратные ребра графа $\mathcal{G}$ вместе с инцидентными им вершинами образуют граф K_3^{2u}, то, так как $\mathcal{G}^0 (\rho \leqslant 2) = \phi$, граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, гомеоморфный либо графу $\mathcal{G}_{15}$, либо графу $\mathcal{G}_{23}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H. Если двукратные ребра графа $\mathcal{G}$ вместе с инцидентными им вершинами образуют граф $K_{1,3}^{2u}$, то, так как $\mathcal{G}^0 (\rho \leqslant 2) = \phi$, граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, изоморфный либо графу $\mathcal{G}_{22}$ и поэтому в силу γ_0-минимальности в себе графа H и предложения 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{22}$, либо графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{15, 23\}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо частичному графу прямой по ребрам суммы графа $K_{1,4}^{2u}$ и простой цепи длины три. Любой 2-листно накрывающий эту сумму граф плоскостной, что противоречит неплоскостности графа H. Пусть, наконец, двукратные ребра графа $\mathcal{G}$ вместе с инцидентными им вершинами образуют граф $K_2^{2u} + K_{1,2}^{2u}$. Тогда граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф либо изоморфный графу $\mathcal{G}_{17}$ и поэтому в силу γ_0-минимальности в себе графа H и предложения 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_{17}$, либо гомеоморфный графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{7, 15\}$, или изоморфный графу $\mathcal{G}_{23}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо изоморфный графу, являющемуся частичным графом прямой по ребрам суммы графа $(K_3^{2u} \backslash u) + K_2^{2u}$ и простой цепи c длины 3 при условии, что $c^0 \cap (K_3^{2u} \backslash u)^0 = \{x_1, x_2\}$ и $\rho(x_1;\ K_3^{2u} \backslash u) \neq \rho(x_2; K_3^{2u} \backslash u)$. Нетрудно убедиться, что любой 2-листно накрывающий эту сумму граф плоскостной, что противоречит неплоскостности графа H. Если граф $\mathcal{G}$ содержит более трех двукратных ребер, то он содержит частичный граф либо изоморфный графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{12, 23\}$, либо гомеоморфный графу $\mathcal{G}_j$, $j \in \{15, 16\}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо граф $\mathcal{G}$ изоморфен прямой по ребрам сумме графа $K_{1,4}^{2u}$ и простой цепи длины 3, что противоречит неплоскостности графа H.

Пусть $r = 1$. Если граф B не имеет двухкратных ребер, то так как $\mathcal{G}^0 (\rho \leqslant 2) = \phi$, граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, изоморфный либо графу $\mathcal{G}_{20}$, либо графу $\mathcal{G}_{21}$ и поэтому в силу γ_0-минимальности в себе графа H и предложения 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_i$, $i \in \{20, 21\}$, либо графу $\mathcal{G}_{23}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H. Если граф B содержит одно двукратное ребро, то, так как $\mathcal{G}^0 (\rho \leqslant 2) = \phi$, граф $\mathcal{G}$ либо содержит частичный граф, изоморфный графу $\mathcal{G}_i$, $i \in \{15, 16, 20, 21, 23\}$, что противоречит γ_0-минимальности в себе графа H, либо любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ плоскостное, что противоречит неплоскостности графа H. Если граф B содержит два двукратных ребра, то граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф либо изоморфный графу $\mathcal{G}_{18}$ или графу $\mathcal{G}_{19}$ и поэтому, в силу γ_0-минимальности в себе графа H, $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_i$, $i \in \{18, 19\}$, либо $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_j$, $j \in \{7, 8, 12, 15, 16, 20, 21, 23\}$, либо любое 2-листное накрытие графа $\mathcal{G}$ плоскостное. Из аналогичных соображений граф B не может содержать и более двух двукратных ребер.

4. Пусть $|B^0| = 6$. Согласно предложению 6 $r = 0$. Если $\mathcal{G}'$ – тень графа $\mathcal{G}$, то $\mathcal{G}' \approx G_{6,m,l}$, $6 \leqslant m \leqslant 15$, $l \in \mathbf{N}_{24}$. Сразу видно, что

$$G_{6,9,17} \approx \mathcal{G}_{25}, \quad G_{6,9,7} \approx \mathcal{G}_{26}, \quad G_{6,10,11} \approx \mathcal{G}_{14}.$$

Графы $G_{6,m,l}$, $m = 12(1)15$, при всех l, $l \in \mathbf{N}_{24}$, $C_{6,11,l}$ (при $l \neq 2, 4$), $G_{6,10,l}$ (при $l \neq 1, 4, 5, 6, 9, 11, 13$), $G_{6,9,8}$ и $G_{6,9,10}$ содержат частичный граф, гомеоморфный графу $\mathcal{G}_{23}$, графы $G_{6,11,2}$, $G_{6,10,4}$, $G_{6,10,14}$ и $G_{6,9,9}$ – графу $\mathcal{G}_{24}$. Если граф $\mathcal{G}'$ изоморфен одному из графов $G_{6,10,1}$, $G_{6,10,5}$, $G_{6,9,13}$, $G_{6,9,18}$, $G_{6,8,16}$, или $G_{6,9,19}$, $G_{6,9,14}$, $G_{6,9,20}$, $G_{6,8,23}$, или $G_{6,9,1}$, $G_{6,8,9}$, $G_{6,8,15}$, или $G_{6,9,5}$, $G_{6,7,7}$, то граф $\mathcal{G}$ содержит такой частичный граф $\mathcal{G}''$, что $\mathcal{G}'' \approx \mathcal{G}_i$, $i = 12$, или $i = 24$, или $i \in \{7, 22\}$, или $i \in \{7, 8, 18, 22\}$, соответственно. Если $\mathcal{G}' \approx G_{6,9,16}$, или $\mathcal{G}' \approx G_{6,8,21}$, или $\mathcal{G}' \approx G_{6,8,6}$, или $\mathcal{G}' \approx G_{6,7,6}$, или $\mathcal{G}' \approx G_{6,8,7}$, или $\mathcal{G}' \approx G_{6,6,7}$, то $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}''$, $\mathcal{G}'' \cong \mathcal{G}_i$, $i \in \{15, 16\}$, или $i \in \{8, 12, 18\}$, или $i \in \{12, 17\}$, или $i = 17$, или $i = 24$, если $\mathcal{G} \not\approx \mathcal{G}_{27}$ или $i \in \{12, 17\}$, если $\mathcal{G} \not\approx \mathcal{G}_{28}$, соответственно. Пусть $\mathcal{G}' \approx G_{6,m,l}$ при $m = 7$ и $l = 5$, $m = 8$ и $l = 5{,}12$, $m = 9$ и $l = 2{,}11$. Если $\mathcal{G}' \approx G_{6,7,5}$, или $\mathcal{G}' \approx G_{6,8,5}$, или $\mathcal{G}' \approx G_{6,m,l}$, где $m = 9$ при $l = 2$, 11 и $m = 8$ при $l = 12$, то $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}''$, $\mathcal{G}'' \approx \mathcal{G}_i$, $i = 12$ или $i \in \{12, 17\}$, или $i \in \{12, 17, 28\}$ соответственно, либо граф $\mathcal{G}$ не имеет неплоскостных 2-листных накрытий. Таким образом, в силу γ_0-минимальности в себе графа H и предложения 4 $\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_i$, $i \in \{25, 26, 27, 28\}$. Лемма B доказана.

Доказательство леммы C. Нетрудно построить неплоскостные 3-листные накрытия каждого графа из множества $\{\mathcal{G}_i\}_{29}^{33}$. Например, граф $K_{3,3}$ 3-листно накрывает граф $\mathcal{G}_{33}$, а если в графе $K_{3,3}$ каждую из трех попарно несмежных вершин одной доли "заменить" треугольником, то полученный граф 3-листно накроет граф $\mathcal{G}_{32}$.

Покажем, что если произвольно заданный связный граф $\mathcal{G}$ имеет неплоскостное 3-листное накрытие, то он содержит частичный граф, гомеоморфный некоторому графу из множества $\{\mathcal{G}_i\}_{29}^{33}$. Действительно, так как цикломатическое число графа $\mathcal{G}$ больше единицы, то, если найдутся два различных цикла графа $\mathcal{G}$, пересекающихся по цепи, граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, гомеоморфный графу $\mathcal{G}_{33}$. Как легко убедиться, граф, гомеоморфный частичному графу простой цепи с петлями в каждой вершине, не имеет неплоскостных 3-листных накрытий. Поэтому граф $\mathcal{G}$ содержит частичный граф, либо гомеоморфный графу $\mathcal{G}_{32}$, либо некоторому графу из множества $\{\mathcal{G}_i\}_{29}^{31}$. Лемма C доказана.

Доказательство леммы D. Граф $\mathcal{G}_{33}$ имеет даже неплоскостное 3-листное накрытие, а в существовании неплоскостного 4-листного накрытия графа $\mathcal{G}_{34}$ легко убедиться. Покажем, что если произвольный заданный граф связен и имеет неплоскостное 4-листное накрытие, то он содержит частичный граф, гомеоморфный либо графу $\mathcal{G}_{33}$, либо графу $\mathcal{G}_{34}$. Действительно, как уже отмечалось, заданный граф содержит не менее двух различных простых циклов. Если эти два цикла пересекаются по цепи, то заданный граф содержит частичный граф, гомеоморфный графу $\mathcal{G}_{33}$, а если не пересекаются – то графу $\mathcal{G}_{34}$. Если заданный граф не содержит частичного графа, гомеоморфного графу $\mathcal{G}_{33}$ или графу $\mathcal{G}_{34}$, то ясно, что он не имеет неплоскостных 4-листных накрытий. Лемма D доказана.

Доказательство леммы E. Каждый граф из множества $\{\mathcal{G}_i\}_{33}^{35}$ имеет неплоскостное k-листное накрытие, $k \geqslant 5$. Действительно, граф $K_{3,3}$ 3-листно накрывает граф $\mathcal{G}_{33}$, граф K_5 5-листно накрывает граф $\mathcal{G}_{35}$, а граф Петерсена 5-листно накрывает граф $\mathcal{G}_{34}$ (как уже отмечалось, граф $\mathcal{G}_{34}$ имеет также неплоскостное 4-листное накрытие). Неплоскостные накрытия графов $\mathcal{G}_{33}, \mathcal{G}_{34}, \mathcal{G}_{35}$ большим чем указано числом листов получаются как сумма указанных накрытий и необходимого числа копий накрываемого графа.

Обратно, если произвольный заданный граф связен и имеет неплоскостное k-листное накрытие, $k \geqslant 5$, то в этом графе содержится частичный граф, гомеоморфный некоторому графу из множества $\{\mathcal{G}_i\}_{33}^{35}$. Действительно, цикломатическое число заданного графа больше 2, а в любом связном графе, содержащем два простых цикла, найдется частичный граф, гомеоморфный некоторому графу из множества $\{\mathcal{G}_i\}_{33}^{35}$. Лемма Е доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gustin W. Orientable embedding of Cayley graphs // Bull. AMS. – 1963. – V. 69. – № 2. – P. 272–275.
2. Ringel G., Youngs J.W.T. Solution of the Heawood map-coloring problem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1968. – V. 60. – P. 438–445.
3. Gross J.L., Alpert S.R. The topological theory of current graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. – 1974. – V. 17. – P. 218–233.
4. Gross J.L., Tucker T.W. Generating all graph coverings by permutation voltage assignments // Discrete Math. – 1977. – V. 18. – P. 273–283.
5. Waller D.A. Double covers of graphs // Bull. Austral. Math. Soc. – 1976. – V. 14. – P. 233–248.
6. Farzan M., Waller D.A. Kronecker products and local joins of graphs // Can. J. Math. – 1977. – V. XXIX. – № 2. – P. 255–269.
7. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1977. – 342 с.
8. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
9. Хоменко Н.П. φ-преобразования, топология и алгебра графов // Теория графов. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1977. – С. 5–45.
10. Хоменко Н.П., Лещенко В.Г. Два типа экстремальных задач в теории графов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 6. – С. 13–15.
11. Хоменко Н.П., Лещенко В.Г. $(\mathcal{P}, f)$-экстремальные графы // Экстремальные графы. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 84.44. – С. 5–15.
12. Хоменко Н.П. ξ-существенные цепи индекса нуль. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 84.44. – С. 16–27.
13. Лещенко В.Г. ξ-существенные цепи первого типа индекса один. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 84.44. – С. 28–56.
14. Хоменко Н.П., Лещенко В.Г. Структура $(\mathcal{P}, f)$-экстремальных графов // Структура экстремальных графов. – Киев, 1984. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 84.45. – С. 5–37.
15. Хоменко Н.П. ξ-существенные цепи второго типа индекса один. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 84.45. – С. 38–45.
16. Лещенко В.Г. ξ-существенные цепи индекса два. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 84.45. – С. 46–62.
17. Хоменко Н.П., Лещенко В.Г. Структура минимальных неплоскостных 2-листных накрытий графов // Минимальные неплоскостные 2-листные накрытия графов. – Киев, 1986. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 86.74. – С. 5–28.
18. Хоменко Н.П. η-существенные цепи индекса один // Минимальные неплоскостные 2-листные накрытия графов. – Киев, 1986. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 86.74. – С. 29–38.
19. Лещенко В.Г. η-существенные цепи индекса два // Минимальные неплоскостные 2-листные накрытия графов. – Киев, 1986. – Препринт / АН УССР – Ин-т матем.; 86.74. – С. 39–50.

Статья поступила 30.01.89