Известия вузов. Математика
2018, №10, с. 60–78

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

И.Н. СЕРГЕЕВ

ОБ УПРОЩЕННЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПО НЕРАВНОМЕРНЫМ ШКАЛАМ

Аннотация. Изучаются центральные показатели Винограда–Миллионщикова, служащие точными внешними границами подвижности экстремальных значений показателей Ляпунова и Перрона линейной дифференциальной системы при равномерно малых возмущениях коэффициентов. Доказана возможность подсчитывать эти показатели по упрощенным формулам, использующим медленно расширяющиеся временны́е шкалы. Получены конкретные оценки центральных показателей через упрощенные показатели, подсчитанные в разных шкалах: густых, расширяющихся, медленно расширяющихся и разреженных.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, устойчивость, показатель Ляпунова, центральный показатель.

УДК: 517.926

Введение

При исследовании решений дифференциальных уравнений и систем на устойчивость по Ляпунову и по Пуассону первым методом Ляпунова (по линейному приближению) важную роль играют показатели Ляпунова и Перрона [1], [2].

С этой точки зрения, не менее полезными оказываются и так называемые центральные показатели Винограда–Миллионщикова [3], [4], отвечающие за устойчивость всех мало возмущенных систем не только с исходной, но и с достаточно близкой линеаризацией. Они служат точными внешними границами подвижности экстремальных значений показателей Ляпунова и Перрона данной системы при сколь угодно малых возмущениях (в смысле равномерной топологии на временно́й полуоси).

Однако формулы для вычисления центральных показателей по операторам Коши исходной линейной системы объективно довольно сложны: в них сначала происходит усреднение логарифмов норм этих операторов, взятых по временно́й шкале с каким-то фиксированным шагом, а затем берется еще и экстремум по всем таким шкалам (классы Бэра этих показателей в [5], [6]).

Данная работа посвящена упрощению формул для центральных показателей за счет выбора одной шкалы, пусть и с нефиксированным шагом. Собственно, идея такого упрощения возникала и ранее [7] при доказательстве достижимости центральных показателей в классе бесконечно малых (на бесконечности) возмущений коэффициентов системы.

Установлено, что, с одной стороны, указанной универсальной неравномерной шкалы для вычисления хотя бы одного из центральных показателей, но для всех линейных систем сразу не существует (теоремы 5, 10, 12).

Поступила 22.08.2017

С другой стороны, доказано, что для произвольной одной системы и, даже вообще, для любого компактного подмножества систем такая шкала все-таки может быть предъявлена (теоремы 8 и 16 соответственно). Кроме того, универсальные шкалы довольно просто подбираются также и для некоторых специальных подмножеств, состоящих, к примеру, из всех автономных или всех интегрально разделенных систем (теоремы 13–15).

Наконец, попутно обнаружены любопытные дополнительные свойства шкал, позволяющие, в частности, оценивать центральные показатели через упрощенные их аналоги, причем оценивать определенно: либо сверху, либо снизу, в зависимости от густоты используемой шкалы (теоремы 3, 4, 9).

Приведенные результаты частично анонсированы в [8]–[10].

1. Временны́е шкалы

Классические временны́е шкалы, использовавшиеся при исследовании различных показателей решений и систем, описывает

Определение 1 ([11], [12])**.** Пусть $\mathcal{T}$ — множество всех *шкал* (*временны́х*) на положительной полуоси $\mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty)$, т. е. строго возрастающих неограниченных последовательностей вида
$$\tau \equiv (\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad \tau_k \in \mathbb{R}^+ \quad (\tau_0 \equiv 0).$$
Скажем, что шкала $\tau \in \mathcal{T}$

1) равномерная (с разностью $T>0$), если $\tau = \tau(T) \equiv (Tk)_{k\in\mathbb{N}}$;
2) экспоненциальная (со знаменателем $\theta > 1$), если $\tau = \overline{\tau}(\theta) \equiv (\theta^k)_{k\in\mathbb{N}}$;
3) медленно растущая (обозначение $\tau \in \mathcal{T}^1$), если $\lim_{k\to\infty} \tau_k/\tau_{k-1} = 1$.

Неравномерные шкалы впервые начал применять Н.А. Изобов [12]. Впоследствии они активно использовались и другими авторами (например, [13]–[17]). Временны́е шкалы можно различать также и по их густоте на числовой прямой, что и делает

Определение 2 ([9])**.** Скажем, что шкала $\tau \in \mathcal{T}$

1) густая (обозначение $\tau \in \mathcal{T}^0$), если $\|\tau\| \equiv \overline{\lim}_{k\to\infty}(\tau_k - \tau_{k-1}) < \infty$;
2) расширяющаяся (обозначение $\tau \in \mathcal{T}_\infty$), если $|\tau| \equiv \underline{\lim}_{k\to\infty}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \infty$;
3) разреженная (обозначение $\tau \in \mathcal{T}^\infty$), если $|\tau| < \infty = \|\tau\|$;
4) медленно расширяющаяся (обозначение $\tau \in \mathcal{T}^1_\infty \equiv \mathcal{T}^1 \cap \mathcal{T}_\infty$), если она медленно растущая и расширяющаяся одновременно.

Замечание 1. Разделение шкал на густые, расширяющиеся и разреженные задает полную их классификацию:
$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^0 \sqcup \mathcal{T}^\infty \sqcup \mathcal{T}_\infty.$$
Кроме того, $\mathcal{T}^0 \subset \mathcal{T}^1$ и для любых $T>0$, $\theta>1$ имеем $\tau(T) \in \mathcal{T}^0$ и $\overline{\tau}(\theta) \in \mathcal{T}_\infty \setminus \mathcal{T}^1$, откуда следует непустота соответствующих подмножеств. Непустыми являются также и остальные подмножества: $\mathcal{T}^\infty \setminus \mathcal{T}^1$, $\mathcal{T}^\infty \cap \mathcal{T}^1$ и $\mathcal{T}^1_\infty = \mathcal{T}_\infty \cap \mathcal{T}^1$.

2. Упрощенные центральные показатели

Для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ при заданном $n>1$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество ограниченных кусочно непрерывных оператор-функций $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, задающих системы вида
$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$
и отождествляемых с ними, а через $\mathcal{S}_*(A)$ и X_A — множество ненулевых решений и оператор Коши системы $A \in \mathcal{M}^n$ соответственно.

Определение 3. Для каждой шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ определим *упрощенные центральные верхнепредельный* (с галочкой) и соответственно *нижнепредельный* (с крышечкой) показатели системы $A \in \mathcal{M}^n$:

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) \equiv \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{\tau_m}\sum_{i=1}^m \ln\|X_A(\tau_i,\tau_{i-1})\|, \quad \check{\Delta}_\tau(A) \equiv \varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{\tau_m}\sum_{i=1}^m \ln\|X_A(\tau_i,\tau_{i-1})\|, \tag{1}$$

$$\widehat{\delta}_\tau(A) \equiv \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{\tau_m}\sum_{i=1}^m \ln|X_A(\tau_i,\tau_{i-1})|, \quad \check{\delta}_\tau(A) \equiv \varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{\tau_m}\sum_{i=1}^m \ln|X_A(\tau_i,\tau_{i-1})|, \tag{2}$$

где $\|X\| \equiv \sup_{|x|=1}|Xx|$, $|X| \equiv \|X^{-1}\|^{-1}$.

3. Крайние и экстремальные показатели системы

Верхние и нижние упрощенные центральные показатели системы $A \in \mathcal{M}^n$, построенные по произвольной медленно растущей (в частности, равномерной) шкале, оценивают сверху и снизу соответственно показатели Ляпунова и Перрона всех ее ненулевых решений.

Определение 4 ([1], § 3; [2], § 1–2)**.** Зададим экстремальные характеристические верхнепредельные (Ляпунова) и нижнепредельные (Перрона) показатели системы $A \in \mathcal{M}^n$: старшие

$$\Lambda(A) \equiv \sup_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)|, \quad \Pi(A) \equiv \sup_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)|$$

и младшие

$$\lambda(A) \equiv \inf_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)|, \quad \pi(A) \equiv \inf_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)|.$$

Замечание 2 ([11])**.** В первых трех равенствах этого определения точные грани могут быть заменены достижимыми экстремумами (верхние грани — максимумами, а нижняя грань — минимумом), тогда как в последнем равенстве, вообще говоря, нет.

Определение 5. Зададим верхнепредельные и нижнепредельные показатели оператора Коши системы $A \in \mathcal{M}^n$: старшие

$$\widehat{\Delta}(A) \equiv \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\|, \quad \check{\Delta}(A) \equiv \varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\|$$

и младшие

$$\widehat{\delta}(A) \equiv \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|X_A(t,0)|, \quad \check{\delta}(A) \equiv \varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|X_A(t,0)|.$$

Замечание 3. Старшие верхнепредельные и нижнепредельные показатели оператора Коши любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ совпадают с ее старшими показателями Ляпунова и Перрона соответственно, а младшие лишь ограничивают снизу ее младшие показатели Ляпунова и Перрона, не совпадая, вообще говоря, с ними [18].

Внутренние границы для упрощенных центральных показателей задает (сформулированная в докладе [14] лишь для расширяющихся шкал)

Теорема 1. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ верны формулы*

$$\min_{\tau\in\mathcal{T}}\widehat{\Delta}_\tau(A) = \min_{\tau\in\mathcal{T}}\check{\Delta}_\tau(A) = \check{\Delta}(A) = \min_{\tau\in\mathcal{T}_\infty}\widehat{\Delta}_\tau(A) = \min_{\tau\in\mathcal{T}_\infty}\check{\Delta}_\tau(A),$$
$$\max_{\tau\in\mathcal{T}}\check{\delta}_\tau(A) = \max_{\tau\in\mathcal{T}}\widehat{\delta}_\tau(A) = \widehat{\delta}(A) = \max_{\tau\in\mathcal{T}_\infty}\check{\delta}_\tau(A) = \max_{\tau\in\mathcal{T}_\infty}\widehat{\delta}_\tau(A).$$

4. Центральные показатели и их роль

Определение 6 ([3], [4])**.** *Центральные* (не упрощенные) *верхнепредельный* и соответственно *нижнепредельный* показатели *Винограда–Миллионщикова* системы $A \in \mathcal{M}^n$ зададим следующими формулами:

$$\widehat{\Omega}(A) \equiv \inf_{T>0} \widehat{\Delta}_{\tau(T)}(A), \quad \check{\Omega}(A) \equiv \inf_{T>0} \check{\Delta}_{\tau(T)}(A); \tag{3}$$

$$\widehat{\omega}(A) \equiv \sup_{T>0} \widehat{\delta}_{\tau(T)}(A), \quad \check{\omega}(A) \equiv \sup_{T>0} \check{\delta}_{\tau(T)}(A). \tag{4}$$

Замечание 4. Первый $\widehat{\Omega}(A)$ и последний $\check{\omega}(A)$ показатели из формул (3) и (4) введены в работе [3], а предпоследний $\widehat{\omega}(A)$ — в [4], причем ни одно из равенств (3), (4) не нарушится, если в нем точную грань по $T > 0$ заменить пределом при $T \to \infty$:

$$\widehat{\Omega}(A) \equiv \lim_{T\to\infty} \widehat{\Delta}_{\tau(T)}(A), \quad \check{\Omega}(A) \equiv \lim_{T\to\infty} \check{\Delta}_{\tau(T)}(A), \tag{5}$$

$$\widehat{\omega}(A) \equiv \lim_{T\to\infty} \widehat{\delta}_{\tau(T)}(A), \quad \check{\omega}(A) \equiv \lim_{T\to\infty} \check{\delta}_{\tau(T)}(A) \tag{6}$$

([1], § 7), где для тех же показателей предложены и некоторые другие формулы.

Замечание 5. Центральные показатели любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ дают оценки снаружи ее показателям оператора Коши и, тем более, ее экстремальным показателям Ляпунова и Перрона, а именно, верхние центральные показатели их мажорируют

$$\Lambda(A) = \widehat{\Delta}(A) \leqslant \widehat{\Omega}(A), \quad \Pi(A) = \check{\Delta}(A) \leqslant \check{\Omega}(A), \tag{7}$$

а нижние — минорируют

$$\lambda(A) \geqslant \widehat{\delta}(A) \geqslant \widehat{\omega}(A), \quad \pi(A) \geqslant \check{\delta}(A) \geqslant \check{\omega}(A), \tag{8}$$

причем каждое из нестрогих неравенств (7), (8) для некоторой системы может оказаться строгим, что отчасти подтверждается уже классическим примером О. Перрона [19].

Замечание 6. Из работ [3], [4] следует, что если наделить пространство $\mathcal{M}^n$ *равномерной* на полупрямой $\mathbb{R}^+$ топологией, задаваемой нормой

$$\|A\| \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\|, \quad A \in \mathcal{M}^n,$$

то в полученном топологическом пространстве верхние центральные показатели окажутся минимальными полунепрерывными сверху *мажорантами* показателей Ляпунова и Перрона, а нижние — их максимальными полунепрерывными снизу *минорантами*, т. е. будут справедливы еще и равенства

$$\widehat{\Omega}(A) = \varlimsup_{B\to A} \Lambda(B), \quad \check{\Omega}(A) = \varlimsup_{B\to A} \Pi(B), \quad \widehat{\omega}(A) = \varliminf_{B\to A} \lambda(B), \quad \check{\omega}(A) = \varliminf_{B\to A} \pi(B).$$

Во множестве $\mathcal{M}^n$ выделим следующие стандартные подмножества:

a) $\mathcal{C}^n$ — подмножество всех *автономных* систем, т. е. систем $A \in \mathcal{M}^n$ с постоянными оператор-функциями A;

b) $\mathcal{D}^n$ — подмножество всех *диагональных* систем, т. е. систем $A \in \mathcal{M}^n$, записываемых диагональной (действительной) матричной функцией хотя бы в одном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^n$;

c) $\mathcal{I}^n$ — подмножество всех *интегрально* (*экспоненциально*) *разделенных* систем, т. е. систем $A \in \mathcal{M}^n$, которые допускают фундаментальную систему решений $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}_*(A)$, удовлетворяющую при некоторых $\alpha, T > 0$ оценкам

$$\frac{|x_i(t)|}{|x_i(s)|} : \frac{|x_{i-1}(t)|}{|x_{i-1}(s)|} > e^{\alpha(t-s)}, \quad t - T > s \geqslant 0, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Замечание 7 ([1], § 15; [20]). Подмножество $\mathcal{I}^n \subset \mathcal{M}^n$ открыто и всюду плотно в $\mathcal{M}^n$, причем для любой интегрально разделенной системы $A \in \mathcal{I}^n$ все неравенства (7) и (8) обращаются в равенства.

Определение 7. Назовем какой-либо показатель системы $A \in \mathcal{M}^n$ *точным*, если его верхнепредельный вариант совпадает с нижнепредельным, в этом случае не будем писать над ним ни галочку, ни крышечку.

Замечание 8. Точными заведомо являются все центральные показатели, показатели оператора Коши и экстремальные показатели любой автономной системы $A \in \mathcal{C}^n \subset \mathcal{M}^n$

$$\Omega(A) = \Delta(A) = \Lambda(A) = \Pi(A), \quad \omega(A) = \delta(A) = \lambda(A) = \pi(A). \tag{9}$$

5. Центральные показатели в густых шкалах

Свойства упрощенных центральных показателей в густых шкалах во многом аналогичны свойствам соответствующих показателей в равномерных шкалах. Так, оценки центральных показателей, которые в частном случае равномерной шкалы вытекают прямо из определения 6, для всех густых шкал доставляет

Теорема 2. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ и любой густой шкалы $\tau \in \mathcal{T}^0$ верны неравенства*

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) \geqslant \widehat{\Omega}(A), \quad \check{\Delta}_\tau(A) \geqslant \check{\Omega}(A), \quad \widehat{\delta}_\tau(A) \leqslant \widehat{\omega}(A), \quad \check{\delta}_\tau(A) \leqslant \check{\omega}(A). \tag{10}$$

Оценки (10), не улучшаемые даже для равномерных шкал, тем более не улучшаемы для всех густых шкал, что утверждает

Теорема 3. *Для центральных показателей любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ верны равенства*

$$\widehat{\Omega}(A) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}^0} \widehat{\Delta}_\tau(A), \quad \check{\Omega}(A) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}^0} \check{\Delta}_\tau(A), \quad \widehat{\omega}(A) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}^0} \widehat{\delta}_\tau(A), \quad \check{\omega}(A) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}^0} \check{\delta}_\tau(A). \tag{11}$$

Точные грани в равенствах (11) (так же, как в (3), (4)) можно заменить пределами при $|\tau| \to \infty$, что позволяет сделать

Теорема 4. *Для центральных показателей любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ верны равенства*

$$\widehat{\Omega}(A) = \lim_{\tau \in \mathcal{T}^0,\ |\tau| \to \infty} \widehat{\Delta}_\tau(A), \quad \check{\Omega}(A) = \lim_{\tau \in \mathcal{T}^0,\ |\tau| \to \infty} \check{\Delta}_\tau(A),$$

$$\widehat{\omega}(A) = \lim_{\tau \in \mathcal{T}^0,\ |\tau| \to \infty} \widehat{\delta}_\tau(A), \quad \check{\omega}(A) = \lim_{\tau \in \mathcal{T}^0,\ |\tau| \to \infty} \check{\delta}_\tau(A).$$

Точные грани в равенствах (11), вообще говоря, не достигаются. Причем не достигаются, по крайней мере, на некоторой одной системе, но зато уж все четыре сразу, о чем говорит

Теорема 5. *Существует такая диагональная система $A \in \mathcal{D}^2$ с точными центральными показателями, что для любой густой шкалы $\tau \in \mathcal{T}^0$ все неравенства* (10) *являются строгими.*

Замечание 9. Утверждение теоремы 5 распространяется и на системы произвольного порядка $n > 1$. Аналогичное обобщение допускают также теоремы 7 и 10–12.

6. Центральные показатели в расширяющихся шкалах

Упрощенные центральные показатели в медленно расширяющихся шкалах также оцениваются соответствующими центральными показателями, но уже с другой стороны, противоположной по сравнению с оценками (10), как показывает

Теорема 6. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ и любой расширяющейся шкалы $\tau \in \mathcal{T}_\infty$ верны неравенства*

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) \leqslant \widehat{\Omega}(A), \quad \check{\delta}_\tau(A) \geqslant \check{\omega}(A), \tag{12}$$

а для любой медленно расширяющейся шкалы $\tau \in \mathcal{T}^1_\infty$ еще и неравенства

$$\check{\Delta}_\tau(A) \leqslant \check{\Omega}(A), \quad \widehat{\delta}_\tau(A) \geqslant \widehat{\omega}(A). \tag{13}$$

Требование медленного роста к расширяющейся шкале для выполнения неравенств (13) в теореме 6 не является излишним, о чем свидетельствует

Теорема 7. *Для любой не медленно растущей шкалы $\tau \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^1$ существует такая диагональная система $A \in \mathcal{D}^2$, что оба неравенства* (13) *не верны.*

Оценки (12), (13) в теореме 6 не улучшаемы. Более того, ни для одной из них не имеет места утверждение, аналогичное теореме 5 (для густых шкал), что утверждает

Теорема 8. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ существует такая медленно расширяющаяся шкала $\tau \in \mathcal{T}^1_\infty$, что верны равенства*

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) = \widehat{\Omega}(A), \quad \check{\Delta}_\tau(A) = \check{\Omega}(A), \quad \widehat{\delta}_\tau(A) = \widehat{\omega}(A), \quad \check{\delta}_\tau(A) = \check{\omega}(A). \tag{14}$$

Таким образом, для центральных показателей (3), (4) возможно еще одно представление, которое задает

Теорема 9. *Для центральных показателей любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ верны равенства*

$$\max_{\tau\in\mathcal{T}_\infty} \widehat{\Delta}_\tau(A) = \widehat{\Omega}(A) = \max_{\tau\in\mathcal{T}^1_\infty} \widehat{\Delta}_\tau(A), \quad \check{\Omega}(A) = \max_{\tau\in\mathcal{T}^1_\infty} \check{\Delta}_\tau(A),$$

$$\widehat{\omega}(A) = \min_{\tau\in\mathcal{T}^1_\infty} \widehat{\delta}_\tau(A), \quad \min_{\tau\in\mathcal{T}_\infty} \check{\delta}_\tau(A) = \check{\omega}(A) = \min_{\tau\in\mathcal{T}^1_\infty} \check{\delta}_\tau(A).$$

Неравенства (12), (13) в условиях теоремы 6 ни для одной фиксированной расширяющейся шкалы не обращаются, вообще говоря, в равенства, как показывает

Теорема 10. *Для любой расширяющейся шкалы $\tau \in \mathcal{T}_\infty$ существует такая диагональная система $A \in \mathcal{D}^2$ с точными центральными показателями, что все неравенства* (12), (13) *являются строгими.*

7. О центральных показателях в разреженных шкалах

Разреженные шкалы, по определению занимающие промежуточное положение между густыми и расширяющимися шкалами, могут обладать свойствами как тех, так и других. В частности, ни одна из теорем 2 и 6 заведомо не распространяется на все разреженные шкалы, что утверждает

Теорема 11. *Для некоторой разреженной шкалы $\tau \in \mathcal{T}^\infty$ существуют такие две диагональные системы $A', A'' \in \mathcal{D}^2$, что при $A = A'$ являются строгими все неравенства* (10), *а при $A = A''$ — все неравенства* (12), (13).

Ни одна разреженная шкала не обеспечивает ни одного из равенств (14) для всех систем сразу, что показывает

Теорема 12. *Для любой разреженной шкалы $\tau \in \mathcal{T}^\infty$ существует такая диагональная система $A \in \mathcal{D}^2$, что верны либо все строгие неравенства* (10)*, либо все строгие неравенства* (12), (13).

8. Универсальные шкалы на подмножествах

Рассмотрим вопрос о возможности полного снятия точных граней или пределов, фигурирующих явно в формулах (3), (4) и (5), (6) для центральных показателей, за счет замены их упрощенными центральными показателями (1), (2) с удачно подобранной шкалой.

Определение 8. Назовем шкалу $\tau \in \mathcal{T}$ *универсальной на подмножестве* $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^n$, если для любой системы $A \in \mathcal{M}$ она удовлетворяет всем равенствам (14).

С одной стороны, из теорем 5, 10 и 12 следует, что универсальной шкалы на всем множестве $\mathcal{M}^n$ не существует. С другой стороны, на перечисленных стандартных его подмножествах такие шкалы все же существуют, о чем и говорят следующие три утверждения.

Теорема 13. *На подмножестве $\mathcal{C}^n \cap \mathcal{D}^n \subset \mathcal{M}^n$ автономных диагональных систем универсальна вообще любая шкала $\tau \in \mathcal{T}$.*

Теорема 14. *На подмножестве $\mathcal{C}^n \subset \mathcal{M}^n$ автономных систем универсальна любая расширяющаяся шкала $\tau \in \mathcal{T}_\infty$.*

Теорема 15. *На подмножестве $\mathcal{I}^n \subset \mathcal{M}^n$ интегрально разделенных систем универсальна любая медленно расширяющаяся шкала $\tau \in \mathcal{T}^1_\infty$.*

Замечание 10. Теоремы 13 и 15 допускают усиление за счет их распространения, по меньшей мере, на все автономные *блочно-диагональные* и, соответственно, на все интегрально *блочно-разделенные* системы с одномерными старшим и младшим блоками.

Наконец, согласно теореме 8 на каждом *одноточечном* подмножестве, независимо от свойств соответствующей системы, существует своя *индивидуальная* универсальная медленно расширяющаяся шкала. Это утверждение распространяется на произвольные *компактные* подмножества, что и делает

Теорема 16. *На любом компакте $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}^n$ существует универсальная медленно расширяющаяся шкала $\tau \in \mathcal{T}^1_\infty$.*

9. Доказательства общих утверждений

Введем следующие обозначения:

$$\Delta^k_\tau(A) \equiv \frac{1}{\tau_k}\sum_{i=1}^{k} \ln \|X_A(\tau_i, \tau_{i-1})\|, \quad \delta^k_\tau(A) \equiv \frac{1}{\tau_k}\sum_{i=1}^{k} \ln |X_A(\tau_i, \tau_{i-1})|,$$

$$\Delta^t(A) \equiv \frac{1}{t}\ln \|X_A(t,0)\|, \quad \delta^t(A) = \frac{1}{t}\ln |X_A(t,0)|,$$

а при каждом $p \geqslant 0$ обозначим

$$\|\tau\|_p \equiv \sup_{p<k\in\mathbb{N}} (\tau_k - \tau_{k-1}), \quad |\tau|_p \equiv \inf_{p<k\in\mathbb{N}} (\tau_k - \tau_{k-1}).$$

В дальнейшем будем использовать неравенства

$$\ln \|X_A(t,s)\| \leqslant \|A\|\,|t-s|, \quad \ln \|X_A(t,s)\| + \ln \|X_A(s,r)\| \geqslant \ln \|X_A(t,r)\|.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть заданы система $A \in \mathcal{M}^n$ и произвольная строго убывающая последовательность $\varepsilon_m \to 0$ $(m \to \infty)$.

Тогда, с одной стороны, для любой шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ верны оценки

$$\Delta_\tau^k(A) = \frac{1}{\tau_k} \sum_{i=1}^{k} \ln \|X_A(\tau_i, \tau_{i-1})\| \geqslant \frac{1}{\tau_k} \ln \|X_A(\tau_k, \tau_0)\| = \Delta^{\tau_k}(A), \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда вытекает цепочка соотношений

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) \geqslant \check{\Delta}_\tau(A) = \varliminf_{k\to\infty} \Delta_\tau^k(A) \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \Delta^{\tau_k}(A) \geqslant \varliminf_{t\to\infty} \Delta^t(A) = \check{\Delta}(A).$$

С другой стороны, используя последнее равенство полученной цепочки, индукцией по параметру $k \in \mathbb{N}$ последовательно построим *расширяющуюся* шкалу $\tau \in \mathcal{T}_\infty$, удовлетворяющую оценкам

$$\Delta_\tau^k(A) \leqslant \frac{1}{\tau_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \ln \|X_A(\tau_i, \tau_{i-1})\| + \ln \|X_A(0, \tau_{k-1})\| + \ln \|X_A(\tau_k, 0)\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_k + \varepsilon_k + \left(\varliminf_{t\to\infty} \Delta^t(A) + \varepsilon_k \right) = \check{\Delta}(A) + 3\varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

(каждая из этих оценок и расширяемость шкалы достигаются увеличением значения τ_k при фиксированных предыдущих значениях $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$), а с ними цепочке соотношений

$$\check{\Delta}_\tau(A) \leqslant \widehat{\Delta}_\tau(A) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \Delta_\tau^k(A) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} (\check{\Delta}(A) + 3\varepsilon_k) = \check{\Delta}(A).$$

Отсюда вытекает вся первая строка равенств доказываемой теоремы.

Равенства второй ее строки выводятся аналогично, путем *естественных изменений* в только что приведенном тексте доказательства первой строки, а именно: буквы Δ всюду нужно заменить буквами δ, значки $\|\cdot\|$ в применении к оператору Коши — значками $|\cdot|$, нижние пределы — верхними, неравенства — обратными, плюсы перед ε_k — минусами и т. д. $\square$

Доказательство теоремы 2. Для заданной системы $A \in \mathcal{M}^n$ и густой шкалы $\tau \in \mathcal{T}^0$ возьмем произвольное $T > \|\tau\|_0$, а затем для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ выберем соответственно наименьшее $m_k \in \mathbb{N}$ и единственное $K \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие оценкам

$$kT \leqslant \tau_{m_k} < (k+1)T \quad (m_0 \equiv 0), \quad KT \leqslant \tau_m < (K+1)T,$$

из которых вытекает цепочка соотношений

$$\Delta_\tau^m(A) = \frac{1}{\tau_m} \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \ln \|X_A(\tau_i, \tau_{i-1})\| + \sum_{i=m_K+1}^{m} \ln \|X_A(\tau_i, \tau_{i-1})\| \right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\tau_m} \sum_{k=1}^{K} \bigl(\ln \|X_A(kT, (k-1)T)\| - \ln \|X_A(\tau_{m_{k-1}}, (k-1)T)\| - \ln \|X_A(kT, \tau_{m_k})\| \bigr) -$$

$$- \frac{\|A\|T}{\tau_m} \geqslant \frac{KT}{\tau_m} \Delta_{\tau(T)}^K(A) - \frac{2K\|A\|\|\tau\|_0}{KT} - \frac{\|A\|T}{KT}.$$

Теперь, беря в полученной в итоге оценке верхний предел при $m \to \infty$ (или, что то же, при $K \to \infty$, причем при возрастании параметра m последовательность соответствующих значений K пробегает все натуральные числа подряд), имеем

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) = \varlimsup_{m\to\infty} \Delta_\tau^m(A) \geqslant 1 \cdot \varlimsup_{K\to\infty} \Delta_{\tau(T)}^K(A) - \frac{2\|A\|\|\tau\|_0}{T} - 0 \geqslant \widehat{\Omega}(A) - \frac{2\|A\|\|\tau\|_0}{T}$$

и, переходя к пределу при $T \to \infty$, получаем первое из доказываемых неравенств (10).

Аналогично, переходом к нижнему пределу вместо верхнего, получаем и второе неравенство. Остальные два неравенства (10) выводятся аналогично двум уже выведенным (путем естественных изменений). □

Доказательство теоремы 3. Заменим в равенствах (3), (4) (верных по определению 6) все точные грани по множеству, состоящему только из равномерных шкал, такими же точными гранями, но по более широкому множеству $\mathcal{T}^0$, от чего эти равенства, в силу оценок из теоремы 2 не нарушатся, зато превратятся в требуемые равенства (11). □

Доказательство теоремы 4. По заданной системе $A \in \mathcal{M}^n$ и произвольному $\varepsilon > 0$ найдем такое $T_\varepsilon > 0$, что любая густая шкала $\tau \in \mathcal{T}^0$, удовлетворяющая условию

$$T_\varepsilon < |\tau|_0, \tag{15}$$

удовлетворяет также и оценке $\widehat{\Delta}_\tau(A) \leqslant \widehat{\Omega}(A) + 2\varepsilon$.

Сначала с помощью определения 6 выберем такое $T > 0$, что $\widehat{\Delta}_{\tau(T)}(A) \leqslant \widehat{\Omega}(A) + \varepsilon$. Пусть теперь $T_\varepsilon > T$ и $\tau \in \mathcal{T}^0$ таковы, что для них выполнено условие (15). Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ выберем соответственно наименьшее $m_k \in \mathbb{N}$ и единственное $K \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие оценкам

$$\tau_k \leqslant m_k T < \tau_{k+1} \quad (m_0 \equiv 0), \quad \tau_K \leqslant mT < \tau_{K+1},$$

из которых вытекает цепочка соотношений

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tau(T)}^m(A) &= \frac{1}{mT}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \ln\|X_A(iT,(i-1)T)\| + \sum_{i=m_K+1}^{m} \ln\|X_A(iT,(i-1)T)\|\right) \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{K}\left(\ln\|X_A(\tau_k,\tau_{k-1})\| - \ln\|X_A(m_{k-1}T,\tau_{k-1})\| - \ln\|X_A(\tau_k,m_kT)\|\right) - \\
&\qquad - \frac{\|A\|\|\tau\|_0}{mT} \geqslant \frac{\tau_K}{mT}\,\Delta_\tau^K(A) - \frac{2K\|A\|T}{KT_\varepsilon} - \frac{\|A\|\|\tau\|_0}{KT_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Теперь, беря в полученной в итоге оценке верхний предел при $m \to \infty$ (или, что то же, при $K \to \infty$, пробегающем все натуральные числа подряд), получаем

$$\widehat{\Delta}_{\tau(T)}(A) = \varlimsup_{m\to\infty} \Delta_\tau^m(A) \geqslant 1 \cdot \varlimsup_{K\to\infty} \Delta_\tau^K(A) - \frac{2\|A\|T}{T_e} - 0 \geqslant \widehat{\Delta}_\tau(A) - \frac{2\|A\|T}{T_e}$$

и при достаточно большом T_e обеспечиваем требуемую оценку

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) \leqslant \widehat{\Delta}_{\tau(T)}(A) + \varepsilon \leqslant \widehat{\Omega}(A) + 2\varepsilon,$$

а с ней и первое равенство доказываемой теоремы.

Аналогично, выбрав число $T > 0$, удовлетворяющим оценке $\check{\Delta}_{\tau(T)}(A) \leqslant \check{\Omega}(A) + \varepsilon$, и перейдя к нижнему пределу вместо верхнего, получим и второе равенство. Остальные два выводятся аналогично двум уже выведенным (путем естественных изменений). □

Определение 9. Скажем, что шкала $\tau' \in \mathcal{T}$ служит *подшкалой* шкалы $\tau'' \in \mathcal{T}$ или, что то же, шкала τ'' служит *надшкалой* шкалы τ', если имеет место включение соответствующих им множеств

$$\{\tau'_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{\tau''_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Замечание 11 ([11])**.** Если у шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ есть медленно растущая подшкала $\tau' \in \mathcal{T}$, то в определении 3 для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ каждый из пределов по шкале τ можно заменить пределом по подшкале τ'.

Доказательство теоремы 6. Пусть даны система $A \in \mathcal{M}^n$ и расширяющаяся шкала $\tau \in \mathcal{T}_\infty$. Тогда для произвольного $T > 0$ выберем $p \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству

$$T \leqslant |\tau|_p, \tag{16}$$

а для каждого $k \geqslant p$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ выберем соответственно наименьшее $m_k \in \mathbb{N}$ и единственное $K \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие оценкам

$$\tau_k \leqslant m_k T < \tau_{k+1} \quad (m_0 \equiv 0), \quad m_K \leqslant m < m_{K+1},$$

из которых вытекает цепочка соотношений

$$\begin{aligned}
\Delta^m_{\tau(T)}(A) \geqslant \frac{1}{mT}\Bigg(\sum_{i=m_p+1}^{m} \ln\|X_A(iT,(i-1)T)\| + m_pT\Delta^{m_p}_{\tau(T)}(A)\Bigg) \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{mT}\Bigg(\sum_{k=p+1}^{K} \ln\|X_A(m_kT,m_{k-1}T)\| + \ln\|X_A(mT,m_KT)\|\Bigg) - \frac{m_p\|A\|}{m} \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{mT}\sum_{k=p+1}^{K}(\ln\|X_A(\tau_k,\tau_{k-1})\| - \ln\|X_A(\tau_k,m_kT)\| - \ln\|X_A(m_{k-1}T,\tau_{k-1})\|) - \\
- \frac{\|A\|(m-m_K+m_p)}{m} \geqslant \frac{\tau_K}{mT}\Delta^K_\tau(A) - \frac{\tau_p}{mT}\Delta^p_\tau(A) - \frac{2T\|A\|}{|\tau|_p} - \frac{\|A\|(m-m_K+m_p)}{m}.
\end{aligned}$$

Теперь, беря в *итоговой* оценке верхний предел при $m = m_K \to \infty$, имеем

$$\overline{\lim_{K\to\infty}}\, \Delta^{m_K}_{\tau(T)}(A) \geqslant 1\cdot \overline{\lim_{K\to\infty}}\, \Delta^K_\tau(A) - 0 - \frac{2\|A\|T}{|\tau|_p} - 0 = \widehat{\Delta}_\tau(A) - \frac{2\|A\|T}{|\tau|_p},$$

откуда, переходя к пределу при $|\tau|_p \to \infty$, получаем цепочку

$$\widehat{\Delta}_{\tau(T)}(A) \geqslant \overline{\lim_{K\to\infty}}\, \Delta^{m_K}_{\tau(T)}(A) \geqslant \widehat{\Delta}_\tau(A), \tag{17}$$

беря в которой точную нижнюю грань по $T > 0$, получаем первое из доказываемых неравенств (12).

Перейдя в итоговой оценке к нижнему пределу (вместо верхнего) при $m = m_K \to \infty$, а затем к пределу при $|\tau|_p \to \infty$, получим аналогичную цепочку для нижнепредельных показателей: в отличие от цепочки (17), ее первое неравенство (по идее, обратного знака) здесь обратится в равенство, поскольку шкала $(m_KT)_{K\in\mathbb{N}}$ так же, как и исходная шкала τ, является медленно растущей (замечание 11). Из этой цепочки взятием точной нижней грани по $T > 0$ выводится первое неравенство (13). Остальные два неравенства (12), (13) выводятся аналогично двум доказанным (путем естественных изменений). $\square$

Доказательство теоремы 8. По заданной системе $A \in \mathcal{M}^n$ и произвольной строго убывающей последовательности $\varepsilon_j \to 0$ $(j \to \infty)$, используя методы из работы [21], построим требуемую шкалу $\tau \in \mathcal{T}^1_\infty$ индукцией по параметру $j \in \mathbb{N}$.

При $j = 1$ положим $T_0 \equiv 1$, $K_0 \equiv 0$, $\tau_0 \equiv 0$ и $M_0 \equiv \tau_0/T_0 = 0 \in \mathbb{Z}$. Пусть для значения $j \in \mathbb{N}$ уже указаны числа T_{j-1}, K_{j-1} и построен конечный участок $(\tau_0, \ldots, \tau_{K_{j-1}})$ шкалы τ, причем

$$M_{j-1} \equiv \tau_{K_{j-1}}/T_{j-1} \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Тогда продолжим эту шкалу дальше с постоянной разностью T_{j-1} до члена с номером $K_j > K_{j-1}$, для которого при $T_j \equiv 2T_{j-1}$ выполнены

1) оценка $T_j/t_{K_j} < \varepsilon_j$, получаемая за счет простого увеличения числа K_j;

2) неравенства

$$\sup_{K_{j-1}<k\leqslant K_j} \Delta^k_\tau(A) \geqslant \widehat{\Delta}_{\tau(T_{j-1})}(A) - \varepsilon_j, \qquad \inf_{K_{j-1}<k\leqslant K_j} \delta^k_\tau(A) \leqslant \check{\delta}_{\tau(T_{j-1})}(A) + \varepsilon_j, \tag{19}$$

получаемые также увеличением числа K_j в силу определения 3 и совпадения шкалы τ с равномерной шкалой $\tau(T_{j-1})$, начиная с некоторого номера (благодаря условию (18));

3) условие $M_j \equiv \tau_{K_j}/T_j \in \mathbb{Z}$, достигаемое выбором нужной четности числа K_j, благодаря условию (18);

4) неравенства (обеспеченные определением 3 при достаточно большом M_j)

$$\inf_{m>M_j} \Delta^m_{\tau(T_j)}(A) \geqslant \check{\Delta}_{\tau(T_j)}(A) - \varepsilon_j, \qquad \sup_{m>M_j} \delta^m_{\tau(T_j)}(A) \leqslant \widehat{\delta}_{\tau(T_j)}(A) + \varepsilon_j. \tag{20}$$

Этим закончим индуктивный переход.

Теперь для построенной шкалы τ получаем следующие утверждения:

a) шкала τ — медленно расширяющаяся, поскольку ее разность неограниченно растет и для всех $K_j < k \leqslant K_{j-1}$ имеем $T_j/\tau_k \leqslant T_j/\tau_{K_j} < \varepsilon_j \to 0$ при $1 < j \to \infty$;

b) в силу оценок (19) и первой из формул (5) выполнено неравенство

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \Delta^k_\tau(A) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sup_{K_{j-1}<k\leqslant K_j} \Delta^k_\tau(A) \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \Big(\widehat{\Delta}_{\tau(T_{j-1})}(A) - \varepsilon_j\Big) = \widehat{\Omega}(A)$$

и аналогичное неравенство $\check{\delta}_\tau(A) \leqslant \check{\omega}(A)$;

c) в силу оценок (20) и второй из формул (5), выполнено неравенство

$$\check{\Delta}_\tau(A) = \underline{\lim_{j\to\infty}} \inf_{K_j<k\leqslant K_{j+1}} \Delta^k_\tau(A) \geqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} \inf_{M_j<m\leqslant 2M_{j+1}} \Delta^m_{\tau(T_j)}(A) \geqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} \Big(\check{\Delta}_{\tau(T_j)}(A) - \varepsilon_j\Big) = \check{\Omega}(A)$$

и аналогичное неравенство $\widehat{\delta}_\tau(A) \leqslant \widehat{\omega}(A)$.

d) все выведенные в пп. б) и в) неравенства на самом деле являются равенствами, поскольку обратные к ним неравенства верны по теореме 6. □

Доказательство теоремы 9. Достаточно применить теоремы 6 и 8. □

Замечание 12. Для любой шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ каждое значение a из множества всех предельных (от верхнего до нижнего) средних значений $\operatorname*{Lim}_{k\to\infty} S_k/\tau_k$ суммы $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i(\tau_i - \tau_{i-1})$ наследует некоторые свойства средних α_i от своих слагаемых: если при всех достаточно больших значениях i выполнены оценки $\alpha_i \geqslant c$ (или $\alpha_i \leqslant c$), то $a \geqslant c$ (или $a \leqslant c$ соответственно), а если существует точный предел $c = \lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i$, то существует и точное среднее $\lim\limits_{k\to\infty} S_k/\tau_k = c$.

Доказательство теоремы 13. Если $A \in \mathcal{C}^n \cap D^n$, то для любой шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ все равенства (14) вытекают из (9) и свойств

$$\ln \|X_A(t,s)\| = \Lambda(A)(t-s), \quad \ln |X_A(t,s)| = \lambda(A)(t-s), \quad t,s \in \mathbb{R},$$

которые при каждом $k \in \mathbb{N}$ влекут за собой равенства (см. замечание 12)

$$\Delta_\tau^k(A) = \frac{1}{\tau_k}\sum_{i=1}^{k}\Lambda(A)(\tau_i - \tau_{i-1}) = \Lambda(A), \quad \delta_\tau^k(A) = \frac{1}{\tau_k}\sum_{i=1}^{k}\lambda(A)(\tau_i - \tau_{i-1}) = \lambda(A). \qquad \square$$

Доказательство теоремы 14. Если $A \in \mathcal{C}^n$, то для любой расширяющейся шкалы $\tau \in \mathcal{T}_\infty$ все равенства (14) вытекают из (9) и свойств

$$\Delta^t(A) \equiv \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\| \to \Lambda(A), \quad \delta^t(A) \equiv \frac{1}{t}\ln|X_A(t,0)| \to \lambda(A), \quad t\to\infty,$$

с помощью которых согласно замечанию 12 для произвольного $\varepsilon > 0$ и значений $T, L > 0$, удовлетворяющих при всех $t > T$ условию $\Delta^t(A) \geqslant \Lambda(A) - \varepsilon$ и оценке (16), выводится недостающая оценка

$$\check{\Delta}_\tau(A) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\tau_k}\sum_{i=1}^{k_\varepsilon}\ln\|X_A(\tau_i - \tau_{i-1}, 0)\| + \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{\tau_k}\sum_{i=k_\varepsilon}^{k}\ln\|X_A(\tau_i - \tau_{i-1}, 0)\| \geqslant \Lambda(A) - \varepsilon$$

и аналогичная оценка $\widehat{\delta}_\tau(A) \leqslant \lambda(A) + \varepsilon$. $\square$

Доказательство теоремы 15. Если $A \in \mathcal{I}^n$, то для любой медленно расширяющейся шкалы $\tau \in \mathcal{T}_\infty^1$ имеем все равенства (14), так как для верхних (и аналогично для нижних) центральных показателей верны цепочки неравенств

$$\widehat{\Omega}(A) \geqslant \widehat{\Delta}_\tau(A) \geqslant \Lambda(A) = \widehat{\Omega}(A), \quad \check{\Omega}(A) \geqslant \check{\Delta}_\tau(A) \geqslant \Pi(A) = \check{\Omega}(A),$$

автоматически обращающихся в равенства. $\square$

Доказательство теоремы 16. Усовершенствуем доказательство теоремы 8 так, чтобы оно проходило уже не для одной системы $A \in \mathcal{M}^n$, а сразу для всех систем из заданного компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}^n$.

Изменения касаются только пп. 2), 4) упомянутого доказательства, которым предшествует выбор для каждой системы $A_0 \in \mathcal{K}$ такой окрестности $U(A_0)$, что для любой системы $A \in U(A_0)$ выполнены оценки

$$\big|\ln\|X_A(t,s)\| - \ln\|X_{A_0}(t,s)\|\big| \leqslant \varepsilon_j(t-s)/3, \quad 0 < t-s \leqslant T_j.$$

Из них получаем, что если для системы $A = A_0$ при $K_j = K_j(A_0)$ потребовать выполнения всех неравенств (19), (20) с заменой в них числа ε_j числом $\varepsilon_j/3$, то для любой системы $A \in U(A_0)$ будет выполнено первое из неравенств (19),

$$\sup_{K_{j-1}<k\leqslant K_j}\Delta_\tau^k(A) \geqslant \sup_{K_{j-1}<k\leqslant K_j}\Delta_\tau^k(A_0) - \frac{\varepsilon_j}{3} \geqslant \widehat{\Delta}_{\tau(T_{j-1})}(A_0) - \frac{2\varepsilon_j}{3} \geqslant \widehat{\Delta}_{\tau(T_{j-1})}(A) - \varepsilon_j,$$

а также, аналогично, и все остальные неравенства (19) и (20).

Наконец, если из покрытия компакта $\mathcal{K}$ окрестностями вида $U(A_0)$ выделить конечное подпокрытие $U(A_1), \ldots, U(A_l)$, а в качестве окончательного значения K_j выбрать наибольшее из чисел $K_j(A_1), \ldots, K_j(A_l)$, то утверждения пп. 2), 4) с приведенным здесь дополнительным пояснением будут выполнены для всех систем $A \in \mathcal{K}$. Для них же тогда будут выполнены и все заключительные утверждения а)–г) доказательства теоремы 8. $\square$

10. Построение ключевых примеров

Введем следующие квадратные матрицы порядка два:

$$A_+ \equiv \operatorname{diag}(1,-1), \quad A_- \equiv -A_+ = \operatorname{diag}(-1,1),$$

а на заданном промежутке $[s, s+2T)$ определим матричную функцию

$$A_T(t) = \begin{cases} A_+, & s \leqslant t < s+T; \\ A_-, & s+T \leqslant t < s+2T. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5. Систему $A \in \mathcal{M}^2$ построим индукцией по $j \in \mathbb{N}$ на расширяющихся промежутках $[0, t_j)$ с параметрами

$$T_j \equiv 2^{j-1}, \quad P_j \equiv 2^{2j-1}, \quad t_j \equiv 2^{3j}.$$

При $j = 1$ на каждом из последовательно примыкающих друг к другу промежутков длины $P_1 = 2$, заполняющих участок $[0, t_1) \equiv [0, 2^3)$ и разделенных точками $\sigma_0, \ldots, \sigma_{k_1}$ (где $\sigma_{k_1} = t_1$), кладем $A \equiv A_{T_1} = A_1$, получив P_1-периодическую функцию.

Пусть при некотором $j > 1$ система A уже построена на промежутке $[0, \tau_{j-1})$. Тогда на каждом из последовательно примыкающих друг к другу промежутков длины P_j, заполняющих участок $[t_{j-1}, t_j)$ и разделенных точками $\sigma_{k_{j-1}}, \ldots, \sigma_{k_j}$ (где $\sigma_{k_{j-1}} = t_{j-1}$, $\sigma_{k_j} = t_j$), периодически проделываем следующее:

1) сначала на первом участке длины $P_j/2$ берем P_1-периодическую функцию, равную $A \equiv A_{T_1}$ на каждом периоде длины P_1;

2) далее, на втором участке длины $P_j/2^2$ берем P_2-периодическую функцию, равную $A \equiv A_{T_2}$ на каждом периоде длины P_2, и т. д. …;

j) наконец, на последнем участке длины

$$P_j(1 - 2^{-1} - 2^{-2} - \cdots - 2^{-j+1}) = 2^{2j-1}2^{-j+1} = 2^j = 2T_j$$

берем функцию, равную $A \equiv A_{T_j}$, чем и закончим индуктивный переход.

Теперь для построенной системы A получаем следующие утверждения:

a) шкала σ является медленно растущей, поскольку при $\sigma_{k_{j-1}} < i \leqslant \sigma_{k_j}$ выполнены оценки

$$\frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \leqslant \frac{P_j}{t_{j-1}} = 2^{2j-1-3j} \to 0, \quad j \to \infty;$$

b) для любого $T = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$) показатель $\widehat{\Delta}_{\tau(T)}(A)$ можно считать по подшкале σ (замечание 11), причем если $j > m$, то $T_j \geqslant T$ и при каждом $k > k_j$ на участке $[\sigma_k, \sigma_{k-1}]$, содержащем точки шкалы $\tau(T)$ с номерами $i_{k-1}, \ldots, i_k$, по построению имеем

$$\frac{1}{\sigma_k - \sigma_{k-1}} \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| = 2^{-m},$$

откуда в силу замечания 12 получаем

$$\Omega(A) = \lim_{m\to\infty} \Delta_{\tau(2^m)}(A) = \lim_{m\to\infty} 2^{-m} = 0$$

и, аналогично, $\omega(A) = 0$;

c) для любой густой шкалы $\tau \in \mathcal{T}^0$ можно подобрать $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $P_m 2^{-m} > 4\|\tau\|_0$, из которого при каждом $k > k_m$ на участке $(\sigma_k, \sigma_{k-1}]$, содержащем точки шкалы τ с номерами $i_{k-1}+1,\ldots,i_k$, по построению будет вытекать оценка

$$\frac{1}{\tau_{i_k}-\tau_{i_{k-1}}}\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k}\ln\|X_A(\tau_i,\tau_{i-1})\|\geqslant\frac{P_m2^{-m}-4\|\tau\|_0}{P_m+\|\tau\|_0}\equiv\alpha>0,$$

откуда согласно замечаниям 11 и 12 получим неравенства $\widehat{\Delta}_\tau(A)\geqslant\check{\Delta}_\tau(A)>0=\Omega(A)$, а с ними и аналогичные неравенства $\check{\delta}_\tau(A)\leqslant\widehat{\delta}_\tau(A)<0=\omega(A)$. □

Доказательство теоремы 7. Пусть задана шкала $\tau\in\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}^1$, не являющаяся медленно растущей. Тогда выделим в ней подпоследовательность $0=\tau_{i_0}<\tau_{i_1}<\tau_{i_2}<\cdots$, удовлетворяющую для некоторого $\alpha>0$ неравенствам

$$\frac{\tau_{i_k}-\tau_{i_k-1}}{\tau_{i_k}}\geqslant 2\alpha,\quad k\in\mathbb{N},$$

а затем построим по шкале τ какую-либо густую ее надшкалу $\sigma\in\mathcal{T}^1$, содержащую, скажем, все натуральные числа и все середины вида $\sigma_{j_k}=(\tau_{i_k}-\tau_{i_k-1})/2$ при $k\in\mathbb{N}$. Определим систему $A\in\mathcal{M}^2$ следующим образом:

1) всюду, кроме отрезков вида $[\tau_{i_k-1},\tau_{i_k})$, положим $A\equiv A_+$,

2) на каждом отрезке вида $[\tau_{i_k-1},\sigma_{j_k})$ положим $A\equiv 0$,

3) на каждом отрезке вида $[\sigma_{j_k},\tau_{i_k})$ положим $A=2A_+$.

Тогда, пользуясь теоремой 2, получаем

$$\check{\Omega}(A)\leqslant\check{\Delta}_\sigma(A)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\tau_{i_k-1}}{\sigma_{j_k}}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{\sigma_{j_k}}{\tau_{i_k}}\leqslant 1-\alpha<1=\check{\Delta}_\tau(A)$$

и, аналогично, $\widehat{\omega}(A)>\widehat{\delta}_\tau(A)$, т. е. оба неравенства (13) не верны. □

Доказательство теоремы 10. Пусть задана расширяющаяся шкала $\tau\in\mathcal{T}_\infty$. Построим по ней медленно расширяющуюся надшкалу τ', например, делая следующее:

1) сначала для всех точек $\tau_k\in(0,10^1]$ исходной шкалы будем делить пополам каждый отрезок длины $\tau_k-\tau_{k-1}\geqslant 2^1$, а потом и его части, до тех пор, пока длина каждой из получившихся частей не станет меньше 2^1, но не меньше 2^0;

2) затем для всех точек $\tau_k\in(10^1,10^2]$ исходной шкалы будем аналогично делить каждый отрезок длины $\tau_k-\tau_{k-1}\geqslant 2^2$ до тех пор, пока длина каждой из получившихся его частей не станет меньше 2^2, но не меньше 2^1, и т. д.

После этого добавим к шкале τ' середины всех отрезков, на которые она разбивает полуось $\mathbb{R}^+$, получив из нее новую, также медленно расширяющуюся надшкалу τ'', и на образовавшихся половинках отрезков положим поочередно $A=A_+$ и $A=A_-$.

Тогда для полученной системы $A\in\mathcal{M}^2$ имеем цепочку

$$0\leqslant\check{\Delta}_\tau(A)\leqslant\widehat{\Delta}_\tau(A)\leqslant\Delta_{\tau'}(A)=0<1=\Delta_{\tau''}(A)\leqslant\check{\Omega}(A)\leqslant\widehat{\Omega}(A)\leqslant 1,$$

в которой все нестрогие неравенства вынуждены обратиться в равенства. Аналогично устанавливается и неравенство $\delta_\tau(A)=0>-1=\omega(A)$, т. е. все неравенства (12), (13) оказываются строгими. □

Определение 10. Назовем *верхней* и *нижней относительными мерами* (на полупрямой $\mathbb{R}^+$) измеримого подмножества $K\subset\mathbb{R}^+$ величи́ны

$$\widehat{\varkappa}(K)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\varkappa^t(K),\quad\check{\varkappa}(K)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\varkappa^t(K),\quad\varkappa^t(K)\equiv\frac{1}{t}\mathrm{mes}\,(K\cap[0,t]).\tag{21}$$

Для данных шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ и числа $N > 0$ обозначим через $L_N(\tau)$ и $M_N(\tau)$ множества, являющиеся объединением всех тех *промежутков* вида $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ ($k \in \mathbb{N}$), получаемых разбиением полуоси $\mathbb{R}^+$ шкалой τ, которые имеют длины, *не превышающие* N и, соответственно, *превышающие* N, а также введем их относительные меры

$$\check{\lambda}_N(\tau) \equiv \check{\varkappa}(L_N(\tau)), \quad \widehat{\lambda}_N(\tau) \equiv \widehat{\varkappa}(L_N(\tau)), \quad \check{\mu}_N(\tau) \equiv \check{\varkappa}(M_N(\tau)), \quad \widehat{\mu}_N(\tau) \equiv \widehat{\varkappa}(M_N(\tau))$$

и обозначим

$$\check{\lambda}(\tau) \equiv \sup_{N>0} \check{\lambda}_N(\tau), \quad \widehat{\lambda}(\tau) \equiv \sup_{N>0} \widehat{\lambda}_N(\tau), \quad \check{\mu}(\tau) \equiv \inf_{N>0} \check{\mu}_N(\tau), \quad \widehat{\mu}(\tau) \equiv \inf_{N>0} \widehat{\mu}_N(\tau). \tag{22}$$

Замечание 13. В формулах (22) все точные грани можно заменить пределами при $N \to \infty$, поскольку множество $L_N(\tau)$ с ростом параметра $N > 0$ нестрого возрастает (по включению), а множество $M_N(\tau) = \mathbb{R}^+ \setminus L_N(\tau)$ — нестрого убывает, и, кроме того, верны равенства

$$\check{\lambda}_N(\tau) + \widehat{\mu}_N(\tau) = \widehat{\lambda}_N(\tau) + \check{\mu}_N(\tau) = 1, \quad N > 0, \quad \check{\lambda}(\tau) + \widehat{\mu}(\tau) = \widehat{\lambda}(\tau) + \check{\mu}(\tau) = 1.$$

Замечание 14. Если K — объединение каких-либо непересекающихся (возможно, имеющих общие концы) конечных промежутков, на которые шкала $\tau \in \mathcal{T}$ разбивает полуось $\mathbb{R}^+$, то пределы в формулах (21) достигаются на подпоследовательности точек этой шкалы.

Лемма 1. *Для любых $\tau \in \mathcal{T}$ и $N > 0$ существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, что*

$$-\check{\delta}_\tau(A) = \widehat{\Delta}_\tau(A) \geqslant \widehat{\lambda}_N(\tau), \quad -\widehat{\delta}_\tau(A) = \check{\Delta}_\tau(A) \geqslant \check{\lambda}_N(\tau), \quad \omega(A) = \Omega(A) = 0.$$

Доказательство. По заданным $\tau \in \mathcal{T}$ и $N > 0$ образуем множество $L_N(\tau)$, а все остальные промежутки разобьем на части с длиной, не превышающей N, отметив, к примеру, все содержащиеся в них точки вида mN ($m \in \mathbb{N}$) и получив в результате густую надшкалу $\tau' \in \mathcal{T}^0$, где $\|\tau'\| \leqslant N$.

Если теперь на каждом из промежутков, на которые шкала τ' разбивает полуось $\mathbb{R}^+$, положить либо $A = A_+$, либо $A = A_-$ в совершенно произвольной последовательности знаков, то при каждом $k \in \mathbb{N}$ будут выполнены соотношения

$$\Delta^k_\tau(A) \geqslant \varkappa^{\tau_k}(L_N(\tau)), \quad \check{\Delta}_\tau(A) \geqslant \check{\lambda}_N(\tau), \quad \widehat{\Delta}_\tau(A) \geqslant \widehat{\lambda}_N(\tau).$$

Определим окончательно знаки системы $A = A_\pm$ на промежутках $[\tau'_{k-1}, \tau'_k)$ так, чтобы в итоге оказалось выполненным равенство $\Omega(A) = 0$. Для этого сначала положим $A = A_+$ на всех подряд промежутках от $k = 1$ до первого значения $k = k_1 \in \mathbb{N}$, при котором выполнится двойное неравенство $N < \Delta^{k_1}_{\tau'}(A) \leqslant 2N$, затем $A = A_-$ — от $k = k_1 + 1$ до значения $k = k_2 \in \mathbb{N}$, при котором $0 \leqslant \Delta^{k_2}_{\tau'}(A) < N$, и т. д. В итоге для любых $t > s \geqslant 0$ получим

$$\ln \|X(t,s)\| = \ln \|X(t,0)X(0,s)\| \leqslant \ln \|X(t,0)\| - \ln |X(s,0)| \leqslant 2N + 2N = 4N,$$

откуда будем иметь цепочку

$$0 \leqslant \check{\Omega}(A) \leqslant \widehat{\Omega}(A) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln \|X(iT,(i-1)T)\| \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{4N}{T} = 0$$

(в которой каждое неравенство обратится в равенство), а остальные доказываемые равенства будут вытекать по построению автоматически. $\square$

Лемма 2. *Для любой шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, что*

$$-\check{\omega}_\tau(A) = \widehat{\Omega}(A) \geqslant \widehat{\mu}(\tau), \quad -\widehat{\omega}_\tau(A) = \check{\Omega}(A) \geqslant \check{\mu}(\tau), \quad \delta_\tau(A) = \Delta_\tau(A) = 0.$$

Доказательство. Построим требуемую систему $A \in \mathcal{M}^2$ следующим образом:

1) возьмем сначала $N = 2^1$ и $p \equiv 0$;

2) выберем такое $P_N > p$, для которого верны оценки

$$\sup_{p<k\leqslant P_N} \varkappa^{\tau_k}(M_N(\tau)) \geqslant \widehat{\mu}_N(\tau) - N^{-1}, \quad \inf_{k>P_N} \varkappa^{\tau_k}(M_{2N}(\tau)) \geqslant \check{\mu}_{2N}(\tau) - N^{-1} \tag{23}$$

и условия

$$3N/\tau_{P_N} < N^{-1}, \quad [\tau_{P_N-1}, \tau_{P_N}) \subset M_N(\tau) \tag{24}$$

(множество $M_N(\tau)$ можно считать неограниченным, иначе в утверждение леммы подходит система $A \equiv 0$), после чего при каждом $k = p+1, \ldots, P_N$ совершим над промежутками $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ действия, описанные в пп. 3), 4) ниже;

3) сначала все *крупные* промежутки с длиной, превышающей N, разобьем (делением в точности пополам нужное число раз) на промежутки с длиной, не превышающей N, но превышающей $N/2$, будем по-прежнему называть их *крупными* и положим на них поочередно $A = A_+$ и $A = A_-$, тогда как на остальном множестве $[\tau_p, \tau_{P_N}) \setminus M_N$ положим $A = 0$, после чего получим

$$\Delta_\tau^k(A) = 0, \quad p < k \leqslant P_N; \tag{25}$$

4) затем все оставшиеся *мелкие* промежутки с длиной, не превышающей N, последовательно (слева направо) объединим в промежутки с длиной, превышающей $N/2$, но не превышающей $3N/2$, а если длины идущих подряд мелких промежутков дадут в сумме меньше $N/2$, то подсоединим их к ближайшему справа крупному промежутку с длиной, не превышающей N (благодаря второму условию (24), такой непременно найдется);

5) приняв удвоенное число $2N$ за новое значение N, а последнее число P_N за новое значение p, повторим пп. 2)–4) выше, и т. д.

В силу равенств (25) для построенной в итоге системы $A \in \mathcal{M}^2$ имеем $\Delta_\tau(A) = 0$.

Далее, в результате деления крупных промежутков и объединения мелких получится медленно расширяющаяся (в силу первой оценки (24)) шкала $\tau' \in \mathcal{T}_\infty^1$, удовлетворяющая при всех $N = 2^j$ $(j \in \mathbb{N})$ равенствам

$$\Delta_{\tau'}^k(A) = \varkappa^{\tau'_k}(M_N(\tau)), \quad \tau_{P_{N/2}} < \tau'_k \leqslant \tau_{P_N},$$

из которых с учетом теоремы 6, вторых оценок (23), а также замечаний 13 и 14, получаем

$$\widehat{\Omega}(A) \geqslant \widehat{\Delta}_{\tau'}(A) \geqslant \varlimsup_{N\to\infty} \sup_{P_{N/2}<k\leqslant P_N} \varkappa^{\tau_k}(M_N(\tau)) \geqslant \lim_{N\to\infty} \left(\widehat{\mu}_N(\tau) - N^{-1}\right) \geqslant \widehat{\mu}(\tau),$$

$$\check{\Omega}(A) \geqslant \check{\Delta}_{\tau'}(A) \geqslant \varliminf_{N\to\infty} \inf_{P_N<k\leqslant P_{2N}} \varkappa^{\tau_k}(M_{2N}(\tau)) \geqslant \lim_{N\to\infty} \left(\check{\mu}_{2N}(\tau) - N^{-1}\right) \geqslant \check{\mu}(\tau).$$

Остальные доказываемые равенства вытекают из построения автоматически. □

Доказательство теоремы 11. Возьмем сначала какую-либо медленно расширяющуюся шкалу $\tau' \in \mathcal{T}_\infty^1$, обладающую тем свойством, что последовательные (слева направо) промежутки, на которые она разбивает полуось $\mathbb{R}^+$, разбиваются на пары соседних промежутков одинаковой целочисленной длины. Разбив ровно по одному промежутку из каждой такой пары на промежутки единичной длины, получим искомую надшкалу $\tau \in \mathcal{T}_\infty^1$, для которой при $N = 1$ будут выполнены равенства

$$\widehat{\lambda}_N(\tau) = \check{\lambda}_N(\tau) = \widehat{\mu}(\tau) = \check{\mu}(\tau) = 1/2.$$

1. Если в качестве системы $A \in \mathcal{M}^2$ взять систему, существование которой утверждается в лемме 1, то будут выполнены все требуемые строгие неравенства (10), так как

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) \geqslant \check{\Delta}_\tau(A) \geqslant \check{\lambda}_N(\tau) > \Omega(A) = 0 = \omega(A) > -\check{\lambda}_N(\tau) \geqslant \widehat{\delta}_\tau(A) \geqslant \check{\delta}_\tau(A).$$

2. Если в качестве системы $A \in \mathcal{M}^2$ взять систему, существование которой утверждается в лемме 2, то будут выполнены все требуемые строгие неравенства (12) и (13), так как

$$\widehat{\Omega}_\tau(A) \geqslant \check{\Omega}_\tau(A) \geqslant \check{\mu}(\tau) > \Delta_\tau(A) = 0 = \delta_\tau(A) > -\check{\mu}(\tau) \geqslant \widehat{\omega}_\tau(A) \geqslant \check{\omega}_\tau(A).$$

Таким образом, шкала τ удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы. $\square$

Лемма 3. *Если для шкалы $\tau \in \mathcal{T}$ выполнены равенства $\widehat{\mu}(\tau) = \widehat{\lambda}(\tau) = 1$, то существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, что*

$$-\widehat{\omega}(A) = \check{\Omega}(A) \geqslant 1 > 0 = \check{\Delta}_\tau(A) = \widehat{\delta}_\tau(A), \quad -\check{\omega}(A) = \widehat{\Omega}(A) = 2 > 1 = \widehat{\Delta}_\tau(A) = -\check{\Delta}_\tau(A).$$

Доказательство. Требуемая система $A \in \mathcal{M}^2$ строится во многом аналогично системе из леммы 2:

1) возьмем сначала $N = 2^1$ и $p \equiv 0$;

2) выберем такое $P_N > p$, для которого верны оценки

$$\sup_{p<k\leqslant P_N} \varkappa^{\tau_k}(L_N(\tau)) \geqslant \widehat{\lambda}_N(\tau) - N^{-1}, \qquad \sup_{p<k\leqslant P_N} \varkappa^{\tau_k}(M_N(\tau)) \geqslant \widehat{\mu}_N(\tau) - N^{-1}, \tag{26}$$

и условия (24), после чего при каждом $k = p+1, \ldots, P_N$ совершим над промежутками $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ действия, описанные в пп. 3), 4) ниже;

3) сначала все *крупные* промежутки с длиной, превышающей N, разобьем (делением пополам) на промежутки с длиной, не превышающей N, но превышающей $N/2$, и положим на них поочередно то $A = 2A_+$, то $A = 2A_-$, тогда как на остальном множестве $[\tau_p, \tau_{P_N}) \cap L_N$ положим $A = A_+$, после чего получим

$$\Delta_\tau^k(A) = \varkappa^{\tau_k}(L_N(\tau)), \quad p < k \leqslant P_N; \tag{27}$$

4) затем все оставшиеся *мелкие* промежутки последовательно объединим в промежутки с длиной, превышающей $N/2$, но не превышающей $3N/2$ (причем если их длины дадут в сумме меньше $N/2$, то подсоединим их к ближайшему справа крупному промежутку — см. второе условие (24));

5) приняв удвоенное число $2N$ за новое значение параметра N, а последнее число P_N за новое значение параметра p, повторим пп. 2)–4) выше, и т. д.

Для построенной в итоге системы $A \in \mathcal{M}^2$ в силу первых оценок (26) имеем

$$\widehat{\Delta}_\tau(A) = \varlimsup_{N\to\infty} \sup_{P_{N/2}<k\leqslant P_N} \varkappa^{\tau_k}(L_N(\tau)) = \lim_{N\to\infty} \left(\widehat{\lambda}_N(\tau) - N^{-1}\right) = \widehat{\lambda}(\tau) = 1,$$

а из равенств (27) получаем

$$0 \leqslant \check{\Delta}_\tau(A) \leqslant \check{\lambda}(\tau) = 1 - \widehat{\mu}(\tau) = 0.$$

Далее, в результате получится медленно расширяющаяся (в силу первого условия (24)) шкала $\tau' \in \mathcal{T}_\infty^1$, удовлетворяющая при всех $N = 2^j$ $(j \in \mathbb{N})$ равенствам

$$\Delta_{\tau'}^k(A) = 2\varkappa^{\tau'_k}(M_N(\tau)) + \varkappa^{\tau'_k}(L_N(\tau)) = 1 + \varkappa^{\tau'_k}(M_N(\tau)), \quad \tau_{P_{N/2}} < \tau'_k \leqslant \tau_{P_N},$$

из которых, с учетом теоремы 6, вторых оценок (26), а также замечаний 13 и 14, получаем

$$2 \geqslant \widehat{\Omega}(A) \geqslant \widehat{\Delta}_{\tau'}(A) \geqslant 1 + \varlimsup_{N\to\infty} \sup_{P_{N/2}<k\leqslant P_N} \varkappa^{\tau_k}(M_N(\tau)) \geqslant 1 + \lim_{N\to\infty} \left(\widehat{\mu}_N(\tau) - N^{-1}\right) \geqslant 2,$$

$$\check{\Omega}(A) \geqslant \check{\Delta}_{\tau'}(A) \geqslant 1 + \varliminf_{N\to\infty} \inf_{P_{N/2}<k\leqslant P_N} \varkappa^{\tau_k}(M_N(\tau)) \geqslant 1.$$

Остальные доказываемые равенства вытекают из построения автоматически. $\square$

Доказательство теоремы 12. Для заданной разреженной шкалы $\tau \in \mathcal{T}^\infty$ имеются следующие три возможности:

1) для некоторого $N > 0$ выполнено неравенство $\check{\lambda}_N(\tau) > 0$, тогда применим лемму 1, и для полученной системы $A \in \mathcal{M}^2$ будут выполнены все строгие неравенства (10);

2) выполнено неравенство $\check{\mu}(\tau) > 0$, тогда применим лемму 2, и для полученной системы $A \in \mathcal{M}^2$ будут выполнены все строгие неравенства (12), (13);

3) выполнены равенства $\check{\mu}(\tau) = 0$ и $\check{\lambda}_N(\tau) = 0$ для любого $N > 0$, откуда, учитывая замечание 13, имеем

$$\widehat{\lambda}(\tau) = 1 - \check{\mu}(\tau) = 1, \quad \check{\lambda}(\tau) = \sup_{N>0} \check{\lambda}_N(\tau) = 0, \quad \widehat{\mu}(\tau) = 1 - \check{\lambda}(\tau) = 1,$$

а тогда, применив лемму 3, для полученной системы $A \in \mathcal{M}^2$ опять же будем иметь все строгие неравенства (12), (13). □

Литература

[1] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости* (Наука, М., 1966).

[2] Изобов Н.А. *Введение в теорию показателей Ляпунова* (БГУ, Минск, 2006).

[3] Виноград Р.Э. *О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений*, Матем. сб. **42** (2), 207–222 (1957).

[4] Миллионщиков В.М. *Доказательство достижимости центральных показателей*, Сиб. матем. журн. **10** (1), 99–104 (1969).

[5] Ветохин А.Н. *Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова*, Дифференц. уравнения **34** (10), 1313–1317 (1998).

[6] Сергеев И.Н. *Классы Бэра мажоранты старшего и миноранты младшего показателей Перрона линейных систем*, Дифференц. уравнения **41** (11), 1576 (2005).

[7] Сергеев И.Н. *Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности*, Дифференц. уравнения **16** (3), 438–448 (1980).

[8] Сергеев И.Н. *Об универсальных формулах для центральных показателей линейных систем*, Дифференц. уравнения **52** (11), 1589–1590 (2016).

[9] Сергеев И.Н. *Упрощенные центральные показатели линейных дифференциальных систем в разных шкалах*, Дифференц. уравнения **53** (11), 1561–1563 (2017).

[10] Сергеев И.Н. *Некоторые свойства центральных показателей линейных дифференциальных систем*, XVII Междунар. научная конфер. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2017): Тез. докл., Минск, 16–20 мая 2017 г. Ч. 1, 36–37 (ИМ НАН Беларуси, Минск, 2017).

[11] Изобов Н.А. *О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы*, Дифференц. уравнения **1** (4), 469–477 (1965).

[12] Изобов Н.А. *Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление*, Докл. АН БССР **26** (1), 5–8 (1982).

[13] Миллионщиков В.М. *Вспомогательные орбитальные показатели в растущих шкалах времени*, УМН **94** (4), 135 (1994).

[14] Сергеев И.Н. *Экстремальные значения верхнего показателя в неравномерных шкалах времени*, Дифференц. уравнения **31** (5), 913 (1995).

[15] Макаров Е.К. *О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях*, Дифференц. уравнения **32** (12), 1710–1711 (1996).

[16] Барабанов Е.А. *О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям*, Дифференц. уравнения **33** (12), 1592–1600 (1997).

[17] Липницкий А.В. *К вопросу о вычислении показателей Ляпунова линейных систем по временным геометрическим прогрессиям*, Дифференц. уравнения **39** (11), 1577 (2003).

[18] Долгов А.В. *Об одном неравенстве для нижних показателей решений линейных систем*, Дифференц. уравнения **34** (11), 1578 (1998).

[19] Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme*, Math. Z. **31**, 748–766 (1930).

[20] Миллионщиков В.М. *Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения **5** (7), 1167–1170 (1969).
[21] Сергеев И. Н. *К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений*, Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 9. 111–166 (1983).

Игорь Николаевич Сергеев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,

e-mail: igniserg@gmail.com

I.N. Sergeev

On simplified formulas for the central exponents of differential systems with non-uniform scales

Abstract. We study the Vinograd–Millionshchikov central exponents, which represent the exact outer boundaries for the mobility of the extremal values of the Lyapunov and Perron exponents of a linear differential system under uniformly small perturbations of its coefficients. We prove the possibility of calculating those exponents using simplified formulas with expanding time scales and obtain concrete estimates of the central exponents with simplified ones, calculated in different scales: thick, expanding, slowly expanding and sparse.

Keywords: differential equation, linear system, stability, Lyapunov exponent, central exponent.

Igor Nikolaevich Sergeev

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: igniserg@gmail.com