Ф. З. Рахмонов, Оценка тригонометрических сумм с простыми числами, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 1, 158–171

https://www.mathnet.ru/cheb67

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 511.325

ОЦЕНКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Ф. З. Рахмонов (г. Москва)

Аннотация

В работе изучено поведение тригонометрической суммы с простыми числами

$$S_m(\alpha; x, k) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha(n+k)^m), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1,$$
$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau,$$

когда α приближается рациональным числом с малым знаменателем и устанавливается связь с плотностными теоремами для нулей L – рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы.

1 Введение

И.М.Виноградов [1, 2] в 1937 г. создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Он обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложений и вычитаний из сравнительно небольшого числа других сумм (решето Виноградова), хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм и средств, не имеющих какого–либо отношения к теории функции $\zeta(s)$ или L–рядов (метод сглаживания двойных сумм). Пользуясь этим методом, он впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы

$$S(\alpha, x) = \sum_{p\leqslant x} e(\alpha p).$$

Полученная оценка для $S(\alpha, x)$ в соединении с теоремами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях позволила вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечетного N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3,$$

следствием которого является *тернарная проблема Гольдбаха о представлении нечетного натурального числа как суммы трех простых чисел.*

В том же 1937 г. И.М.Виноградов с помощью указанного соображения с последующим применением метода Г.Вейля получил оценку суммы

$$S'(f) = \sum_{p\leqslant x} e\left(f(p)\right), \qquad f(t) = \alpha_m t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + \ldots + \alpha_l t,$$

А в 1948 –1956 гг. И.М.Виноградов [1, 2], используя свой метод тригонометрических сумм вместо метода Г.Вейля, доказал общую теорему об оценке суммы $S'(f)$.

Ю.В.Линник [3] с помощью идей Г.Харди и Д.Литтлвуда, применявшихся ранее в проблеме Гольдбаха и плотностых теоремах для нулей L– рядов Дирихле, дал новый вариант нетривиальной оценки тригонометрической суммы $S(\alpha, x)$. Тем самым, Ю.В.Линником было дано новое доказательство теоремы И.М.Виноградова о трех простых числах (проблема Гольдбаха). Н.Г.Чудаков [4] также предложил подобный метод исследования тригонометрических сумм $S(\alpha, x)$ с помощью оценки средних значений функций Чебышева, получение которой, в свою очередь, основывается на распределении нулей L–рядов Дирихле в критической полосе.

Обозначение: χ – характер Дирихле по модулю q, $N(\alpha, T, \chi)$ – число нулей $\rho = \beta + i\gamma$ функции Дирихле $L(s, \chi)$ в области $Res \geqslant \alpha \geqslant 0,5$, $0 \leqslant Ims \leqslant T$, $l = \ln x$, $e(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha)$, $g = g(n) = (n + k)^m$, k – фиксированное натуральное число.

$$C(\chi, g, q) = \sum_{n=1}^{q} \chi(n) e\left(\frac{g(n)}{q}\right).$$

$$S_m(\alpha; x, k) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha(n + k)^m), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau,$$

Определение. *Пусть $c \geqslant 2$, $\theta < 1$ и $B \geqslant 1$ абсолютные постоянные, $T \geqslant T_0 > 0$, $H \geqslant T^\theta$, тогда оценка вида*

$$\sum_{\chi} [N(\alpha, T + H, \chi) - N(\alpha, T, \chi)] \ll (qT)^{c(1-\alpha)} (\ln qT)^B \tag{1}$$

называется плотностной теоремой в коротких прямоугольниках критической полосы для нулей L – рядов Дирихле по модулю q.

Zhan Tao [5] доказал, что соотношение (1) имеет место при $c \leqslant 8/3$, $\theta \leqslant 1/3$ и $B \leqslant 216$. При произвольном $H \geqslant 1$ его можно представить в следующем удобном виде

$$\sum_{\chi}[N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi)] \ll (q(H+T^{1/3}))^{c(1-u)}(\ln qT)^B. \qquad (2)$$

Теорема 1. *Пусть $x \geqslant x_0$, $\tau \geqslant x^{m-\frac{1}{c}}\exp(\ln^{0{,}76}x)$, $q \leqslant x^{\frac{2}{3c}}\exp\left(-\ln^{0{,}76}x\right)$, b — произвольное фиксированное положительное число.*

$$F(q,x)=\begin{cases}\exp(-\ln^4\ln x) & \text{если } q\leqslant(\ln x)^b,\\ (\ln x)^{B+4} & \text{если } q>(\ln x)^b..\end{cases}$$

Тогда справедливо равенство:

$$S_m(\alpha;x,k)=\frac{C(\chi_0,g,q)}{\varphi(q)}\int_2^x e(\lambda(u+k)^m)du+O\left(xF(q,x)\max_{\chi mod q}\frac{|C(\chi,g,q)|}{\varphi(q)}\right)$$

Следствие 1. *Пусть $x \geqslant x_0$, $\tau \geqslant x^{m-\frac{3}{8}}\exp(\ln^{0{,}76}x)$, $q \leqslant x^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\ln^{0{,}76}x\right)$, $b \geqslant (m+1)(B+6)$ — произвольное фиксированное положительное число. Тогда справедливо равенство:*

$$S_m(\alpha;x,k)=\frac{C(\chi_0,g,q)}{\varphi(q)}\int_2^x e(\lambda(u+k)^m)du+O\left(\frac{xF(q,x)}{\varphi(q)}q^{1-\frac{1}{m+1}}\right)$$

Следствие 2. *Пусть $q > (\ln x)^b$, тогда при выполнении условий следствия* 1 справедлива оценка:

$$|S_m(\alpha;x,k)| \ll xq^{-\frac{1}{m+1}}(\ln x)^{B+4}.$$

Доказательство теоремы 1 основывается на дальнейшем развитии методов работы Ю.В. Линника [3] и Н.Г. Чудакова [6], в которых, соответственно, исследуются тригонометрические суммы с простыми числами и попадание простых чисел в короткие интервалы.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.Н.Чубарикову за постоянное внимание и помощь в работе.

2 Известные леммы

Лемма 1. *Пусть $2 \leqslant T \leqslant x$, χ–характер Дирихле по* mod$q$, *$\rho = \beta + i\gamma$ нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$. Тогда*

$$\psi(x,\chi)=E_0x-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+R_1(x,T,\chi), \quad R_1(x,T,\chi)\ll xT^{-1}l^2,$$

где $E_0=1$, если $\chi=\chi_0$; $E_0=0$, если $\chi\neq\chi_0$.
Доказательство см.[7]

Лемма 2. *Пусть действительная функция* $f(u)$ *и монотонная функция* $g(u)$ *удовлетворяют условиям:* $f'(u)$ *– монотонна,* $|f'(u)| \geqslant m > 0$ *и* $|g(u)| \leqslant M$. *Тогда справедлива оценка*:

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m}.$$

Доказательство см. [1].

Лемма 3. *Пусть* $q \geqslant 1$*–целое. При подходящем* $c_1 > 0$ *функция* $L(s,\chi)$, $s = \sigma + it$ *не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \delta(q,t), \quad \delta(q,t) = \frac{c_1}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t|+3)\ln^{3/4}\ln(|t|+3))},$$

для всех характеров $\chi \mathrm{mod} q$, *за исключением, быть может, простого действительного нуля* β_1 *у* L*–функции, определенной исключительным характером* χ_1.
Доказательство см. [8].

Лемма 4. *Число нулей* ρ *функции* $L(s,\chi)$, $\chi \mathrm{mod} q$, *для которых* $T \leqslant |\gamma| \leqslant T+1$, *не превосходит* $c \ln qT$.
Доказательство см.[9].

Лемма 5. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $c = c(\epsilon)$ *такое, что если* χ*–действительный характер по модулю* q *и* β *–действительный нуль* $L(s,\chi)$, *то*

$$\beta \leqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}$$

Доказательство см. [9].

3 Доказательство теоремы

Легко показать, что

$$S_m(\alpha; x, k) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha(n+k)^m) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) e(\alpha(n+k)^m) + O(l^2) =$$

$$= \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) e\left(\left(\frac{a}{q} + \lambda\right)(n+k)^m\right) \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv n+k (modq)}}^{q} 1 + O(l^2) =$$

$$= \sum_{h=1}^{q} e\left(\frac{ah^m}{q}\right) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1, n \equiv h-k (modq)}} \Lambda(n) e\left(\lambda(n+k)^m\right) + O(l^2).$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, имеем:

$$S_m(\alpha;x,k)=\sum_{h=1}^{q} e\left(\frac{ah^m}{q}\right)\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e\left(\lambda(n+k)^m\right)\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi mod q}\overline{\chi}(h-k)\chi(n)+O(l^2)$$
$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi mod q}\sum_{h=1}^{q}\overline{\chi}(h-k)e\left(\frac{ah^m}{q}\right)\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda(n+k)^m)+O(l^2). \quad (3)$$

Если h пробегает полную систему вычетов по модулю q, то $h+k$ также пробегает полную систему вычетов по этому модулю. Поэтому

$$\sum_{h=1}^{q}\chi(h-k)e\left(\frac{ah^m}{q}\right)=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{a((h+k)^m)}{q}\right)=C(\chi,g,q).$$

Подставляя найденное соотношение в (3), найдем

$$S_m(\alpha;x,k)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi mod q}C(\overline{\chi},g,q)\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda(n+k)^m)+O(l^2). \quad (4)$$

Применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем:

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda(n+k)^m)=-\int_2^x\psi(u,\chi)de(\lambda(u+k)^m)+e(\lambda(x+k)^m)\psi(x,\chi).$$

Пользуясь леммой 1 о представлении $\psi(x,\chi)$ в виде суммы по нулям $L(s,\chi)$ при $T_0=(1+|\lambda|x^m)ql^2F^{-1}(q,x)$, найдем:

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda(n+k)^m)=-\int_2^x\left[E_0u-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{u^\rho}{\rho}+R_1(u;T_0,\chi)\right]de(\lambda(u+k)^m)+$$
$$+e(\lambda(x+k)^m)\left[E_0x-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{x^\rho}{\rho}+R_1(u;T_0,\chi)\right]=$$
$$=E_0\left[-\int_2^x ude(\lambda(u+k)^m)+xe(\lambda(x+k)^m)\right]+\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\left[\int_2^x\frac{u^\rho}{\rho}de(\lambda(u+k)^m)-\frac{x^\rho}{\rho}e(\lambda(x+k)^m)\right]-$$
$$-\int_2^x R_1(u;T_0,\chi)2\pi im\lambda(u+k)^{m-1}e(\lambda(u+k)^m)du+e(\lambda(x+k)^m)R_1(x;T_0,\chi)=$$
$$=E_0\left[-xe(\lambda(x+k)^m)+2e(\lambda(2+k)^m)+\int_2^x e(\lambda(u+k)^m)du+xe(\lambda(x+k)^m)\right]+$$
$$+\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\left[\frac{x^\rho}{\rho}e(\lambda(x+k)^m)-\frac{2^\rho}{\rho}e(\lambda(2+k)^m)-\int_2^x e(\lambda(u+k)^m)u^{\rho-1}du-\frac{x^\rho}{\rho}e(\lambda(x+k)^m)\right]+$$
$$+O\left(|\lambda|x^m|R_1(x;T_0,\chi)|\right)+O\left(|R_1(x;T_0,\chi)|\right)=$$
$$=E_0\int_2^x e(\lambda(u+k)^m)du-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\int_2^x e(\lambda(u+k)^m)u^{\rho-1}du+O\left((1+|\lambda|x^m)|R_1(x;T_0,\chi)|\right)+R_2,$$

$$R_2 = 2e(\lambda(2+k)^m) - \sum_{|\gamma|\leqslant T_0} \frac{2^\rho}{\rho} e(\lambda(2+k)^m) \ll 1 + \sum_{|\gamma|\leqslant T_0} \frac{1}{|\rho|} \ll$$
$$1 + \sum_{m\leqslant T_0} \frac{\ln m}{m} \ll \ln^2 T_0 \ll \frac{xF(q,x)}{q}.$$

Отсюда, пользуясь соотношением $R_1(x;T_0,\chi) \ll xl^2T_0^{-1}$, получим следующую формулу:

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\chi(n)e(\lambda(n+k)^m) = E_0 \int_2^x e(\lambda(u+k)^m)du - \\ - \sum_{|\gamma|\leqslant T_0} \int_2^x e(\lambda(u+k)^m)u^{\rho-1}du + O\left(\frac{xF(q,x)}{q}\right). \tag{5}$$

Подставляя найденное соотношение (5) в правую часть (4), получим:

$$S_m(\alpha;x,k) = \frac{C(\chi_0,g,q)}{\varphi(q)} \int_2^x e(\lambda(u+k)^m)du - W - E_1\Sigma_1 + \\ + O\left(\frac{xF(q,x)}{q} \max_{\chi mod q} |C(\chi,g,q)|\right), \tag{6}$$

$$W = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi\neq\chi_1} C(\overline{\chi},g,q) \sum_{|\gamma|\leqslant T_0} \int_2^x u^{\rho-1} e(\lambda(u+k)^m)du,$$
$$\Sigma_1 = \frac{1}{\varphi(q)} C(\chi_1,g,q) \int_2^x u^{\beta_1-1} e(\lambda(u+k)^m)du,$$

где $E_1 = 1$, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль β_1, $\beta_1 \geqslant 1 - c/\ln q$ и $E_1 = 0$ в противном случае.

Оценка Σ_1. Тривиально оценивая, имеем:

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{1}{\varphi(q)} |C(\chi_1,g,q)| \left| \int_2^x u^{\beta_1-1} e(\lambda(u+k)^m)du \right| \leqslant \frac{|C(\chi_1,g,q)|}{\varphi(q)} x^{\beta_1}. \tag{7}$$

Оценка W. Отрезок интегрирования $[2,x]$ в интеграле по u разобьем на не более чем $\ln x$ интервалов вида $[y,2y]$. Получим

$$W \leqslant l \max_{\chi\neq\chi_1} \frac{|C(\chi,g,q)|}{\varphi(q)} \sum_{\chi\neq\chi_1} \sum_{|\gamma|\leqslant T_0} |I(\rho)|, \tag{8}$$
$$I(\rho) = \int_y^{2y} u^{\beta-1} e\left(f(u)\right) du, \quad f(u) = \lambda(u+k)^m + \frac{1}{2\pi}\gamma \ln u, \quad 2 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2}.$$

Для интеграла $I(\rho)$ справедлива следующая тривиальная оценка

$$|I(\rho)| \leqslant \int_y^{2y} u^{\beta-1} du \leqslant y^{\beta}.$$

Интеграл $I(\rho)$ оценим также и при помощи леммы 2 полагая $M = y^{\beta-1}$, $m = \min f'(u)$. Имеем

$$|I(\rho)| \leqslant \frac{y^{\beta-1}}{\min|f'(u)|} \leqslant \frac{y^{\beta}}{\min|yf'(u)|}.$$

Полагая $F(u) = 2\pi\lambda mu(u+k)^{m-1}$, $F'(u) \geqslant 0$ и пользуясь соотношением

$$|yf'(u)| = \left|y\frac{\gamma + 2\pi\lambda mu(u+k)^{m-1}}{2\pi u}\right| = |\gamma + F(u)|\frac{y}{2\pi u} \geqslant \frac{1}{4\pi}|\gamma + F(u)|,$$

для найденной оценки для интеграла $I(\rho)$ с учетом тривиальной оценки находим:

$$|I(\rho)| \leqslant y^{\beta} \min\left(1, \frac{1}{\min|yf'(u)|}\right) \ll y^{\beta} \min\left(1, \frac{1}{\min|\gamma + F(u)|}\right), \tag{9}$$

Рассмотрим два возможных случая: $1.\lambda \geqslant 0$; $2.\lambda \leqslant 0$.

Случай 1.$\lambda \geqslant 0$. Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ с условием $|\gamma| \leqslant T_0$ разобьем на множества D_1, D_2 и D_3 следующим образом:

$$\begin{aligned}
&D_1 = \{\rho : -T_0 \leqslant \gamma < -F(2y) - 1\},\\
&D_2 = \{\rho : -F(2y) - 1 \leqslant \gamma \leqslant -F(y) + 1\}, \quad -F(2y) \leqslant -F(y),\\
&D_3 = \{\rho : -F(y) + 1 < \gamma \leqslant T_0\}.
\end{aligned}$$

Прибавляя ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяются множества D_1, D_2, D_3, слагаемое $F(u)$, $y \leq u \leqslant 2y$, получим

$$\begin{aligned}
&D_1 = \{\rho : \qquad -T_0 + F(u) \leqslant \gamma + F(u) < -F(2y) + F(u) - 1\},\\
&D_2 = \{\rho : -F(2y) + F(u) - 1 \leqslant \gamma + F(u) \leqslant F(u) - F(y) + 1\},\\
&D_3 = \{\rho : \ F(u) - F(y) + 1 < \gamma + F(u) \leqslant T_0 + F(u)\}.
\end{aligned}$$

В отрезке $y \leq u \leqslant 2y$ функция $F(u)$ монотонно возрастает, поэтому $-F(2y) + F(u) - 1 \leqslant -1$, $F(u) - F(y) + 1 \geqslant 1$. Следовательно, если ρ принадлежит D_1, D_2 или D_3, то соответственно, $\gamma + F(u) < -1$, $-1 \leqslant \gamma + F(u) \leqslant 1$ или $\gamma + F(u) > 1$. Поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + F(u)$ в отрезке $y \leqslant u \leqslant 2y$ справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}
\min_{y\leqslant u\leqslant 2y}|\gamma + F(u)| = -\max_{y\leqslant u\leqslant 2y}(\gamma + F(u)) = -\gamma - F(2y) \geqslant 1, &\quad \text{если} \quad \rho \in D_1,\\
-1 \leqslant \gamma + F(u) \leqslant 1, &\quad \text{если} \quad \rho \in D_2,\\
\min_{y\leqslant u\leqslant 2y}|\gamma + F(u)| = \min_{y\leqslant u\leqslant 2y}(\gamma + F(u)) = \gamma + F(y) \geqslant 1, &\quad \text{если} \quad \rho \in D_3.
\end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим через S_1, S_2 и S_3 соответственно суммы модулей интеграла $I(\rho)$по нулям принадлежащим множествам D_1, D_2 и D_3, т.е.

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T_0} |I(\rho)| = S_1 + S_2 + S_3. \tag{11}$$

Для S_1, S_2, и S_3 пользуясь оценкой (9) и имея в виду соотношения (10), находим

$$S_1 \ll \sum_{\rho\in D_1} \frac{y^\beta}{-\gamma - F(2y)}, \quad S_2 \ll \sum_{\rho\in D_2} y^\beta, \quad S_3 \ll \sum_{\rho\in D_3} \frac{y^\beta}{\gamma + F(y)}.$$

Каждую сумму оценим отдельно.

Оценка S_1. Пусть $H = 1 + |\lambda| y^m$. Все нули из множества

$$D_1 = \{\rho : -T_0 \leqslant \gamma < -F(2y) - 1\} = \{\rho : 1 < -\gamma - F(2y) \leqslant T_0 - F(2y)\},$$

разобьем на классы $A_0, A_1, \ldots, A_r$, $r \ll \ln T_0$ следующим образом: в класс A_n отнесем те нули ρ, для которых выполняется условия: $nH < -\gamma - F(2y) \leqslant (n+1)H$, если $1 \leqslant n \leqslant r$ и $1 < -\gamma - F(2y) \leqslant H$, если $n = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \sum_{n=0}^{r} \sum_{\rho\in A_n} \frac{y^\beta}{-\gamma - F(2y)} \leqslant \sum_{\rho\in A_0} y^\beta + \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in A_n} \frac{y^\beta}{nH} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\rho\in A_0} y^\beta + \frac{1}{H} \max_{1\leqslant n\leqslant r} \sum_{\rho\in A_n} y^\beta \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n} \ll \\ &\ll \left(1 + \frac{l}{H}\right) \max_{|T|\leqslant T_0} \sum_{T<\gamma\leqslant T+H} y^\beta \ll l \max_{|T|\leqslant T_0} \sum_{T<\gamma\leqslant T+H} y^\beta. \end{aligned}$$

Оценка S_2. Имеем:

$$\begin{aligned} D_2 &= \{\rho : -F(2y) - 1 \leqslant \gamma \leqslant -F(y) + 1\} = \\ &= \{\rho : T \leqslant \gamma \leqslant T + F(2y) - F(y) + 2\}, \quad T = -F(2y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(2y) - F(y) + 2 &= 2\pi\lambda m \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^{j} y^{m-j} k^j (2^{m-j} - 1) + 2 = \\ &= 2^m \pi\lambda m y^m \left(1 + O\left(y^{-1}\right)\right) + 2 \asymp 1 + \lambda y^m = H. \end{aligned}$$

Следовательно промежуток суммирования в S_2 имеет длину порядка H. Поэтому

$$S_2 \ll \sum_{\rho\in D_2} y^\beta \ll \max_{|T|\leqslant T_0} \sum_{T<\gamma\leqslant T+H} y^\beta.$$

Оценка S_3. Все нули из множества

$$D_3 = \{\rho : -F(y) + 1 < \gamma \leqslant T_0\} = \{\rho :\ 1 < \gamma + F(y) \leqslant T_0 + F(y)\}.$$

разобьем на классы $A_0, A_1, \ldots, A_r$, $r \ll \ln T_0$ следующим образом: в класс A_n отнесем те нули ρ, для которых выполняется условия: $nH < \gamma+F(y) \leqslant (n+1)H$, если $1 \leqslant n \leqslant r$ и $1 < \gamma + F(y) \leqslant H$, если $n = 0$. Поэтому

$$S_3 \ll \sum_{n=0}^{r}\sum_{\rho\in A_n}\frac{y^\beta}{\gamma+F(y)} \leqslant \sum_{\rho\in A_0} y^\beta + \sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in A_n}\frac{y^\beta}{nH} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\rho\in A_0} y^\beta + \frac{1}{H}\max_{1\leqslant n\leqslant r}\sum_{\rho\in A_n} y^\beta \sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n} \ll$$

$$\ll \left(1+\frac{l}{H}\right)\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T<\gamma\leqslant T+H} y^\beta \ll l\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T<\gamma\leqslant T+H} y^\beta.$$

Подставляя в (11) полученные оценки для S_1, S_2 и S_3, имеем:

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}|I(\rho)| \ll l\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T\leqslant\gamma\leqslant T+H} y^\beta. \qquad (12)$$

Случай 2.$\lambda \leqslant 0$. Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ с условием $|\gamma| \leqslant T_0$ разобьем на множества D_1, D_2 и D_3 следующим образом:

$$D_1 = \{\rho : -T_0 \leqslant \gamma < -F(y) - 1\},$$
$$D_2 = \{\rho : -F(y) - 1 \leqslant \gamma \leqslant -F(2y) + 1\},$$
$$D_3 = \{\rho : -F(2y) + 1 < \gamma \leqslant T_0\}.$$

Прибавляя ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяются множества D_1, D_2 и D_3, слагаемое $F(u)$, $y \leq u \leqslant 2y$, получим

$$D_1 = \{\rho : \quad -T_0 + F(u) \leqslant \gamma + F(u) < F(u) - F(y) - 1\},$$
$$D_2 = \{\rho : F(u) - F(y) - 1 \leqslant \gamma + F(u) \leqslant F(u) - F(2y) + 1\},$$
$$D_3 = \{\rho : F(u) - F(2y) + 1 < \gamma + F(u) \leqslant T_0 + F(u)\}.$$

Функция $F(u)$ на отрезке $y \leq u \leqslant 2y$ монотонно убывает, поэтому $F(u)-F(y)-1 \leqslant -1$, $F(u) - F(2y) + 1 \geqslant 1$. Следовательно, если ρ принадлежит D_1, D_2 или D_3, то соответственно $\gamma + F(u) < -1$, $-1 \leqslant \gamma + F(u) \leqslant 1$ или $\gamma + F(u) > 1$. Отсюда для монотонной возрастающей функции $\gamma+F(u)$ на отрезке $y \leqslant u \leqslant 2y$ справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}
\min_{y\leqslant u\leqslant 2y}|\gamma+F(u)| = -\max_{y\leqslant u\leqslant 2y}(\gamma+F(u)) = -\gamma - F(y) &\geqslant 1, \quad \text{если} \quad \rho\in D_1,\\
-1 \leqslant \gamma + F(u) &\leqslant 1, \quad \text{если} \quad \rho\in D_2, \qquad (13)\\
\min_{y\leqslant u\leqslant 2y}|\gamma+F(u)| = \min_{y\leqslant u\leqslant 2y}(\gamma+F(u)) = \gamma + F(2y) &\geqslant 1, \quad \text{если} \quad \rho\in D_3.
\end{aligned}$$

Обозначим через S_1, S_2 и S_3 соответственно суммы модулей интеграла $I(\rho)$ по нулям принадлежащим множествам D_1, D_2 и D_3, т.е.

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}|I(\rho)| = S_1 + S_2 + S_3.$$

Для S_1, S_2, и S_3 пользуясь оценкой (9) и имея в виду соотношения (13), находим

$$S_1 \ll \sum_{\rho\in D_1}\frac{y^\beta}{-\gamma-F(y)},\quad S_2 \ll \sum_{\rho\in D_2} y^\beta,\quad S_3 \ll \sum_{\rho\in D_3}\frac{y^\beta}{\gamma+F(2y)}.$$

Оценивая эти суммы аналогично как в случае $\lambda \geqslant 0$, получим оценку (12). Затем в этой оценке заменим y на x, в том числе и для выражения H (т.е. $H = 1+|\lambda|x^m$). Получим

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}|I(\rho)| \ll l\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T\leqslant\gamma\leqslant T+H} x^\beta,\quad -T_0\leqslant T\leqslant T_0-H.$$

Подставляя найденную оценку в формулу (8), найдем:

$$W \ll l^2\max_{\chi\neq\chi_1}\frac{|C(\chi,g,q)|}{\varphi(q)}\max_{|T|\leqslant T_0} W_1,\qquad W_1=\sum_{\chi\neq\chi_1}\sum_{T\leqslant\gamma\leqslant T+H} x^\beta. \tag{14}$$

Далее для оценки W_1 пользуемся плотностной теоремой в коротких прямоугольниках критической полосы для нулей L – рядов Дирихле по модулю q. Имеем

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{\chi\neq\chi_1}\sum_{T\leqslant\gamma\leqslant T+H}\left(\ln x\int_0^\beta x^u du+1\right)=\\ &=\sum_{\chi\neq\chi_1}\sum_{T\leqslant\gamma\leqslant T+H}\ln x\int_0^1 x^u f(u,\beta)du+\sum_{\chi\neq\chi_1}[N(T+H,\chi)-N(T,\chi)], \end{aligned}$$

где

$$f(u,\beta)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant u\leqslant\beta,\\ 0, & \text{если } \beta<u\leqslant 1.\end{cases}$$

Из определения $f(u,\beta)$ следует равенство

$$\sum_{T\leqslant\gamma\leqslant T+H} f(u,\beta)=N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W_1 &= \ln x\int_0^1 x^u\sum_{\chi\neq\chi_1}\left[N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi)\right]du+\\ &\quad+\sum_{\chi\neq\chi_1}\left[N(T+H,\chi)-N(T,\chi)\right]\ll\\ &\ll l\int_{0,5}^1 x^u\sum_{\chi\neq\chi_1}[N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi)]du+\\ &\quad+x^{1/2}\sum_{\chi\neq\chi_1}\left[N(T+H,\chi)-N(T,\chi)\right]. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3 $N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi)=0$, если $\chi\neq\chi_1$ и $u\geqslant 1-\delta(q,T_0)$, где

$$\delta(q,T_0)=\frac{c_1}{\max\{\ln q,\quad (\ln T_0\ln\ln T_0)^{3/4}\}}, \tag{15}$$

кроме того, согласно лемме 4 $N(T+H,\chi)-N(T,\chi)\ll H\ln qT_0$. Поэтому

$$W_1\ll l\int_{0,5}^{1-\delta(q,T_0)}x^u\sum_{\chi\neq\chi_1}[N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi)]du+x^{1/2}\varphi(q)H\ln qT_0.$$

Применяя к последней сумме соотношение (2), находим

$$\begin{aligned}W_1&\ll l\int_{0,5}^{1-\delta(q,T_0)}x^u(q(H+T^{1/3}))^{c(1-u)}l^Bdu+x^{1/2}\varphi(q)Hl\ll\\&\ll xl^{B+1}\int_{0,5}^{1-\delta(q,T_0)}\left(\frac{(q(H+T^{1/3}))^c}{x}\right)^{1-u}du+\frac{\varphi(q)H}{x^{1/2}}\ll\\&\ll xl^{B+1}\left(\left(\frac{(q(H+T^{1/3}))^c}{x}\right)^{\delta(q,T_0)}+\left(\frac{(q(H+T^{1/3}))^c}{x}\right)^{0,5}+\frac{qH}{x^{1/2}}\right)<\\&<xl^{B+1}\left(\left(\frac{q(H+T^{1/3})}{x^{1/c}}\right)^{c\delta(q,T_0)}+2\left(\frac{q(H+T^{1/3})}{x^{1/c}}\right)^{0,5c}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Пользуясь явным видом величин $T_0=q(1+|\lambda|x^m)l^2F^{-1}(q,x)$, $H=1+|\lambda|x^m$ и условиями

$$\tau\geqslant x^{m-\frac1c}\exp(\ln^{0,76}x),\quad q\leqslant x^{\frac{2}{3c}}\exp\left(-\ln^{0,76}x\right),$$

последовательно получим

$$\begin{aligned}qH+qT_0^{1/3}&=q+q|\lambda|x^m+q\left((q+q|\lambda|x^m)\,l^2F^{-1}(q,x)\right)^{1/3}\leqslant\\&\leqslant q+q|\lambda|x^m+q\left((q+q|\lambda|x^m)\,l^2\exp(\ln^4\ln x)\right)^{1/3}\leqslant\\&\leqslant q+x^m\tau^{-1}+q\left((q+x^m\tau^{-1})\,l^2\exp(\ln^4\ln x)\right)^{1/3}=\\&=q+x^m\tau^{-1}+q^{\frac43}\exp\left(\frac13\ln^4\ln x\right)l^{\frac23}+qx^{\frac m3}\tau^{-\frac13}\exp\left(\frac13\ln^4\ln x\right)l^{\frac23}\leqslant\\&\leqslant x^m\tau^{-1}+q^{\frac43}\exp\left(\frac13\ln^4\ln x\right)l^{\frac23}+qx^{\frac m3}\tau^{-\frac13}\exp\left(\frac13\ln^4\ln x\right)l^{\frac23}\leqslant\\&\leqslant x^m\left(x^{m-\frac1c}\exp(\ln^{0,76}x)\right)^{-1}+q^{\frac43}\exp\left(\frac13\ln^4\ln x\right)l^{\frac23}+\\&\quad+qx^{\frac m3}\left(x^{m-\frac1c}\exp(\ln^{0,76}x)\right)^{-\frac13}\exp\left(\frac13\ln^4\ln x\right)l^{\frac23}=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{\frac{1}{c}} \exp(-\ln^{0,76} x) + q^{\frac{4}{3}} \exp\left(\frac{1}{3}\ln^4 \ln x\right) l^{\frac{2}{3}} + \\
&+ q x^{\frac{1}{3c}} \exp\left(-\frac{1}{3}\ln^{0,76} x + \frac{1}{3}\ln^4 \ln x\right) l^{\frac{2}{3}} \leqslant \\
&\leqslant x^{\frac{1}{c}} \exp(-\ln^{0,76} x) + \left(x^{\frac{2}{3c}} \exp\left(-\ln^{0,76} x\right)\right)^{\frac{4}{3}} \exp\left(\frac{1}{3}\ln^4 \ln x\right) l^{\frac{2}{3}} + \\
&+ x^{\frac{2}{3c}} \exp\left(-\ln^{0,76} x\right) \cdot x^{\frac{1}{3c}} \exp\left(-\frac{1}{3}\ln^{0,76} x + \frac{1}{3}\ln^4 \ln x\right) l^{\frac{2}{3}} < \\
&< 2x^{\frac{1}{c}} \exp(-\ln^{0,76} x) + x^{\frac{8}{9c}} \exp\left(-\frac{4}{3}\ln^{0,76} x + \frac{1}{3}\ln^4 \ln x\right) l^{-\frac{2}{9}} < \\
&< 3x^{\frac{1}{c}} \exp(-\ln^{0,76} x).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\frac{q(H+T^{1/3})}{x^{1/c}} \ll \exp(-\ln^{0,76} x).$$

Отсюда имея в виду, что в (16) выполняется неравенство $c\delta(q,T_0) < 0,5$, получим

$$
\begin{aligned}
W_1 \ll x l^{B+1} \left(\frac{q(H+T^{1/3})}{x^{1/c}}\right)^{c\delta(q,T_0)} &\ll x l^{B+1} \left(\exp(-\ln^{0,76} x)\right)^{c\delta(q,T_0)} \ll \\
&\ll x l^{B+1} \exp(-c\delta(q,T_0)\ln^{0,76} x).
\end{aligned}
$$

Подставляя найденную оценку для W_1 в формулу (14), найдем:

$$W \ll x l^{B+3} \max_{\chi \neq \chi_1} \frac{|C(\chi,g,q)|}{\varphi(q)} \cdot \exp(-c\delta(q,T_0)\ln^{0,76} x), \tag{17}$$

Подставляя полученные оценки (7) и (17) в (6), находим:

$$
\begin{aligned}
S_2(\alpha; x, k) &= \frac{C(\chi_0,g,q)}{\varphi(q)} \int_2^x e(\lambda(u+k)^2)du + R(\alpha,x), \qquad (18)\\
R(\alpha,x) &\ll x R_1(\alpha,x) \max_{\chi mod q} \frac{|C(\chi,g,q)|}{\varphi(q)}, \\
R_1(\alpha,x) &= l^{B+3} \exp(-c\delta(q,T_0)\ln^{0,76} x) + x^{\beta_1 - 1} + F(q,x).
\end{aligned}
$$

Теперь оценим две последние слагаемые в $R(\alpha,x)$ в зависимости от порядка величины q. Рассмотрим два случая: а)$q \leqslant (\ln x)^b$; б)$q > (\ln x)^b$.

а) Случай $q \leqslant (\ln x)^b$. Согласно лемме 5 при $\varepsilon = 1/2b$ имеем:

$$x^{\beta - 1} \leqslant x^{-\frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}} \leqslant \exp\left(-\frac{(c(\varepsilon)\ln x}{(\ln x)^{b\varepsilon}}\right) = \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\ln x}) \ll \exp(-\ln^4 \ln x). \tag{19}$$

Имея в виду, что в этом случае $F(q,x) = \exp(-\ln^4 \ln x)$, оценим T_0 сверху

$$T_0 = (q + q|\lambda| x^m)\, l^2 F^{-1}(q,x) < \left(q + x^m \tau^{-1}\right) l^2 F^{-1}(q,x) \leqslant$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \left(l^b + x^m\tau^{-1}\right) l^2 \exp(\ln^4 \ln x) \leqslant\\ &\leqslant \left(l^b + x^{\frac{1}{c}} \exp(-\ln^{0,76} x)\right) \exp(\ln^4 \ln x + 2\ln\ln x) \leqslant\\ &\leqslant 2x^{1/c} \exp(-\ln^{0,76} x + \ln^4 \ln x + 2\ln\ln x) \ll x^{1/c} \exp(-\ln^{0,75} x) \ll x^{1/c}.\end{aligned}$$

Пользуясь этой оценкой, найдем

$$\begin{aligned}c\delta(q, T_0) = \frac{cc_1}{\max\{\ln q,\ (\ln T_0 \ln\ln T_0)^{3/4}\}} > \frac{cc_1}{\max\{\ln(\ln^b x),\ (\ln x^{1/c} \ln\ln x^{1/c})^{3/4}\}} >\\ > \frac{cc_1}{\max\left\{b\ln\ln x,\ (c^{-1}\ln x\ln\ln x)^{3/4}\right\}} = c_2\,(\ln x \ln\ln x)^{-0,75},\ c_2 = c_1 c^{7/4}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}l^{B+3}\exp(-c\delta(q,T_0)(\ln x)^{0,76}) \ll l^{B+3}\exp(-c_2\,(\ln x\ln\ln x)^{-0,75}\,(\ln x)^{0,76}) =\\ = l^{B+3}\exp(-c_2 \ln^{0,01} x \ln^{-0,75}\ln x) \ll \exp(-\ln^4 \ln x).\end{aligned}$$

Отсюда, а также из (19) в случае $q \leqslant (\ln x)^b$, получим

$$R_1(\alpha, x) \ll \exp(-(\ln\ln x)^4) = F(q, x). \tag{20}$$

в) Случай $q \geqslant (\ln x)^b$. В этом случае тривиально имеем:

$$R_1(\alpha, x) = l^{B+4}\exp(-c\delta(q, T_0)\ln^{0,76} x) + lx^{\beta_1 - 1} + F(q, x) \ll l^{B+4} = F(q, x).$$

Отсюда и из (20) следует, что

$$R(\alpha, x) \ll xF(q, x) \max_{\chi mod q} \frac{|C(\chi, g, q)|}{\varphi(q)},$$

Подставляя найденную оценку для $R(\alpha, x)$ в (18), получим утверждение теоремы.

Следствие 1 следует из теоремы 1 применением оценки для суммы $|C(\chi, g, q)|$, которая получена в работе [10]. Следствие 2 непосредственно вытекает из следствия 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Виноградов И.М. Избранные труды. М: изд-во АН СССР, 1952.

[2] Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976.

[3] Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха – Виноградова // Мат. сборник, 1946, т. 19, вып. 1, стр. 3 – 8.

[4] Chudakov N.G. On Goldbach-Vinogradof's theorem // Ann of Math.,1947, 48, p.515-545.

[5] Zhan Tao. The mean square value of Dirichlet L–functions // Chinese ADv. Math. 2(1989).

[6] Chudakov N.G. On the difference between two neighboring prime numbers // Mat. Sb., 1, 1936, 799 – 814.

[7] Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. Москва, Наука, 1971.

[8] Прахар К. Распределение простых чисел.—Москва, Мир, 1967.

[9] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. Москва, Наука, 1983, 2-ое изд.

[10] Todd Cochrane and Zhiyong Zheng. Pure and mixed exponential sums. Acta Arithmeyica XCI.3 (1999), p.249–278

Московский государственный университет им М.В. Ломоносова.
Поступило 5.07.2011