В. Г. Чирский, Р. Ф. Шакиров, О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 1, 86–93

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 511.36

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ОСНОВАНИЙ

В. Г. Чирский, Р. Ф. Шакиров (г. Москва)

Аннотация

С использованием оценок В. Х. Салихова для линейных форм от чисел $\ln 2$, $\ln 3$ улучшена асимптотическая оценка для числа членов разложения натурального числа в системе счисления с двумя основаниями.

REPRESENTATIONS OF POSITIVE INTEGERS IN DBNS

V. G. Chirskii, R. F. Shakirov (Moscow State University)

Abstract

With V. Ch. Salihov's estimates of linear forms in $\ln 2$ and $\ln 3$ we improve the asymptotic estimate of number of terms in DBNS.

1. Введение и формулировка результатов

Рассматривается задача о представлении натурального числа x в виде суммы чисел

$$2^a 3^b,\ a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1}$$

В работе [1] приводится алгоритм решения этой задачи, на первом шаге которого находят наибольшее число w вида (1), не превосходящее число x. Затем та же процедура применяется к числу $x - w$ и так далее, пока не будет получено число 0. В [1] установлена

Теорема 1. *Продолжительность работы этого алгоритма равна*

$$O\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}\right), x \to +\infty \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы использует теорему Р. Тайдемана [2], из которой следует, что существует постоянная C такая, что между числами

$$x - \frac{x}{(\ln x)^{\tilde{C}}}, x$$

обязательно есть число вида (1). Практические вычисления говорят о том, что реальные значения дают в соотношении (2) значительно лучшую оценку подразумеваемой постоянной, чем полученная авторами [1] с использованием известных им оценок линейных форм от логарифмов алгебраических чисел.

В настоящей работе использованы существенно лучшие оценки линейных форм от чисел $\ln 2$ и $\ln 3$, установленные В.Х. Салиховым [3]. С их помощью получено следующее уточнение теоремы из [1].

Теорема 2. *Продолжительность работы упомянутого выше алгоритма при любом $C \geqslant \frac{33}{8}$ и любом $\epsilon > 0$ при $x \geqslant X_1(C, \epsilon)$ не превосходит величины*

$$C_0 \frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}, \tag{3}$$

где

$$C_0 = C_0(C, \epsilon) = C(1 + \epsilon) + \log_3 2 \tag{4}$$

В частности, при $C = \frac{33}{8}$ при $x > X_1(\epsilon)$

$$C_0 = 5,70996 + 4,125 \cdot \epsilon$$

2. Уточнение теоремы Р. Тайдемана

В доказательстве теоремы 1 используется модифицированная теорема из [2], которую сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть $n_1 = 1 < n_2 < \ldots$ – последовательность всех чисел вида (1). Тогда для любого числа $C \geqslant \frac{33}{8}$ существует число $N, N = N(C)$ такое, что для*

$$n_i \geqslant N \tag{5}$$

выполняется оценка:

$$n_{i+1} - n_i < \frac{n_i}{(\log_2 n_i)^{1/C}} \cdot C_1(C), \tag{6}$$

где

$$C_1(C) = 2^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C} e^{\frac{(2\ln 2)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}}{(\ln N)^{1/C}}} \tag{7}$$

При $C = \frac{33}{8}$ получаем

$$C_1 = 1,32961 \cdot e^{\frac{1,21657}{(\ln N)^{8/33}}} \tag{8}$$

Proof: Пусть
$$n = n_i = 2^u 3^u$$
удовлетворяет (5). Тогда u при одном из $p \in \{2,3\}$ удовлетворяет неравенству
$$u \geqslant \frac{\ln n}{2 \ln p} \tag{9}$$

Пусть $\frac{h_0}{k_0}, \frac{h_1}{k_1}, \dots$ – последовательность подходящих дробей к числу $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Последовательность k_l возрастает и пусть число j выбрано так, что
$$k_j \leqslant u < k_{j+1} \tag{10}$$
Рассматриваются 2 случая. В первом
$$\frac{h_j}{k_j} > \frac{\ln 2}{\ln 3} \tag{11}$$
Положим
$$n' = 2^{u-k_j} 3^{v+h_j}. \tag{12}$$
Из (11) и (12) следует, что
$$n' = n \cdot \frac{3^{h_j}}{2^{k_j}} > n. \tag{13}$$
По свойству подходящих дробей,
$$0 < \frac{h_j}{k_j} - \frac{\ln 2}{\ln 3} < \frac{h_j}{k_j} - \frac{h_{j+1}}{k_{j+1}} = \frac{1}{k_j k_{j+1}} \tag{14}$$
Следовательно, ввиду (14),
$$\ln \frac{n'}{n} < \ln \frac{3^{h_j}}{2^{k_j}} = h_j \ln 3 - k_j \ln 2 = \left(\frac{h_j}{k_j} - \frac{\ln 2}{\ln 3} \right) \frac{\ln 3}{k_j} < \frac{\ln 3}{k_{j+1}} \tag{15}$$
Используя (15), (10), (9), (5) получаем, что
$$\ln \frac{n'}{n} < \frac{\ln 3}{k_{j+1}} < \frac{\ln 3}{u} \leqslant \frac{2 \ln p \ln 3}{\ln n} \leqslant \frac{2 \ln p \ln 3}{\ln N}. \tag{16}$$

Имеет место утверждение:

Если $1 < t < D^{-1}$, то $\ln t > D \cdot (t-1)$, для доказательства которого достаточно заметить, что функция $\ln t - D \cdot (t-1)$ равна 0 при $t = 1$ и возрастает на интервале $(1, D^{-1})$.

Так как из (16)следует, что
$$\frac{n'}{n} \leqslant e^{\frac{2 \ln p \ln 3}{\ln N}},$$

согласно утверждению, получаем:

$$\ln \frac{n'}{n} > \exp\left(-\frac{2\ln p \ln 3}{\ln N}\right)\left(\frac{n'}{n} - 1\right). \tag{17}$$

Из (17) и (16) следует, что

$$e^{-\frac{2\ln p\ln 3}{\ln N}}\left(\frac{n'}{n} - 1\right) < \ln \frac{n'}{n} \leqslant \frac{2\ln p \ln 3}{\ln n},$$

откуда

$$n' - n \leqslant \frac{n}{\ln n} \cdot 2\ln p \ln 3 \cdot e^{\left(\frac{2\ln p \ln 3}{\ln N}\right)},$$

или

$$n' - n \leqslant \frac{n}{\log_p n} \cdot 2\log 3 \cdot e^{\left(\frac{2\ln p \ln 3}{\ln N}\right)}. \tag{18}$$

Во втором случае

$$\frac{h_j}{k_j} < \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

По свойству подходящих дробей

$$\frac{h_{j-1}}{k_{j-1}} > \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Полагаем

$$n' = 2^{u-k_{j-1}}3^{v+h_{j-1}}.$$

При этом, как и в (13), $n' > n$. Кроме того,

$$0 < \frac{h_{j-1}}{k_{j-1}} - \frac{\ln 2}{\ln 3} < \frac{h_{j-1}}{k_{j-1}} - \frac{h_j}{k_j} = \frac{1}{k_{j-1}k_j}$$

Аналогично (15), получаем неравенство

$$\ln \frac{n'}{n} = \ln \frac{3^{h_{j-1}}}{2^{k_{j-1}}} = h_{j-1}\ln 3 - k_{j-1}\ln 2 < \frac{\ln 3}{k_j}. \tag{19}$$

Далее существенно используется теорема В.Х. Салихова [3] о линейной форме от чисел $\ln 2$, $\ln 3$. Сформулируем следствие этой теоремы:

Если $C \geqslant \frac{33}{8}$, то существует число $N = N(C)$ такое, что для всех k_j, удовлетворяющих неравенству $k_j \geqslant N$, выполнена оценка

$$|h_j \ln 3 - k_j \ln 2| > k_j^{-C}. \tag{20}$$

Так как

$$\frac{1}{k_j k_{j+1}} > \left|\frac{h_j}{k_j} - \frac{\ln 2}{\ln 3}\right| = \left|\frac{h_j \ln 3 - k_j \ln 2}{k_j \ln 3}\right|,$$

из (20) следует, что

$$\frac{1}{k_jk_{j+1}} > \frac{1}{k_j\ln 3}{k_j}^{-C},$$

или

$$k_{j+1} < (\ln 3){k_j}^{C},$$

или

$$k_j > \left(\frac{k_{j+1}}{\ln 3}\right)^{1/C}. \qquad (21)$$

Таким образом, из (19), (21), (10), (9), (5)

$$\ln\frac{n'}{n} < \frac{\ln 3}{k_j} < \frac{(\ln 3)^{1+1/C}}{(k_{j+1})^{1/C}} < \frac{(\ln 3)^{1+1/C}}{u^{1/C}} <$$
$$< \frac{(\ln 3)^{1+1/C}(2\ln p)^{1/C}}{(\ln n)^{1/C}} < \frac{(2\ln p)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}}{(\ln N)^{1/C}} \qquad (22)$$

и из (22) получаем

$$\frac{n'}{n} < e^{\left(\frac{(2\ln p)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}}{(\log N)^{1/C}}\right)}, \qquad (23)$$

а согласно утверждению,

$$\left(\frac{n'}{n}-1\right)e^{\left(\frac{-(2\ln p)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}}{(\ln N)^{1/C}}\right)} \leqslant \left(\frac{(2\ln p)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}}{(\ln n)^{1/C}}\right),$$

откуда

$$n'-n \leqslant \frac{n}{(\ln n)^{1/C}}(2\ln p)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}e^{\left(\frac{(2\ln p)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}}{(\ln N)^{1/C}}\right)},$$

или

$$n'-n \leqslant \frac{n}{(\log_p n)^{1/C}}2^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}e^{\left(\frac{(2\ln p)^{1/C}(\ln 3)^{1+1/C}}{(\ln N)^{1/C}}\right)}. \qquad (24)$$

Из (18), (24), (7) следует утверждение об оценке (6) леммы 1.

❏

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $C \geqslant \frac{33}{8}$, $N(C)$ - число из леммы 1, $C_1 = C_1(C)$ определено в (7), (8). Пусть

$$X_0 = X_0(C) = N(C)$$

и пусть $x = x_0$ выбрано так, что

$$2^{\frac{\log_2 X}{\log_2\log_2 X}} \geqslant X_0. \qquad (25)$$

По лемме 1, существует число вида (1) такое, что

$$x - \frac{C_1 x}{(\log_p x)^{1/C}} < 2^{a_0} 3^{b_0} \leqslant x = x_0 \tag{26}$$

Определим число x_1 условием

$$x = x_0 = 2^{a_0} 3^{b_0} + x_1.$$

Ввиду (26), оно удовлетворяет неравенству

$$x_1 < \frac{C_1 x}{(\log_p x)^{1/C}}. \tag{27}$$

Если $x_1 > X_0$, то снова по лемме 1, находим число $2^{a_1} 3^{b_1}$ такое, что число x_2, определенное равенством

$$x_1 = 2^{a_1} 3^{b_1} + x_2.$$

удовлетворяет неравенству

$$x_2 < \frac{C_1 x_1}{(\log_p x_1)^{1/C}}. \tag{28}$$

Из (27) и (28) следует

$$x_2 < \frac{{C_1}^2 x}{(\log_p x)^{1/C} (\log_p x_1)^{1/C}}.$$

Продолжаем этот процесс и получаем, что при условии

$$x_i > X_0 \tag{29}$$

существуют числа $2^{a_i} 3^{b_i}$ и x_{i+1} такие, что

$$x_i = 2^{a_i} 3^{b_i} + x_{i+1}$$

и

$$x_{i+1} < \frac{C_1 x_i}{(\log_p x_i)^{1/C}} < \frac{{C_1}^{i+1} x}{(\log_p x)^{1/C} (\log_p x_1)^{1/C} \dots (\log_p x_i)^{1/C}} \tag{30}$$

завершим этот процесс на шаге $l = l(x)$, когда выполняется неравенство

$$x_{l+1} \leqslant f(x) < x_l\,, \tag{31}$$

где, для краткости, введено обозначение

$$f(x) = 2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}}. \tag{32}$$

Так как при этом, ввиду (31) и (25),

$$x_l > X_0,$$

условие (29) выполнено при всех $i \leqslant l$.
Полагая в (30) $i = l - 1$ и используя неравенства

$$f(x) < x_l < \cdots < x_1 < x_0 = x,$$

получаем, что

$$x_l < \frac{{C_1}^l x}{(\log_p x_l)^{1/C}}. \tag{33}$$

Из (31) и (33) следует, что

$$f(x) < x_l < \frac{{C_1}^l x}{(\log_p x_l)^{1/C}} < \frac{{C_1}^l x}{(\log_p f(x))^{1/C}}. \tag{34}$$

В свою очередь, из (34) следует, что

$$\log_2 f(x) + \frac{1}{C}\log_2 \log_p f(x) < l \log_2 C_1 + \log_2 x. \tag{35}$$

Из (35) и (32) получаем

$$l < \frac{\log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}}{\frac{1}{C}(\log_2 \log_2 x - \log_2 \log_2 \log_2 x - \log_2 \log_2 p - C \log_2 C_1)}. \tag{36}$$

Перепишем (36) в виде

$$l < \frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 c} \cdot C \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\log_2 \log_2 \log_2 x - 1 + \log_2 \log_2 p + C \log_2 C_1}{\log_2 \log_2 x - 1}} \right) \tag{37}$$

Выбираем "худшую оценку"из возможных при разных p. Такая оценка получается при $p = 3$.

При $x \to +\infty$ выражение, стоящее в круглых скобках в (37), стремится к числу 1. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует $X_1(C, \epsilon)$ такое, что если $x > X_1(C, \epsilon)$, то величина этого выражения не превосходит $1 + \epsilon$.

Поэтому для l имеет место оценка

$$l < C \cdot (1 + \epsilon)\frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}. \tag{38}$$

Поскольку после завершения l шагов выполняется неравенство

$$x_{l+1} \leqslant f(x) = 2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}},$$

для завершения алгоритма достаточно произвести разложение числа x_{l+1}, например, в троичной системе, при этом число шагов не больше, чем

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 0,63093 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}. \tag{39}$$

Складывая оценки (38) и (39), получаем оценки (3) и (4). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dimitrov V. S., Jullien G. A. and Miller W. C. An Algorithm for Modular Exponentiation // Inform. Process. Lett. 1998. V. 66. №.3. P. 155—159.

2. Tijdeman R. On the maximal distance between integers composed of small primes. Composito mathematica. 1974. V. 28. Fasc. 2. P. 129—162.

3. Салихов В. Х. О мере иррациональности log 3 // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 417. №6. С. 753—755.

Московский педагогический государственный университет
Поступило 10.02.2013