Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

N. V. Trunov, L_p spaces associated with a weight on a semifinite von Neumann algebra, *Konstr. Teor. Funkts. Funkts. Anal.*, 1981, Issue 3, 88–93

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.168
March 25, 2025, 15:04:44

Н. В. Трунов

ПРОСТРАНСТВА L_p, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ВЕСОМ НА ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ НЕЙМАНА

В работе строится шкала пространств $L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$, ассоциированная с точным нормальным локально измеримым весом на полуконечной алгебре Неймана. Для случая следа соответствующая конструкция была предложена в работах [1] ($p=1, 2$), [6], [8], [10]. Случай нормального состояния рассматривался автором в работе [5].

Всюду ниже мы будем предполагать, что M — полуконечная алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, и τ — точный нормальный полуконечный след на M. Через $\mathfrak{L}_p(\tau) (1 \leqslant p < \infty)$ обозначим банахово пространство измеримых операторов, интегрируемых с p-той степенью относительно τ (см. [6], [8], [10]); напомним, что норма $\|\cdot\|_p^\tau$ в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ задается равенством

$$\|x\|_p^\tau = \tau(|x|^p)^{1/p} \qquad (x \in \mathfrak{L}_p(\tau)).$$

Через $\mathfrak{L}(M)$ будем обозначать класс всех локально измеримых относительно M операторов в H (см. [10]). Отметим, что $\mathfrak{L}(M)$ является $*$ -алгеброй относительно сильных (т. е. замыкания обычных) алгебраических операций. Условимся в дальнейшем значком „$\cdot$" обозначать сильное произведение операторов, а сумму локально измеримых операторов всегда понимать в сильном смысле. В обозначениях и терминологии, касающихся нормальных весов на алгебрах Неймана, будем следовать работам [9] и [2].

1. Определение. *Пусть φ — нормальный полуконечный вес на M и самосопряженный оператор $h \geqslant 0$, присоединенный к M, является „производной" φ по τ (т. е. $\varphi = \tau(h\cdot)$ в смысле* [9, *теорема* 5.12]. *Назовем такой вес φ локально измеримым, если $h \in \mathfrak{L}(M)$.*

2. Замечание. Определение локально измеримого веса φ корректно, т. е. не зависит от выбора следа τ на M. Действительно, пусть $\varphi = \tau_1(h_1\cdot)$, где τ_1 — еще один точный нормальный полуконечный след на M. Тогда $h_1 = h \cdot k$ где $k \geqslant 0$ — самосопряженный несингулярный оператор в H, присоединенный к центру M, такой, что $\tau = \tau_1(k\cdot)$ (см. [9, предложение 4.3]).

Легко видеть, что $k \in \mathfrak{L}(M)$ (см. [10, определение 2.2]), так что, если $h \in \mathfrak{L}(M)$, то оператор h_1 локально измерим как сильное произведение локально измеримых операторов.

В дальнейшем мы будем предполагать фиксированным точный нормальный полуконечный и локально измеримый вес $\varphi = \tau(h\cdot)$ на M.

3. Определение. *Для каждого* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *обозначим через* $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ *линеал операторов из* M:

$$\mathfrak{m}_\alpha^{1/p} = \{x \in M \mid h^{\alpha/} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in \mathfrak{L}_p(\tau)\} =$$
$$= \{x \in M \mid \tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p) < \infty\}$$

и положим $\|x\|_{p,\alpha} = \tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p)^{1/p}$ $(x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p})$.

4. Теорема. *Линеал* $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ *не зависит от выбора следа* τ, *и функция* $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ *является нормой на* $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$, *также не зависящей от* τ.

Доказательство. Пусть τ_1 — еще один точный нормальный полуконечный след на M, $\varphi = \tau_1(h_1\cdot)$, $\tau = \tau_1(k\cdot)$ и $h_1 = h \cdot k$ (см. замечание 2). Тогда для каждого $x \in M$ в силу перестановочности оператора k с h, h_1 и x имеем:

$$|h_1^{\alpha/p} \cdot x \cdot h_1^{(1-\alpha)/p}|^p = k \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p.$$

Положим $k_\varepsilon = k(1 + \varepsilon k)^{-1}$ для каждого $\varepsilon > 0$. В силу перестановочности операторов k и $|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p$ сеть $k_\varepsilon \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \times$ $\times h^{(1-\alpha)/p}|^p$ возрастает к оператору $k \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p$ при $\varepsilon \swarrow 0$ в смысле [9, стр. 62]. Тогда из [9, предложение 4, 2] следует, что

$$\tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{1-\alpha/p}|^p = \sup_\varepsilon \tau_1(k_\varepsilon \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p) =$$
$$= \tau_1(|h_1^{\alpha/p} \cdot x \cdot h_1^{(1-\alpha)/p}|^p),$$

откуда и вытекает независимость линеала $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ и функции $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ от выбора следа τ. То, что $\|\ \|_{p,\alpha}$ — преднорма на $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$, следует из линейности отображения $x \to h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}$ $(x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p})$ с учетом того, что $\|\cdot\|_p^\tau = \tau(|\cdot|^p)^{1/p}$ — норма на $\mathfrak{L}_p(\tau)$. В силу точности веса φ оператор h несингулярен, так что равенство $\|x\|_{p,\alpha} = 0$, $(x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p})$, равносильное условию $h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} = 0$, имеет место только для $x = 0$. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathfrak{m}_\varphi$ линейную оболочку конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+ =$ $= \{x \in M^+ \mid \varphi(x) < \infty\}$ и пусть $\|\cdot\|_\varphi$ — „интегральная“ норма на $\mathfrak{m}_\varphi$ (см. [2, §2]). Следующее утверждение включает норму $\|\cdot\|_\varphi$ в шкалу $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

5. *Следствие.* *Если* $x \in \mathbf{m}_\varphi$, *то* $x \in \mathbf{m}^1_{1/2}$ *и* $\|x\|_{1,\,1/2} = \|x\|_\varphi$

Доказательство. В [3, лемма 3.2 и следствие 3.3] было установлено, что для $x \in \mathbf{m}_\varphi$ оператор

$$h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2} \in \mathfrak{L}_1(\tau) \text{ и } \|x\|_\varphi = \tau(|h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}|),$$

если оператор h в представлении веса $\varphi = \tau(h \cdot)$ является измеримым. Однако легко видеть, что доказательство леммы 3.2 [3] дословно переносится и на случай локально измеримого оператора h.

6. *Следствие.* *Пусть оператор* $x \in \mathbf{m}^{1/p}_\alpha$ *инвариантен относительно группы* $\sum = \{\sigma_t\}$ $(t \in R)$ *модулярных автоморфизмов* M, *ассоциированной с* φ (см. [9]). *Тогда*

$$\|x\|_{p,\,\alpha} = \varphi(|x|^p)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < \infty,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$$

Доказательство. Поскольку группа $\sum$ в данном случае имеет вид $\sigma_t(\cdot) = h^{it}(\cdot)\,h^{-it}$ $(t \in R)$ (см. [9, теорема 4.6]), то равенство $\sigma_t(x) = x$, верное по условию для всех $t \in R$, означает, что операторы x и h перестановочны. В таком случае оператор

$$|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p = h \cdot |x|^p = \sup_{\varepsilon > 0} h_\varepsilon |x|^p,$$

где $h_\varepsilon = h(1 + \varepsilon h)^{-1}$ (см. [9, стр. 62]). Тогда в силу [9, предложение 4.2]

$$\|x\|_{p,\,\alpha} = \sup_{\varepsilon > 0} \tau(h_\varepsilon |x|^p)^{1/p} = \varphi(|x|^p)^{1/p}.$$

7. Замечание. Отметим, что для конечного веса φ линеал $\mathbf{m}^{1/p}_\alpha = M$ для всех $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и норма $\|\cdot\|_{p,\,1/2}$ совпадает с нормой $\|\cdot\|_p$, введенной в работе [5].

8. Определение. *Для каждого* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *будем через* $L_{p,\,\alpha}(\varphi)$ *обозначать банахово пространство, являющееся пополнением линеала* $\mathbf{m}^{1/p}_\alpha$ *по норме* $\|\cdot\|_{p,\,\alpha}$.

9. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Для каждого* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *банахово пространство* $L_{p,\,\alpha}(\varphi)$ *изометрически изоморфно банахову пространству* $\mathfrak{L}_p(\tau)$.

Доказательство. Рассмотрим линейную изометрию

$$\mathbf{m}^{1/p}_\alpha \ni x \to h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in \mathfrak{L}_p(\tau)$$

и проверим, что $h^{\alpha/p}\,\mathbf{m}^{1/p}_\alpha\,h^{(1-\alpha)/p}$ (образ $\mathbf{m}^{1/p}_\alpha$ при этом отображении) плотен в $\mathfrak{L}_p(\tau)$. Пусть $h = \int_0^\infty \lambda de(\lambda)$ — спектральное представление оператора h и $e_n = \int\limits_{1/n}^{n} de(\lambda)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Введем множество $\mathfrak{m} = \bigcup\limits_{m, n=1}^{\infty} e_m \mathfrak{m}_\tau e_n$, где $\mathfrak{m}_\tau = \{x \in M \mid \tau(|x|) < \infty\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{m}$ — $*$-подалгебра, ультраслабо плотная в M, причем $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\tau$ (напомним, что $\mathfrak{m}_\tau$ — $*$-идеал, ультраслабо плотный в M [6]). Ясно, что $\mathfrak{m}_\tau \subset \mathfrak{L}_p(\tau)$, так что $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{L}_p(\tau)$ для каждого $1 \leqslant p < \infty$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно установить, что

а) $\mathfrak{m}$ плотно в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ $(1 \leqslant p < \infty)$;

б) для каждого $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ имеет место включение $\mathfrak{m} \subset h^{\alpha/p} \mathfrak{m}_\alpha^{1/p} h^{(1-\alpha)/p}$.

Для проверки (а) воспользуемся известным отождествлением $\mathfrak{L}_p(\tau)^* = \mathfrak{L}_q(\tau)$ $(1/p + 1/q = 1)$, осуществляемым с помощью формы $\{x, y\} \to \tau(x \cdot y)$ $(x \in \mathfrak{L}_p(\tau),\ y \in \mathfrak{L}_q(\tau))$ (см. [8], [10]). Допустим, что оператор $z \in \mathfrak{L}_q(\tau)$ таков, что для всех $x \in \mathfrak{m}_\tau$; $m, n = 1, 2, \ldots$:

$$\tau((e_m x e_n) \cdot z) = \tau(x \cdot e_n \cdot z e_m) = 0.$$

Поскольку $e_n \cdot z e_m \in \mathfrak{L}_q(\tau)$ и $\mathfrak{m}_\tau$ плотно в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ (см. [6]), то для всех $m, n = 1, 2, \ldots$ оператор $e_n \cdot z e_m = 0$. Учитывая, что $e_n \nearrow 1$ при $n \to \infty$, получаем $z e_m = 0$, так что $0 = (z e_m)^* = e_m \cdot z$ для всех $m = 1, 2, \ldots$. Отсюда $z^* = 0$ и, следовательно, $z = 0$. Таким образом, (а) доказано.

Проверим (б). В силу включения $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\tau \subset \mathfrak{L}_p(\tau)$ достаточно, очевидно, убедиться в том, что для произвольного $x \in \mathfrak{m}_\tau$ и любой пары чисел $m, n = 1, 2, \ldots$ найдется оператор $y \in M$ такой, что

$$e_m x e_n = h^{\alpha/p} \cdot y \cdot h^{(1-\alpha)/p} \qquad (*)$$

Учитывая, что операторы $h^{-\alpha/p} e_m = (h e_m)^{-\alpha/p}$ и $h^{(1-\alpha)/p} e_n = (heh)^{(\alpha-1)/p}$ ограничены (и, следовательно, принадлежат M), положим

$$y = h^{-\alpha/p} \cdot (e_m x e_n)\, h^{(\alpha-1)/p} \qquad (\in M).$$

Тогда $(*)$ очевидно выполнено и (б) установлено. Теорема доказана.

10. Следствие. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ *и* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Тогда сопряженное к* $L_{p,\alpha}(\varphi)$ *банахово пространство* $L_{p,\alpha}(\varphi)^*$ *изометрически изоморфно* $L_{q,\alpha}(\varphi)$.

11. Замечание. Из доказательства теоремы 9 следует, что линеал $\mathfrak{m}$ плотен в каждом из пространств $L_{p,\alpha}(\varphi)$, причем форма $\{x, y\} \to \tau(h^\alpha \cdot x \cdot h^{1-\alpha} y)$, заданная на $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$, определяет некоторую каноническую двойственность пространств $L_{p,\alpha}(\varphi)$ и $L_{q,1-\alpha}(\varphi)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Таким образом, эта форма исполняет здесь роль формы

$$\{x,\ y\} \to \varphi(xy) = \varphi(yx) \qquad (x,\ y \in \mathbf{m}_\varphi)$$

в случае, когда φ — след.

Мы рассмотрим теперь вопрос о содержательном описании пространств $L_{p,\alpha}(\varphi)$. Отметим, что для конечного веса φ в работе [5] было получено описание пространств $L_{p,1/2}(\varphi)$ с помощью билинейных форм, заданных на плотном в H линеале веса D_φ.

Введем для каждого $1 \leqslant p < \infty$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ линеал локально измеримых операторов

$$\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi) = \{x \in \mathfrak{L}(M) \mid h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in \mathfrak{L}_p(\tau)\}$$

и положим $\|x\|_{p,\alpha} = \tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p)^{1/p}$ для каждого $x \in \mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$. Ясно, что при этом $\mathbf{m}_\alpha^{1/p} \subset \mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ и ограничение функции $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ на $\mathbf{m}_\alpha^{1/p}$ совпадает с нормой, введенной определением 3.

12. Теорема. *Пусть $\varphi = \tau(h\cdot)$ — точный нормальный полуконечный вес на M такой, что операторы h и h^{-1} принадлежат $\mathfrak{L}(M)$. Тогда для всех $1 \leqslant p < \infty$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$:*

(i) линеал $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ не зависит от выбора следа τ и функция $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ — норма на $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$, также не зависящая от τ;

(ii) пространство $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ и линеал $\mathbf{m}_\alpha^{1/p}$ плотен в $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$.

13. Замечание. Из замечания 2 следует, что класс весов φ, введенный условием теоремы 12, не зависит от выбора следа τ на M. Если, в частности, алгебра Неймана M конечна, то в этот класс попадают все точные нормальные полуконечные веса на M.

Доказательство теоремы 12. То обстоятельство, что $\mathfrak{L}(M)$ является $*$-алгеброй относительно сильных алгебраических операций, позволяет для проверки (i) сослаться на выкладки, проводившиеся при доказательстве теоремы 4. Для проверки (ii) заметим, что отображение $x \to h^{-\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(\alpha-1)/p}$ является линейной изометрией $\mathfrak{L}_p(\tau)$ на $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$, причем линеал $\mathbf{m}_\alpha^{1/p}$ есть образ плотного в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ линеала $h^{\alpha/p}\, \mathbf{m}_\alpha^{1/p}\, h^{(1-\alpha)/p}$ (см. доказательство теоремы 9). Таким образом, $\mathbf{m}_\alpha^{1/p}$ плотно в банаховом пространстве $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ и теорема доказана.

В приводимом ниже следствии 14 предлагается другой, более естественный (с точки зрения схемы интегрирования относительно следа), способ введения пространств $\mathfrak{L}_{1,1/2}(\varphi)$ и $\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi)$. Справедливость этого следствия очевидным образом вытекает из теоремы 12, следствия 5 и результатов работы [4].

13. *Следствие.* *Обозначим через $\mathfrak{L}^+(M)$ множество положительных самосопряженных операторов из $\mathfrak{L}(M)$ и положим для каждого $x \in \mathfrak{L}^+(M)$: $\varphi(x) = \sup_{\varepsilon>0} \varphi(x_\varepsilon)$ где $x_\varepsilon = x(1 + \varepsilon x)^{-1}$. Тогда в условиях теоремы 12:*

(i) $\mathfrak{L}_{1,1/2}(\varphi)$ есть линейная оболочка конуса $\mathfrak{L}_1^+ = \{x \in \mathfrak{L}^+(M) \mid \varphi(x) < \infty\}$ и $\|x\|_{1,1/2} = \varphi(x)$ для каждого $x \in \mathfrak{L}_1^+$

(ii) $\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi) = \{x \in \mathfrak{L}(M) \mid \varphi(x^* x) < \infty\}$ и норма $\|\cdot\|_{2,0}$ в $\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi)$ индуцируется скалярным произведением

$$\{x, y\} = \tau((h^{1/2}x) \cdot (h^{1/2}y)^*).$$

14. Замечание. Из результатов [4, §6] и следствия 13 вытекает, что для конечной алгебры Неймана M и конечного веса φ пространство $\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi)$ совпадает с пространством $L_2(M, \varphi)$, впервые введенном в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сигал И. Е. Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования. — Математика (сб. переводов), 6 : 1 (1962), 65 — 132.
2. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, 1. — „Изв. вузов. Матем", 1978 № 7, с. 79 — 88.
3. Трунов Н. В. Локально конечные веса на алгебрах Неймана. Казан. ун-т. Казань, 1978, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., № 101 — 79 Деп.).
4. Трунов Н. В. О некоммутативном аналоге пространства L_2. — В сб. Конструктивная теория функций и функц. анализ. Казань, Изд-во Казан. ун-та, 1979, с. 93—114.
5. Трунов Н. В. О некоммутативном аналоге пространства L_p. — „Изв. вузов Матем"., 1979 № 11, с. 69 — 77.
6. Dixmier J. Formes lineaires sur un anneau d'operateurs. Bull. Soc math. France, 81, (1953), № 1, 9— 39.
7. Dye H. A. The Radon—Nikodym theorem for finite rings of operators. Trans. Amer. Math. Soc. 72, (1952), № 2, 243—280.
8. Kunze R. L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups. Trans. Amer. Math. Soc., 89, (1958), № 2, 519—540.
9. Pedersen G. K., Takesaki M. The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. Acta math., 130, (1973), № 1—2, 53—87.
10. Yeadon F. J. Non—commutative L^p — spaces. Math. Cambridge Phil. Soc. 77 (1975), № 1, 91—102.