В. С. Моисеев, А. Ф. Альмухаметова, Двухкритериальная задача выбора оптимального объема запаса товара при произвольном случайном спросе, *Исслед. по информ.*, 2007, выпуск 12, 159–169

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ЗАПАСА ТОВАРА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ СЛУЧАЙНОМ СПРОСЕ

В. С. Моисеев, А. Ф. Альмухаметова

В литературе [1, 2 и др.] известна следующая постановка задачи управления запасами некоторого товара при случайном спросе.

Пусть имеется товар, ежедневный (еженедельный, ежемесячный) спрос на который определяется случайной величиной $Y \in [0,\infty)$ с произвольным законом распределения, описываемым плотностью вероятности $f(y)$ и функцией распределения $F(y)$. Объем запаса этого товара в существующих работах предлагается определять из условия минимума ожидаемых суммарных затрат от наличия дефицита и излишков товара в рассматриваемом интервале времени:

$$S(x) = c_1\overline{D}(x) + c_2\overline{I}(x) \to \min_x . \tag{1}$$

Здесь $\overline{D}(x)$ и $\overline{I}(x)$ – ожидаемые значения дефицита и излишков товара при уровне его запаса, равном x; c_1 и c_2 – соответственно стоимость потерь от дефицита и затраты на хранение товара, отнесенные к единице рассматриваемого товара.

Описывая значения дефицита и излишка товара случайными величинами:

$$D = \begin{cases} Y - x, \textit{при } \ x \le Y \\ 0, \textit{при } \ x > Y \end{cases}, \quad I = \begin{cases} x - Y, \textit{при } \ x \ge Y \\ 0, \textit{при } \ x < Y \end{cases},$$

и, используя известную формулу вычисления математического ожидания случайной величины [3], функции $\overline{D}(x)$ и $\overline{I}(x)$ определяются как

$$\overline{D}(x) = \int_x^{\infty}(y-x)f(y)dy, \tag{2}$$

$$\overline{I}(x) = \int_0^{x}(x-y)f(y)dy. \tag{3}$$

Искомое значение запаса x предлагается определять из решения нелинейного уравнения вида:

$$F(x) = \frac{c_1}{c_1 + c_2}.$$

Здесь в процессе решения задачи (1) в функции распределения $F(y)$ аргумент y заменяется искомой величиной запаса x [1].

Как показал анализ возможности практического применения задачи (1) - (3), она обладает следующими основными недостатками:

1) в торговых организациях отсутствуют достоверные данные для расчета значения затрат c_2 на единицу каждого вида товаров;

2) использование формул (2), (3) требует аналитической записи закона распределения спроса $f(y)$;

3) для вычисления в общем случае несобственного интеграла (2) необходима разработка специального численного метода.

В работе [4] для исключения первого и третьего из этих недостатков предлагалось осуществлять определение оптимального объема запаса на основе решения двухкритериальной задачи вида:

$$\overline{D}(x) \to \min_x, \ \overline{I}(x) \to \min_x \tag{4}$$

при предположении, что случайный спрос Y описывается показательным законом распределения с плотностью вероятности:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{m_y} e^{-\frac{y}{m_y}}, y \geq 0; \\ 0, y < 0, \end{cases}$$

где m_y – математическое ожидание случайной величины Y.

В данной работе задача (4) распространяется на произвольные законы распределения случайного спроса, и предлагается метод непосредственного использования статистических (учетных) данных по спросу на рассматриваемый товар.

Для реализации этого метода выразим формулы (2) и (3) через функцию распределения $F(y)$ случайного спроса Y.

Разобьем интеграл (2) на два интеграла

$$\overline{D}(x) = \overline{D_1}(x) - \overline{D_2}(x) = \int_x^\infty y f(y) dy - x \int_x^\infty f(y) dy. \tag{5}$$

Представляя интеграл $\overline{D_1}(x)$ как $\overline{D_1}(x) = \int_0^\infty y f(y) dy - \int_0^x y f(y) dy$ и используя формулу для вычисления m_y вида [3]:

$$m_y = \int_0^\infty y f(y) dy,$$

получаем, что

$$\overline{D_1}(x) = m_y - \int_0^x yf(y)dy.$$

Интегрируя по частям входящий в это выражение интеграл, окончательно имеем:

$$\overline{D_1}(x) = m_y - xF(x) + \int_0^x F(y)dy. \qquad (6)$$

Используя при вычислении интеграла $\overline{D_2}(x)$ известное свойство [3], что $f(y) = F'(y)$, получаем, что

$$\overline{D_2}(x) = x(1 - F(x)). \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в формулу (5) и приводя подобные члены, получаем окончательное выражение для вычисления ожидаемого дефицита:

$$\overline{D}(x) = m_y - x + \int_0^x F(y)dy. \qquad (8)$$

Отметим, что здесь в отличие от формулы (2), отсутствует несобственный интеграл.

Представляя выражение (3) в виде разности двух интегралов

$$\overline{I}(x) = x\int_0^x f(y)dy - \int_0^x yf(y)dy$$

и используя их представление через функцию $F(y)$ получаем, что ожидаемый излишек товара определяется по более простой формуле вида:

$$\overline{I}(x) = \int_0^x F(y)dy. \qquad (9)$$

Следуя работе [4], для построения оптимальных по Парето решений задачи (4) будем использовать линейную свертку критериев:

$$L(x,\lambda) = \lambda\overline{D}(x) + (1-\lambda)\overline{I}(x), \qquad (10)$$

где $\lambda \in (0,1)$ – параметр свертки.

Используя необходимые условия экстремума этой функции и правило дифференцирования интегралов с переменным верхним пределом [5], входящих в выражения (8) и (9), имеем

$$\frac{dL}{dx} = -\lambda + \lambda F(x) + (1-\lambda)F(x) = 0.$$

Приводя подобные члены в этом выражении, получаем уравнения для определения искомого запаса x при фиксированном значении параметра λ:

$$F(x) - \lambda = 0,\ \lambda \in (0,1). \qquad (11)$$

Графически процесс решения этого уравнения представлен на рис. 1.

Покажем, что при любом x, удовлетворяющем равенству (11), функция (10) достигает минимума.

Вторая производная от этой функции удовлетворяет условию

$$\frac{d^2L}{dx^2} = F'(x) = f(x) > 0 .$$

Последнее, вследствие достаточных условий экстремума [5], говорит о наличии минимума функции $L(x,\lambda)$.

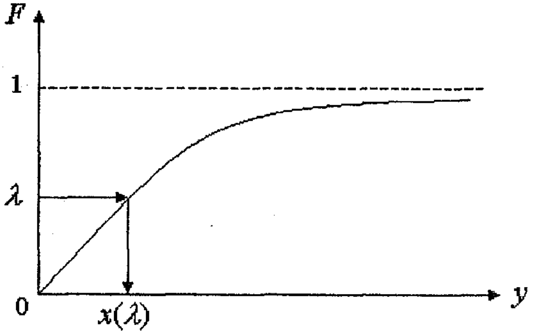

Рис. 1

Оптимальные по Парето решения в пространстве решений записываются в общем виде с учетом (11) как

$$x(\lambda) = \arg\{F(x) = \lambda \mid \lambda \in (0{,}1)\}. \qquad (12)$$

Если спрос определяется целочисленной величиной, то каждое значение $x(\lambda)$ округляется до ближайшего целого в большую сторону.

Отметим, что значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ исключаются из рассмотрения, так как согласно свойствам любой функции $F(y)$ [3] имеем, что:

$$x(0) = \arg\{F(x) = 0\} = 0,$$
$$x(1) = \arg\{F(x) = 1\} = \infty .$$

Оптимальные по Парето решения в пространстве критериев вычисляются с учетом (12) как

$$\begin{aligned} \overline{D}(\lambda) &= m_y - x(\lambda) + \int_0^{x(\lambda)} F(y)dy, \\ \overline{I}(\lambda) &= \int_0^{x(\lambda)} F(y)dy, \ \ \lambda \in (0{,}1). \end{aligned} \qquad (13)$$

Проиллюстрируем применение решений (12), (13) на следующем примере.

Пример 1. В работе [1] отмечается, что в период до получения статистических данных по спросу на товар задача (1) может решаться в предположении о равномерном законе спроса. В этом случае функция распределения случайной величины Y имеет вид [3]:

$$F(y)=\begin{cases}0, y<a;\\ \dfrac{y-a}{b-a}, a\le y\le b;\\ 1, y>b,\end{cases}$$

где a и b – соответственно значения минимального и максимального ежедневного (еженедельного, ежемесячного и т.п.) спроса на товар.

Используя выражение (11), определим $x(\lambda)$ следующим образом:

$$\frac{x-a}{b-a}=\lambda.$$

Тогда $x(\lambda)=\lambda(b-a)+a$.

Таким образом, оптимальные по Парето решения в пространстве критериев вычисляются как

$$\overline{D}(x(\lambda))=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{b^2}{2}-xb\right),$$

$$\overline{I}(x(\lambda))=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}-xa\right).$$

В полученных выражениях вместо x подставляется $x(\lambda)=\lambda(b-a)+a$.

Пусть $a=0$ и $b=20$. Тогда при различных $\lambda\in[0,1]$ с шагом 0.1 получим значения $\overline{D}(\lambda)$ и $\overline{I}(\lambda)$, приведенные в таблице 1. Графическое представление полученных значений $\overline{D}(\lambda)$ и $\overline{I}(\lambda)$ приведено на рис. 2.

Таблица 1

№ вар.	λ	a	b	x	$\overline{D}(\lambda)$	$\overline{I}(\lambda)$
1	0	0	20	0	10	0
2	0.1	0	20	2	8.1	0.1
3	0.2	0	20	4	6.4	0.4
4	0.3	0	20	6	4.9	0.9
5	0.4	0	20	8	3.6	1.6
6	0.5	0	20	10	2.5	2.5
7	0.6	0	20	12	1.6	3.6
8	0.7	0	20	14	0.9	4.9
9	0.8	0	20	16	0.4	6.4
10	0.9	0	20	18	0.1	8.1
11	1	0	20	20	0	10

ЛПР выбирает в паретовском множестве компромиссное значение между дефицитом и излишками. Если ЛПР затрудняется в выборе, то используется описанный выше подход. То есть для выбора оптимальной точки сначала формируем подмножество P паретовского множества. Оно будет состоять из точек, для которых $\overline{I}\ge\overline{D}$, то есть $P=\{6,7,8,9,10,11\}$.

Вычисляя $(\overline{I}_p - \overline{D}_p)$ для $p \in P$ получаем, что оптимальной будет точка с координатами (10,10) под вариантом с номером 6.

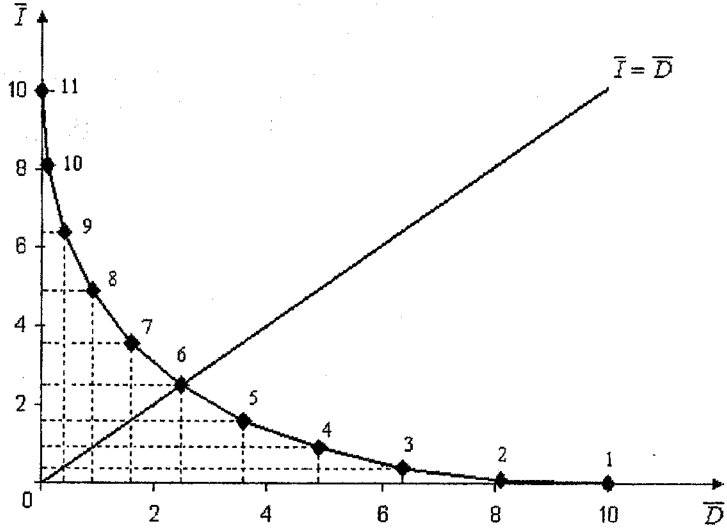

Рис. 2

Рассмотрим подход, связанный с использованием статистических данных по спросу на рассматриваемый товар.

Пусть на основе учета ежедневного (еженедельного, ежемесячного и т.п.) спроса сформирована выборка данных:

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}. \tag{14}$$

Оценка математического ожидания случайной величины Y по этой выборке вычисляется как [3]:

$$\hat{m}_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i . \tag{15}$$

Отметим, что наиболее часто на практике встречается случай, когда спрос на товар описывается дискретной случайной величиной Y. В этой связи будем считать, что элементы выборки (14) являются целыми неотрицательными числами.

Выделим в этой выборке неповторяющиеся элементы $y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*$, $m < n$, и вычислим относительные частоты вида:

$$p_j^* = \mathrm{P}\{Y = y_j^*\} = \frac{N_j}{n}, \; j = \overline{1,m}. \tag{16}$$

Здесь N_j – количество элементов y_j^* в исходной выборке (14).

Тогда статистическая функция распределения $\hat{F}(y)$ дискретной случайной величины Y [3] может быть определена как:

$$\hat{F}(y)=\begin{cases} 0, y<y_1^*; \\ p_1^*, y_1^* \le y < y_2^*; \\ p_1^*+p_2^*, y_2^* \le y < y_3^*; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{j-1} p_k^*, y_{j-1}^* \le y < y_j^*; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{m} p_k^* = 1, y > y_m^*. \end{cases} \quad (17)$$

График этой функции представлен на рис. 3.

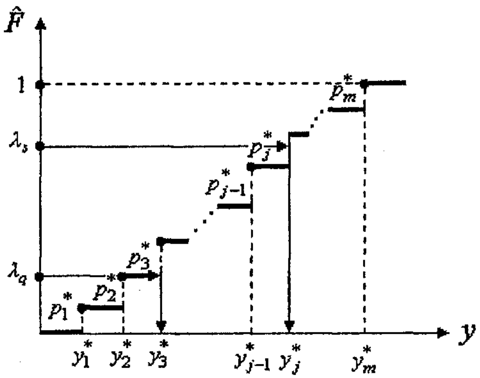

Рис. 3. График функции $\hat{F}(y)$

Характерной особенностью функции $\hat{F}(y)$ является тот факт, что она имеет скачки, равные относительной частоте p_j^* в точках $y=y_j^*$, $j=\overline{1,m}$.

На рис. 3 показан процесс графического решения уравнения (11) при двух характерных значениях параметра свертки λ, равных λ_s и λ_q. При $\lambda=\lambda_q$ искомое значение x равно y_3^*, а при $\lambda=\lambda_s$ – равно y_i^*.

Для численного решения уравнения (11), которое будем проводить на сетке значений параметра λ:

$$0 \ne \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s < \ldots < \lambda_r \ne 1, \quad (18)$$

перепишем выражение (17) в виде:

$$\begin{gathered}\hat{F}(y_1^*) = p_1^*, \\ \hat{F}(y_2^*) = p_1^* + p_2^*, \ldots, \\ \hat{F}(y_j^*) = \sum_{k=1}^{j} p_k^*, \ldots, \\ \hat{F}(y_{m-1}^*) = \sum_{k=1}^{m-1} p_k^*, \\ \hat{F}(y_m^*) = 1. \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда с учетом кусочно-постоянного характера функции $\hat{F}(y)$ имеем, что в качестве паретооптимального варианта искомого решения x_s при $\lambda = \lambda_s$, $s = \overline{1,r}$, выбирается такое значение y_j^*, для которого выполняется условие вида:

$$\hat{F}(y_{j-1}^*) \le \lambda_s \le \hat{F}(y_j^*), \; j = \overline{2,m-1}. \tag{20}$$

Алгоритм построения паретооптимальных решений задачи (4) с использованием статистических данных по спросу на товар включает в себя следующие этапы:

1^0. Формирование (пополнение) выборки учетных данных (14) по спросу на рассматриваемый товар.

2^0. Вычисление оценки среднего спроса на товар $\hat{m}_y$ по формуле (15).

3^0. Выделение в выборке (14) неповторяющихся значений спроса y_j^* и вычисление для них относительных частот p_j^* по формуле (16), $j = \overline{1,m}$.

4^0. Построение значений функции $\hat{F}(y)$ по формулам вида (19).

5^0. Выбор сетки значений λ_s, $s = \overline{1,r}$, параметра λ, удовлетворяющих условию (18).

6^0. Выбор из этой сетки конкретного значения $\lambda = \lambda_s$ и определение с помощью неравенств (20) значения s-го варианта объема запаса $x_s = y_j^*$, $s = \overline{1,r}$, $j = \overline{2,m-1}$. При наличии одинаковых значений x_s для различных значений параметра λ производится выделение неповторяющихся вариантов объема запаса.

7^0. Вычисление для каждого паретооптимального варианта запаса x_s, $s = \overline{1,r}$, с использованием метода прямоугольников [5] приближенного значения интеграла, входящего в выражения (8) и (9), по формуле вида

$$A_s = \int_0^{x_s} F(y)dy \cong \hat{F}(y_1^*)(y_2^* - y_1^*) + \hat{F}(y_2^*)(y_3^* - y_2^*) +$$
$$+ \hat{F}(y_3^*)(y_4^* - y_3^*) + ... + \hat{F}(y_{j-1}^*)(y_j^* - y_{j-1}^*). \qquad (21)$$

8^0. Вычисление ожидаемых значений дефицита и излишка товара для s-го варианта объема его запаса по формулам:

$$\bar{D}_s = \hat{m}_y - x_s + A_s,\ \bar{I}_s = A_s,\ s = \overline{1,r}. \qquad (22)$$

9^0. Формирование множества оптимальных по Парето решений задачи (4):

$$\mathrm{P} = \left\{(\bar{D}_s, \bar{I}_s, x_s) \mid s = \overline{1,r}\right\}.$$

10^0. Построение в пространстве критериев задачи множества точек с координатами $(\bar{D}_s, \bar{I}_s)$, «взвешенное» точками x_s, $s = \overline{1,r}$ (см. рис. 4).

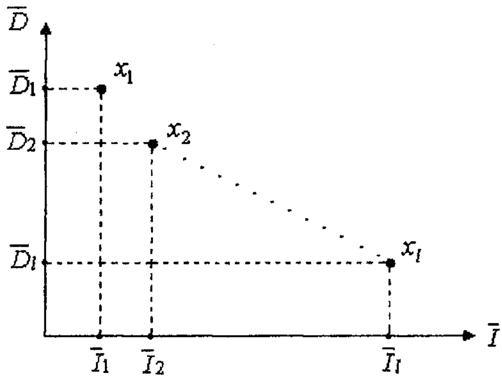

Рис. 4

11^0. Анализ ЛПР (менеджера по закупкам товаров) графического представления этого множества и выбор удовлетворяющих его значений $\bar{D}^o$, $\bar{I}^o$ и x^o.

12^0. Возврат к п.1^0. для пополнения выборки (14) при появлении новых учетных данных по спросу на рассматриваемый товар.

Отметим, что предлагаемый алгоритм позволяет осуществлять циклическое управление объемом запаса рассматриваемого товара. Например, при оптимизации ежедневного объема запаса первоначальная выборка (14) формируется за счет наблюдений за спросом на товар в течение месяца. В последующем она пополняется ежедневными учетными данными по истечению каждой рабочей недели. Предлагаемый подход позволяет ЛПР в конце каждой текущей недели выбирать оптимальный по Парето вариант объема ежедневного запаса товара для удовлетворения спроса на будущей неделе.

Пример 2. Пусть статистика (14) спроса на рассматриваемый товар, собранная в течение каждого из $n = 30$ дней, имеет вид:

$$Y = \{1,1,0,0,0,3,20,0,5,1,0,0,4,2,4,8,1,0,0,10,1,0,5,4,1,0,3,1,4,20\}.$$

Среднее значение ежедневного спроса на этот товар, вычисленное по формуле (15), будет равно $\hat{m}_y = 99/30 = 3{,}3$. Рассматриваемая выборка имеет $m = 9$ неповторяющихся элементов: $0,1,2,3,4,5,8,10,20$. Результаты обработки выборки Y, выполненные по формулам (16) и (19), представлены в таблице 2.

Таблица 2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_j^*	0	1	2	3	4	5	8	10	20
N_j	10	7	1	2	4	2	1	1	2
p_j^*	0,333	0,233	0,033	0,066	0,133	0,066	0,033	0,033	0,066
$\hat{F}(y_j^*)$	0,333	0,566	0,599	0,665	0,798	0,864	0,897	0,93	0,996

Зададимся сеткой значений параметра λ вида: $\lambda_1 = 0{,}1$; $\lambda_2 = 0{,}2$; $\lambda_3 = 0{,}3$; $\lambda_4 = 0{,}4$; $\lambda_5 = 0{,}5$; $\lambda_6 = 0{,}6$; $\lambda_7 = 0{,}7$; $\lambda_8 = 0{,}8$; $\lambda_9 = 0{,}9$. Из анализа последней строки табл. 1 следует, что при значениях $\lambda_1 = 0{,}1$; $\lambda_2 = 0{,}2$; $\lambda_3 = 0{,}3$ неравенства (20) не выполняются ни при каких $j = \overline{1,9}$.

При $\lambda = \lambda_4 = 0{,}4$ имеет место неравенство $\hat{F}(y_1^*) < \lambda_4 < \hat{F}(y_2^*)$, т.к. $0{,}333 < 0{,}4 < 0{,}566$. Это означает, что $x_1 = y_2^* = 1$. Такое же решение получается при $\lambda = \lambda_5 = 0{,}5$. При $\lambda = \lambda_6 = 0{,}6$ получаем, что $x_2 = y_4^* = 3$. Далее значение $\lambda = \lambda_7 = 0{,}7$ дает решение $x_3 = y_5^* = 4$. Значение $\lambda_8 = 0{,}8$ говорит о том, что $x_4 = y_6^* = 5$. При $\lambda_9 = 0{,}9$ имеем, что $x_5 = y_8^* = 10$.

Таким образом, получено пять неповторяющихся вариантов объема ежедневного запаса товара: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 10$.

Вычислим с помощью формулы (21) из данных табл. 1 значения параметров A_s для $s = \overline{1,5}$:

$$A_1 = 0{,}333;\ A_2 = 1{,}498;\ A_3 = 2{,}163;\ A_4 = 2{,}961;\ A_5 = 7{,}347.$$

Ожидаемые значения дефицита и излишка товара, вычисляемые с помощью выражений (22), будут равны:

$$\bar{D}_1 = 2{,}633;\ \bar{I}_1 = 0{,}333;$$
$$\bar{D}_2 = 1{,}798;\ \bar{I}_2 = 1{,}498;$$
$$\bar{D}_3 = 1{,}463;\ \bar{I}_3 = 2{,}163;$$
$$\bar{D}_4 = 1{,}261;\ \bar{I}_4 = 2{,}961;$$
$$\bar{D}_5 = 0{,}647;\ \bar{I}_5 = 7{,}647.$$

Пример графического представления множества P оптимальных по Парето решений по объемам ежедневного запаса товара приведен на рис. 5.

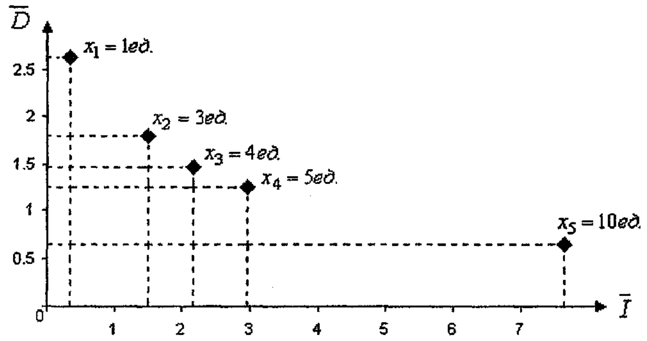

Рис. 5

На наш взгляд, предпочтительным вариантом объема ежедневного запаса является решение $x_2 = 3$. Это объясняется тем, что в этом случае величины $\overline{D}_2$ и $\overline{I}_2$ приблизительно равны между собой.

Предлагаемый алгоритм оптимизации объема запаса при произвольном законе распределения случайного спроса на товар является компонентом математического обеспечения автоматизированной системы комплексного управления запасами в территориально-распределенной торговой корпорации [6].

Литература

1. Моррис У. Регулирование запасов при отсутствии данных о будущей потребности // В сб. Применение статистических методов в производстве. – М.: Госстандарт, 1963. – С. 66-72.

2. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 1985.

3. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991.

4. Зайдуллин С.С., Моисеев В.С. Математические модели и методы управления территориально распределенными системами. – Казань: Мастер Лайн, 2005.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.

6. Альмухаметова А.Ф. Математические модели задач комплексного управления запасами в территориально-распределенной торговой корпорации // XIV Туполевские чтения: Тез. докл. Междунар. молодежной научной конф. – Казань: 2006. – С. 87-88.