Yu. Yu. Bagderina, R. K. Gazizov, Approximately Invariant Solutions of Differential Equations with a Small Parameter,
Differ. Uravn., 2005, Volume 41, Number 3, 347–355

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 347–355

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ПРИБЛИЖЕННО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2005 г. **Ю. Ю. Багдерина, Р. К. Газизов**

Основные методы интегрирования дифференциальных уравнений с использованием допускаемой группы G_r преобразований базируются на теореме об инвариантном представлении уравнений (см., например, [1, 2]). Согласно этой теореме, исследуемые уравнения могут быть записаны в эквивалентной форме, определяемой инвариантными функциями группы G_r.

В настоящей работе аналогичное утверждение доказывается для приближенных групп преобразований, введенных в [3] (обзор литературы и ссылки см. в [4]). В качестве его приложения показано, что построение регулярных приближенно инвариантных решений дифференциальных уравнений с малым параметром сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Изложение проводится с первым порядком точности по малому параметру. Обобщение результатов на произвольный порядок точности, приводя к громоздким формулам, не изменяет их сути.

В работе используются обозначения из [3, 4]. В частности, приближенное равенство $f \approx g$ означает, что $f = g + o(\varepsilon)$.

1. Инварианты приближенных групп преобразований. Рассматривается приближенная группа $\widetilde{G}_r$ преобразований, порождаемая r операторами вида

$$X_{\alpha_0} \approx X_{\alpha_0,(0)} + \varepsilon X_{\alpha_0,(1)}, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0}, \quad X_{\alpha_1} \approx \varepsilon X_{\alpha_1,(0)}, \quad \alpha_1 = \overline{r_0+1, r}, \tag{1.1}$$

образующими базис приближенной алгебры Ли. Здесь $X_{\alpha,(q)} = \xi^i_{\alpha,(q)}(z)\partial_{z^i}$, $z \in \mathbb{R}^N$, $q = 0, 1$. Рассмотрим матрицу $\|\xi^i_{\alpha_0,(0)}(z)\|$, составленную из координат операторов $X_{1,(0)}, \ldots, X_{r_0,(0)}$. Будем считать, что ее ранг равен R_0 и базисный минор матрицы образуют первые R_0 строк. Тогда

$$X_{\beta,(0)} = \sum_{\gamma=1}^{R_0} \omega^\gamma_\beta(z) X_{\gamma,(0)}, \quad \beta = \overline{R_0+1, r_0}. \tag{1.2}$$

Инварианты $I(z,\varepsilon) \approx I_{(0)}(z) + \varepsilon I_{(1)}(z)$ группы $\widetilde{G}_r$ определяются как решения системы $X_\alpha I(z,\varepsilon) \approx 0$ приближенных уравнений, которая после расщепления по ε приводится к системе $\Omega_{(0)}$:

$$X_{\alpha,(0)} I_{(0)}(z) = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \tag{1.3}$$

однородных уравнений в частных производных первого порядка относительно функции $I_{(0)}(z)$ и к системе $\Omega_{(1)}$:

$$X_{\alpha_0,(0)} I_{(1)}(z) + X_{\alpha_0,(1)} I_{(0)}(z) = 0, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0}, \tag{1.4}$$

неоднородных уравнений относительно функции $I_{(1)}(z)$. В общем случае (см. [5]) из условия того, что операторы (1.1) образуют приближенную алгебру Ли, следует лишь условие полноты системы (1.4), а система (1.3) может оказаться не полной и система (1.4) не совместной. Выполнение условия совместности системы (1.4) достигается добавлением к системе $\Omega_{(0)}$ уравнений вида (1.3) относительно функции $I_{(0)}$ с операторами

$$X_{r+\beta-R_0,(0)} = X_{\beta,(1)} - \omega^\gamma_\beta(z) X_{\gamma,(1)}, \quad \beta = \overline{R_0+1, r_0}. \tag{1.5}$$

Пусть проверка полноты полученной системы $\Omega_{(0)}$ приводит к системе $\bar{\Omega}_{(0)}$, содержащей r_* уравнений, и ранг матрицы $\|\xi^i_{\alpha,(0)}(z)\|$, $\alpha = \overline{1,r_*}$, равен R. Тогда приближенная группа $\widetilde{G}_r$ имеет $N - R_0$ функционально независимых инвариантов, причем $N - R$ из них имеют "нулевой" порядок по ε:

$$I^{k_0}(z,\varepsilon) = I^{k_0}_{(0)}(z) + \varepsilon I^{k_0}_{(1)}(z) + o(\varepsilon), \quad k_0 = \overline{1, N-R},$$

а остальные – "первый" порядок по ε:

$$I^{k_1}(z,\varepsilon) = \varepsilon I^{k_1}_{(0)}(z) + o(\varepsilon), \quad k_1 = \overline{N-R+1, N-R_0}.$$

Здесь $I^{k_0}_{(0)}(z)$ – независимые частные решения системы $\bar{\Omega}_{(0)}$; $I^{k_0}_{(1)}(z)$ – частное решение системы (1.4) с $I_{(0)}(z) = I^{k_0}_{(0)}(z)$; $I^{k_1}_{(0)}(z)$ – независимые решения однородной системы, соответствующей системе $\Omega_{(1)}$, не являющиеся решениями системы $\bar{\Omega}_{(0)}$. В соответствии с теоремой об общем инварианте приближенной группы преобразований [5] любой инвариант группы $\widetilde{G}_r$ представим в виде $I(z,\varepsilon) = \varphi_{(0)}(I^1,\ldots,I^{N-R}) + \varepsilon\varphi_{(1)}(I^1_{(0)},\ldots,I^{N-R_0}_{(0)}) + o(\varepsilon)$ с некоторыми функциями $\varphi_{(0)}$, $\varphi_{(1)}$.

Далее будем рассматривать только такие группы $\widetilde{G}_r$, для которых $R < N$, т.е. имеется хотя бы один инвариант нулевого порядка.

2. Инвариантное представление уравнений с малым параметром.

Теорема 1. *Пусть приближенные (порядка $o(\varepsilon)$) уравнения*

$$F^\nu(z,\varepsilon) \equiv F^\nu_{(0)}(z) + \varepsilon F^\nu_{(1)}(z) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

инвариантны относительно r-параметрической приближенной группы $\widetilde{G}_r$ преобразований, порождаемой операторами (1.1), а соответствующие невозмущенные уравнения

$$F^\nu_{(0)}(z) = 0, \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{2.2}$$

определяют регулярно заданное многообразие, являющееся неособым для (точной) группы G_{r_0}, порождаемой операторами $X_{1,(0)},\ldots,X_{r_0,(0)}$, т.е. выполняются следующие условия:

$$\operatorname{rank}\|\partial F^\nu_{(0)}(z)/\partial z^i\|\,|_{(2.2)} = m, \quad \operatorname{rank}\|\xi^i_{\alpha_0,(0)}(z)\|\,|_{(2.2)} = R_0. \tag{2.3}$$

Тогда существует система уравнений

$$\Phi^\nu(I,\varepsilon) \equiv \Phi^\nu_{(0)}(I^1(z,\varepsilon),\ldots,I^{N-R}(z,\varepsilon)) + \varepsilon\Phi^\nu_{(1)}(I^1_{(0)}(z),\ldots,I^{N-R_0}_{(0)}(z)) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{2.4}$$

связывающая инварианты группы $\widetilde{G}_r$, множество решений которой (с точностью $o(\varepsilon)$) совпадает со множеством решений уравнений (2.1).

Доказательство. Условие приближенной инвариантности уравнений (2.1) относительно группы $\widetilde{G}_r$ можно записать в виде [6]

$$X_\alpha F^\nu(z,\varepsilon) \approx \lambda^\nu_{\alpha\sigma}(z,\varepsilon)F^\sigma(z,\varepsilon), \quad \nu = \overline{1,m}, \quad \alpha = \overline{1,r}, \tag{2.5}$$

с $\lambda^\nu_{\alpha\sigma}(z,\varepsilon) = \lambda^\nu_{\alpha\sigma,(0)}(z) + \varepsilon\lambda^\nu_{\alpha\sigma,(1)}(z) + o(\varepsilon)$, где $\lambda^\nu_{\alpha\sigma,(q)}(z)$, $q = 0,1$, – некоторые гладкие функции. Из первых r_0 уравнений системы (2.5), рассматриваемых в нулевом порядке по ε, и оставшихся $r - r_0$ уравнений следует инвариантность невозмущенных уравнений (2.2) относительно (точной) группы G_r, порождаемой операторами $X_{1,(0)},\ldots,X_{r,(0)}$. Тогда из теоремы об инвариантном представлении следует, что для системы (2.2) существует эквивалентная система, задаваемая инвариантными функциями группы G_r. Оказывается, условия приближенной инвариантности (2.5) накладывают дополнительные ограничения на вид соответствующих инвариантных функций. А именно в общем случае эквивалентная система задается инвариантными функциями не группы G_r, а более широкой группы G_ρ, для которой G_r является подгруппой.

Для анализа дополнительных условий на инварианты G_r рассмотрим вначале уравнения

$$X_{\alpha_0,(0)}F^\nu_{(0)}(z) = \lambda^\nu_{\alpha_0\sigma,(0)}(z)F^\sigma_{(0)}(z), \quad \nu = \overline{1,m}, \quad \alpha_0 = \overline{1,r_0}, \tag{2.6}$$

получаемые из системы (2.5) при $\varepsilon = 0$ и являющиеся условием инвариантности невозмущенных уравнений (2.2) относительно группы G_{r_0}. В часть уравнений (2.6), содержащую операторы $X_{R_0+1,(0)}, \ldots, X_{r_0,(0)}$, подставим их представление (1.2). Тогда эти уравнения с учетом остальных уравнений (2.6) переписываются в виде $(r_0 - R_0)\times m$ алгебраических уравнений

$$(\lambda^\nu_{\beta\sigma,(0)}(z) - \omega^\gamma_\beta(z)\lambda^\nu_{\gamma\sigma,(0)}(z))F^\sigma_{(0)}(z) = 0 \tag{2.7}$$

относительно функций $\lambda^\nu_{\beta\sigma,(0)}(z) - \omega^\gamma_\beta(z)\lambda^\nu_{\gamma\sigma,(0)}(z)$, $\nu = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{R_0+1, r_0}$.

Предположив, что базисный минор матрицы $\|\partial F^\nu_{(0)}(z)/\partial z^i\|$ расположен в первых m столбцах, и продифференцировав уравнение (2.7) при каждом выборе значений ν, β по переменным $z^1, \ldots, z^m$, получим

$$(\lambda^\nu_{\beta\sigma,(0)}(z) - \omega^\gamma_\beta(z)\lambda^\nu_{\gamma\sigma,(0)}(z))\frac{\partial F^\sigma_{(0)}}{\partial z^s} = -\frac{\partial}{\partial z^s}(\lambda^\nu_{\beta\sigma,(0)}(z) - \omega^\gamma_\beta(z)\lambda^\nu_{\gamma\sigma,(0)}(z))F^\sigma_{(0)}, \quad s = \overline{1,m}. \tag{2.8}$$

Поскольку $\lambda^\nu_{\beta\sigma,(0)}$ – гладкие функции, то правые части системы (2.8) ограничены в окрестности многообразия (2.2) и ее решение представимо в виде

$$\lambda^\nu_{\beta\sigma,(0)}(z) - \omega^\gamma_\beta(z)\lambda^\nu_{\gamma\sigma,(0)}(z) = L^\nu_{\beta\sigma\mu}(z)F^\mu_{(0)}(z) \tag{2.9}$$

с некоторыми гладкими функциями $L^\nu_{\beta\sigma\mu}(z)$.

В первом порядке по ε рассматриваемые r_0 уравнений системы (2.5) приводят к равенствам

$$X_{\alpha_0,(0)}F^\nu_{(1)}(z) + X_{\alpha_0,(1)}F^\nu_{(0)}(z) = \lambda^\nu_{\alpha_0\sigma,(0)}F^\sigma_{(1)}(z) + \lambda^\nu_{\alpha_0\sigma,(1)}F^\sigma_{(0)}(z), \tag{2.10}$$

$\nu = \overline{1,m}$, $\alpha_0 = \overline{1,r_0}$. Аналогично тому, как из (2.6) получены уравнения (2.7), из (2.10) получаем равенства

$$(X_{\beta,(1)} - \omega^\gamma_\beta(z)X_{\gamma,(1)})F^\nu_{(0)}(z) =$$
$$= (\lambda^\nu_{\beta\sigma,(1)}(z) - \omega^\gamma_\beta(z)\lambda^\nu_{\gamma\sigma,(1)}(z))F^\sigma_{(0)}(z) + (\lambda^\nu_{\beta\sigma,(0)}(z) - \omega^\gamma_\beta(z)\lambda^\nu_{\gamma\sigma,(0)}(z))F^\sigma_{(1)}(z),$$

$\nu = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{R_0+1, r_0}$. В силу (2.9) правые части этих равенств представляют собой линейные комбинации функций $F^\sigma_{(0)}(z)$ с некоторыми переменными коэффициентами и, значит, уравнения (2.2) инвариантны относительно операторов $X_{1,(0)}, \ldots, X_{r,(0)}$ и (1.5). Замыкание такого множества операторов относительно операции коммутирования приводит к алгебре Ли L_ρ такой, что инварианты соответствующей группы G_ρ находятся как решение системы $\bar{\Omega}_{(0)}$. Следовательно, группа G_ρ имеет $N-R$ функционально независимых инвариантов $I^{k_0}_{(0)}(z)$, $k_0 = \overline{1, N-R}$.

По теореме об инвариантном представлении [1] для невозмущенных уравнений (2.2) можно построить эквивалентную систему уравнений $\Phi^\nu_{(0)}(I^1_{(0)}(z), \ldots, I^{N-R}_{(0)}(z)) = 0$, $\nu = \overline{1,m}$ (при этом $N - R \geq m$), решение которой совпадает с решением уравнений (2.2). Поэтому существуют такие гладкие функции $\mu^\nu_\sigma(z)$, что правые части уравнений (2.2) представимы в виде (см., например, [7])

$$F^\nu_{(0)}(z) = \mu^\nu_\sigma(z)\Phi^\sigma_{(0)}(I^1_{(0)}(z), \ldots, I^{N-R}_{(0)}(z)), \quad \nu = \overline{1,m}.$$

Пусть инварианты $I^1_{(0)}(z),\ldots,I^{N-R}_{(0)}(z)$ выбраны так, что

$$\partial(\Phi^1_{(0)},\ldots,\Phi^m_{(0)})/\partial(I^1_{(0)},\ldots,I^m_{(0)})\neq 0.$$

Вместо переменных $z^1,\ldots,z^N$ введем новые переменные $y^1,\ldots,y^N$, определяемые равенствами

$$y^\sigma\approx\Phi^\sigma_{(0)}(I^1(z,\varepsilon),\ldots,I^{N-R}(z,\varepsilon)),\quad \sigma=\overline{1,m},$$

$$y^j\approx I^j(z,\varepsilon),\quad j=\overline{m+1,N-R},\quad y^k\approx I^k_{(0)}(z),\quad k=\overline{N-R+1,N-R_0},$$

$$y^{N-R_0+1}\approx H^1(z,\varepsilon),\ \ldots,\ y^N\approx H^{R_0}(z,\varepsilon),$$

где функции $H^1(z,\varepsilon),\ldots,H^{R_0}(z,\varepsilon)$ выбираются так, что выполняется условие

$$\partial(y^1,\ldots,y^N)/\partial(z^1,\ldots,z^N)|_{\varepsilon=0}\neq 0$$

невырожденности замены переменных.

В новых переменных уравнения (2.1) и операторы (1.1) принимают соответственно вид

$$\tilde F^\nu(y,\varepsilon)\equiv\tilde\mu^\nu_\sigma(y)y^\sigma+\varepsilon\psi^\nu(y)=o(\varepsilon),\quad \nu=\overline{1,m},\tag{2.11}$$

с некоторыми функциями $\psi^\nu(y)$ и

$$\begin{gathered}\tilde X_{\alpha_0}\approx\varepsilon\tilde\xi^{N-R+1}_{\alpha_0,(1)}(y)\partial_{y^{N-R+1}}+\ldots+\varepsilon\tilde\xi^{N-R_0}_{\alpha_0,(1)}(y)\partial_{y^{N-R_0}}+\\ +\tilde\xi^{N-R_0+1}_{\alpha_0}(y,\varepsilon)\partial_{y^{N-R_0+1}}+\ldots+\tilde\xi^N_{\alpha_0}(y,\varepsilon)\partial_{y^N},\quad \alpha_0=\overline{1,r_0},\\ \tilde X_{\alpha_1}\approx\varepsilon\tilde\xi^{N-R+1}_{\alpha_1,(0)}(y)\partial_{y^{N-R+1}}+\ldots+\varepsilon\tilde\xi^N_{\alpha_1,(0)}(y)\partial_{y^N},\quad \alpha_1=\overline{r_0+1,r}.\end{gathered}\tag{2.12}$$

Равенства

$$y^1=0,\ \ldots,\ y^m=0\tag{2.13}$$

определяют решение невозмущенных уравнений $\tilde F^\nu_{(0)}(y)=0$, $\nu=\overline{1,m}$, соответствующих (2.11). Введем обозначение $\bar y=(0,\ldots,0,y^{m+1},\ldots,y^N)$. Тогда условия (2.3) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\Delta=\det\|\tilde\mu^\nu_\sigma(\bar y)\|\neq 0,\quad \operatorname{rank}\|\xi^i_{\alpha_0,(0)}(\bar y)\|=R_0,\quad i=\overline{N-R_0+1,N}.\tag{2.14}$$

С учетом (2.13) решение уравнений (2.11) можно искать в виде $y^\nu\approx\varepsilon h^\nu(\bar y)$, где функции $h^\nu(\bar y)$ находятся из системы линейных уравнений

$$\tilde\mu^\nu_\sigma(\bar y)h^\sigma(\bar y)+\psi^\nu(\bar y)=0,\quad \nu=\overline{1,m}.$$

В силу первого условия (2.14) имеем $h^\nu(\bar y)=-\Delta^\nu/\Delta$, где определитель Δ^ν получается из Δ заменой ν-го столбца столбцом $(\psi^1(\bar y),\ldots,\psi^m(\bar y))^{\mathrm T}$. Таким образом, получаем решение уравнений (2.11) в виде

$$y^1\approx-\varepsilon\,\Delta^1/\Delta,\ \ldots,\ y^m\approx-\varepsilon\,\Delta^m/\Delta.\tag{2.15}$$

Из условия инвариантности уравнений (2.11) относительно операторов (2.12) получаем равенства

$$\begin{gathered}\varepsilon\tilde\xi^{N-R+1}_{\alpha_0,(1)}(y)y^\sigma\frac{\partial\tilde\mu^\nu_\sigma(y)}{\partial y^{N-R+1}}+\ldots+\varepsilon\tilde\xi^{N-R_0}_{\alpha_0,(1)}(y)y^\sigma\frac{\partial\tilde\mu^\nu_\sigma(y)}{\partial y^{N-R_0}}+\\ +\tilde\xi^{N-R_0+1}_{\alpha_0}(y,\varepsilon)\left(y^\sigma\frac{\partial\tilde\mu^\nu_\sigma(y)}{\partial y^{N-R_0+1}}+\varepsilon\frac{\partial\psi^\nu(y)}{\partial y^{N-R_0+1}}\right)+\ldots+\tilde\xi^N_{\alpha_0}(y,\varepsilon)\left(y^\sigma\frac{\partial\tilde\mu^\nu_\sigma(y)}{\partial y^N}+\varepsilon\frac{\partial\psi^\nu(y)}{\partial y^N}\right)\Bigg|_{(2.15)}=o(\varepsilon),\end{gathered}$$

которые с учетом точности рассмотрения принимают вид

$$\tilde{\xi}^{N-R_0+1}_{\alpha_0,(0)}(\bar{y})\left(\frac{\partial\psi^\nu(\bar{y})}{\partial y^{N-R_0+1}}-\frac{\Delta^\sigma}{\Delta}\frac{\partial\tilde{\mu}^\nu_\sigma(\bar{y})}{\partial y^{N-R_0+1}}\right)+\ldots+\tilde{\xi}^{N}_{\alpha_0,(0)}(\bar{y})\left(\frac{\partial\psi^\nu(\bar{y})}{\partial y^{N}}-\frac{\Delta^\sigma}{\Delta}\frac{\partial\tilde{\mu}^\nu_\sigma(\bar{y})}{\partial y^{N}}\right)=0, \quad \alpha_0=\overline{1,r_0},$$

$\nu=\overline{1,m}$. Для каждого ν эта система линейных однородных уравнений в силу второго условия (2.14) дает

$$\frac{\partial\psi^\nu(\bar{y})}{\partial y^i}-\frac{\Delta^\sigma}{\Delta}\frac{\partial\tilde{\mu}^\nu_\sigma(\bar{y})}{\partial y^i}=0, \quad \nu=\overline{1,m}, \quad i=\overline{N-R_0+1,N},$$

откуда алгебраическими преобразованиями получается эквивалентная система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\Delta^\sigma}{\Delta}(\bar{y})\right)=0, \quad \sigma=\overline{1,m}, \quad i=\overline{N-R_0+1,N},$$

с очевидным решением $\Delta^\nu/\Delta(\bar{y})=\Phi^\nu_{(1)}(y^{m+1},\ldots,y^{N-R_0})$, $\nu=1,m$. Возвращаясь к переменным z в решении $y^\nu+\varepsilon\Delta^\nu/\Delta\approx 0$, $\nu=\overline{1,m}$, системы (2.11), получаем уравнения (2.4), решение которых совпадает с решением уравнений (2.1). Теорема доказана.

3. Редукция приближенных уравнений относительно r-параметрической группы преобразований. Доказанная теорема 1 используется здесь для обоснования метода построения приближенно инвариантных решений дифференциальных уравнений с малым параметром. Показывается, что при этом происходит редукция размерности пространства независимых переменных задачи. Для простоты ограничимся рассмотрением системы приближенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$F^\nu(x,u,p,\varepsilon)\equiv F^\nu_{(0)}(x,u,p)+\varepsilon F^\nu_{(1)}(x,u,p)=o(\varepsilon), \quad \nu=\overline{1,m}. \tag{3.1}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$; $u\in\mathbb{R}^m$; $p^\sigma_i=\partial u^\sigma/\partial x^i$; $N=n+m$. Будем говорить, что приближенные функции

$$u^\sigma=\varphi^\sigma_{(0)}(x)+\varepsilon\varphi^\sigma_{(1)}(x)+o(\varepsilon), \quad \sigma=\overline{1,m}, \tag{3.2}$$

определяют решение системы (3.1), если после их подстановки в систему с точностью $o(\varepsilon)$ получаются тождества.

Пусть система (3.1) допускает r-параметрическую приближенную группу $\widetilde{G}_r$ преобразований, порождаемую операторами

$$X_{\alpha_0}\approx(\xi^i_{\alpha_0,(0)}(x,u)+\varepsilon\xi^i_{\alpha_0,(1)}(x,u))\partial_{x^i}+(\eta^\sigma_{\alpha_0,(0)}(x,u)+\varepsilon\eta^\sigma_{\alpha_0,(1)}(x,u))\partial_{u^\sigma},$$

$$X_{\alpha_1}\approx\varepsilon\xi^i_{\alpha_1,(0)}(x,u)\partial_{x^i}+\varepsilon\eta^\sigma_{\alpha_1,(0)}(x,u)\partial_{u^\sigma}, \quad \alpha_0=\overline{1,r_0}, \quad \alpha_1=\overline{r_0+1,r},$$

образующими базис приближенной алгебры Ли, причем $\operatorname{rank}\|\xi^i_{\alpha_0,(0)}\ \eta^\sigma_{\alpha_0,(0)}\|=R_0$. Тогда группа $\widetilde{G}_r$ имеет $N-R_0$ функционально независимых инвариантов вида

$$\begin{aligned} I^{k_0}(x,u,\varepsilon)&=I^{k_0}_{(0)}(x,u)+\varepsilon I^{k_0}_{(1)}(x,u)+o(\varepsilon), \quad k_0=\overline{1,N-R},\\ I^{k_1}(x,u,\varepsilon)&=\varepsilon I^{k_1}_{(0)}(x,u)+o(\varepsilon), \quad k_1=\overline{N-R+1,N-R_0}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Будем считать, что равенства $u^\sigma=\varphi^\sigma_{(0)}(x)$, $\sigma=\overline{1,m}$, и $F^\nu_{(0)}(x,u,p)=0$, $\nu=\overline{1,m}$, определяют неособые многообразия точной группы G_{r_0} и ее первого продолжения соответственно. Тогда в силу теоремы 1 для решения (3.2) существует эквивалентное инвариантное представление

$$\Phi^\nu(I,\varepsilon)\equiv\Phi^\nu_{(0)}(I^1(x,u,\varepsilon),\ldots,I^{N-R}(x,u,\varepsilon))+\varepsilon\Phi^\nu_{(1)}(I^1_{(0)}(x,u),\ldots,I^{N-R_0}_{(0)}(x,u))=o(\varepsilon), \tag{3.4}$$

$\nu = \overline{1,m}$, где $\operatorname{rank}\|\partial\Phi^\nu_{(0)}/\partial I^{k_0}_{(0)}\| = m$. Из этой системы должны также определяться u^σ как функции от $x^1,\ldots,x^n$, поэтому $\operatorname{rank}\|\partial\Phi^\nu_{(0)}/\partial u^\sigma\| = m$. Так как $\|\partial\Phi^\nu_{(0)}/\partial u^\sigma\| = \|\partial\Phi^\nu_{(0)}/\partial I^{k_0}_{(0)}\|\times$ $\times\|\partial I^{k_0}_{(0)}/\partial u^\sigma\|$ и $\|\partial I^{k_0}_{(0)}/\partial u^\sigma\|$ – матрица размера $(N-R)\times m$, то по свойству ранга произведения матриц для существования инвариантного решения необходимо выполнение условия

$$\operatorname{rank}\|\partial I^{k_0}_{(0)}/\partial u^\sigma\| = m. \tag{3.5}$$

Следующая теорема дает алгоритм построения приближенно инвариантных решений. Мы говорим, что решение (3.2) называется приближенно инвариантным относительно группы $\widetilde{G}_r$, если уравнения (3.2) приближенно инвариантны относительно этой группы [4].

Теорема 2. *Пусть система (3.1) инвариантна относительно r-параметрической приближенной группы $\widetilde{G}_r$ преобразований, для инвариантов (3.3) которой выполнено условие (3.5). Тогда существует система вида*

$$\Omega^\nu(I,\Phi,\partial\Phi/\partial I,\varepsilon) \equiv \Omega^\nu_{(0)}(I^{k_0},\Phi^\sigma,\partial\Phi^\sigma/\partial I^{k_0}) +$$

$$+\,\varepsilon\Omega^\nu_{(1)}(I^k_{(0)},\Phi^\sigma_{(0)},\partial\Phi^\sigma_{(0)}/\partial I^{k_0},\partial\Phi^\sigma_{(1)}/\partial I^{k_1}_{(0)}) = o(\varepsilon), \quad \nu=\overline{1,m}, \tag{3.6}$$

связывающая инварианты $I^k(x,u,\varepsilon)$, $k=\overline{1,N-R_0}$, функции инвариантов $\Phi^\sigma(I,\varepsilon)$ и их производные по I (индекс k при переменной I означает зависимость от всех инвариантов (3.3), индекс k_0 указывает на инварианты нулевого, а k_1 – первого порядка). При этом если какое-либо ее решение (3.4) удовлетворяет условию $\operatorname{rank}\|\partial\Phi^\nu_{(0)}/\partial u^\sigma\| = m$, то функции (3.2), получаемые решением (3.4) относительно u, являются решением системы (3.1), инвариантным относительно группы $\widetilde{G}_r$.

Доказательство этого утверждения в основном повторяет доказательство аналогичной теоремы для точных групп преобразований [1]. Поэтому мы приводим здесь лишь его схему и указываем на некоторые особенности, связанные с введением малого параметра.

Первое продолжение группы $\widetilde{G}_r$, действующее в пространстве $\widetilde{N} = n+m+nm$ переменных x^i, u^σ, p^σ_i, имеет $\widetilde{N}-R_0$ функционально независимых дифференциальных инвариантов $\tilde{I}^k(x,u,p,\varepsilon)$, включая, в частности, инварианты $I^1(x,u,\varepsilon),\ldots,I^{N-R_0}(x,u,\varepsilon)$ самой группы $\widetilde{G}_r$.

Уравнения (3.1) инвариантны относительно действия продолженной группы $\widetilde{G}_r$. По теореме 1 существует эквивалентная (3.1) система вида

$$\Psi^\nu(I^1(x,u,\varepsilon),\ldots,\tilde{I}^{\tilde{N}-R_0}(x,u,p,\varepsilon),\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \nu=\overline{1,m}, \tag{3.7}$$

связывающая дифференциальные инварианты первого порядка группы $\widetilde{G}_r$. Решение уравнений (3.1) ищется в виде равенств (3.4) с неопределенными функциями Φ^ν инвариантов (3.3). Продифференцируем эти равенства по всем переменным $x^1,\ldots,x^n$. Если $\operatorname{rank}\|\partial\Phi^\nu_{(0)}/\partial u^\sigma\| =$ $= m$, то систему уравнений

$$D_i\Phi^\nu \approx \sum_{k_0=1}^{N-R}\frac{\partial\Phi^\nu}{\partial I^{k_0}}\left(\frac{\partial I^{k_0}}{\partial x^i} + p^\sigma_i\frac{\partial I^{k_0}}{\partial u^\sigma}\right) + \varepsilon\sum_{k_1=N-R+1}^{N-R_0}\frac{\partial\Phi^\nu_{(1)}}{\partial I^{k_1}_{(0)}}\left(\frac{\partial I^{k_1}_{(0)}}{\partial x^i} + p^\sigma_i\frac{\partial I^{k_1}_{(0)}}{\partial u^\sigma}\right) = o(\varepsilon),$$

$i=\overline{1,n}$, $\nu=\overline{1,m}$, можно разрешить относительно всех производных p^σ_i. Как и в работе [1], можно показать, что подстановка найденных таким образом p^σ_i в дифференциальный инвариант группы $\widetilde{G}_r$ превращает его в некоторый инвариант группы $\widetilde{G}_r$. Так как система $D_i\Phi^\nu \approx 0$ содержит частные производные Φ^ν по I, то подстановка p^σ_i в уравнения (3.7) превращает их в систему вида (3.6), связывающую инварианты $I^1,\ldots,I^{N-R_0}$, функции инвариантов $\Phi^\nu(I,\varepsilon)$ и их производные. Кроме того, из способа построения p^σ_i ясно, что производные $\partial\Phi^\sigma_{(1)}/\partial I^{k_1}_{(0)}$

войдут и притом линейно только в функции $\Omega^\nu_{(1)}$. При этом уравнения (3.1) представимы в виде

$$F^\nu(x,u,p,\varepsilon) \approx \mu^\nu_\sigma(x,u,p,\varepsilon)\Omega^\sigma(I,\Phi,\partial\Phi/\partial I,\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \nu=\overline{1,m},$$

с некоторыми гладкими функциями μ^ν_σ.

Теперь уравнение (3.6) может быть использовано для построения приближенно инвариантного решения (3.4). Для этого аргументы функций Ω^ν в соответствии с (3.3), (3.4) представляются в виде рядов по ε

$$I^{k_0} = I^{k_0}_{(0)} + \varepsilon I^{k_0}_{(1)} + o(\varepsilon), \quad k_0=\overline{1,N-R}, \quad I^{k_1} = \varepsilon I^{k_1}_{(0)} + o(\varepsilon), \quad k_1 = \overline{N-R+1,N-R_0},$$

$$\Phi^\sigma(I,\varepsilon) = \Phi^\sigma_{(0)}(I^1_{(0)},\ldots,I^{N-R}_{(0)}) + \varepsilon\sum_{k_0=1}^{N-R} I^{k_0}_{(1)}\frac{\partial\Phi^\sigma_{(0)}}{\partial I^{k_0}_{(0)}} + \varepsilon\Phi^\sigma_{(1)}(I^1_{(0)},\ldots,I^{N-R_0}_{(0)}) + o(\varepsilon).$$

Разложив функции Ω^ν в ряд по ε и приравняв коэффициенты при нулевой и первой степенях малого параметра, получим уравнения

$$\Omega^\nu_{(0)}(I^1_{(0)},\ldots,I^{N-R}_{(0)},\Phi^\sigma_{(0)}(I_{(0)}),\partial\Phi^\sigma_{(0)}/\partial I^{k_0}_{(0)}) = 0, \quad \nu=\overline{1,m}, \tag{3.8}$$

относительно функций $\Phi^\sigma_{(0)}$ и систему линейных относительно $\Phi^\sigma_{(1)}$ уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left(\Phi^\sigma_{(1)}\frac{\partial\Omega^\nu_{(0)}}{\partial\Phi^\sigma_{(0)}} + \sum_{k_0=1}^{N-R}\frac{\partial\Phi^\sigma_{(1)}}{\partial I^{k_0}_{(0)}}\frac{\partial\Omega^\nu_{(0)}}{\partial P^\sigma_{k_0}}\right) +$$

$$+\Omega^\nu_{(1)}(I^1_{(0)},\ldots,I^{N-R_0}_{(0)},\Phi^\sigma_{(0)}(I_{(0)}),\partial\Phi^\sigma_{(0)}/\partial I^{k_0}_{(0)},\partial\Phi^\sigma_{(1)}/\partial I^{k_1}_{(0)}) = 0, \quad \nu=\overline{1,m}, \tag{3.9}$$

где $P^\sigma_{k_0} = \partial\Phi^\sigma_{(0)}/\partial I^{k_0}_{(0)}$.

Системы уравнений (3.8), (3.9) являются системами m уравнений относительно m искомых функций от $n+m-R$ и $n+m-R_0$ переменных соответственно ($R_0 \le R$). Они принимают более простой вид, если функции Φ^ν в (3.4) записать в виде, разрешенном относительно m функций I^{k_0}. В этом случае искомые функции в системе (3.8) будут зависеть только от $n-R$ независимых переменных, а в системе (3.9) – от $n-R_0$ независимых переменных, т.е. происходит редукция числа независимых переменных.

4. Примеры приближенно инвариантных решений. Примеры построения решений уравнений с двумя независимыми переменными, инвариантных относительно однопараметрической приближенной группы преобразований, приведены в работе [4]. Здесь будем рассматривать уравнение с тремя независимыми переменными и будем строить решения, инвариантные относительно двухпараметрической приближенной группы.

4.1. Рассмотрим нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t \approx (e^u)_{xx} + (e^u)_{yy} + \varepsilon e^u(u_x+u_y), \tag{4.1}$$

допускающее операторы

$$X_1 \approx t\partial_t - \partial_u, \quad X_2 \approx \left(y + \frac{\varepsilon}{8}(x^2-y^2-2xy)\right)\partial_x + \left(-x + \frac{\varepsilon}{8}(x^2-y^2+2xy)\right)\partial_y + \frac{\varepsilon}{2}(x-y)\partial_u,$$

которые порождают двумерную приближенную алгебру Ли. Используя инварианты

$$I^1 \approx (x^2+y^2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}(x+y)\right), \quad I^2 \approx u + \ln t + \frac{\varepsilon}{2}(x+y)$$

соответствующей группы преобразований, будем искать решение уравнения (4.1) в виде $I^2_{(0)} + \varepsilon I^2_{(1)} \approx \Phi_{(0)}(I^1_{(0)} + \varepsilon I^1_{(1)}) + \varepsilon\Phi_{(1)}(I^1_{(0)})$, откуда с точностью $o(\varepsilon)$ имеем

$$u \approx -\ln t + \Phi_{(0)}(z) + \varepsilon\biggl(-\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4}(x+y)z\Phi'_{(0)}(z) + \Phi_{(1)}(z)\biggr),$$

$z = I^1_{(0)} = x^2 + y^2$. Здесь $R = R_0 = 2$ и, значит, относительно функций $\Phi_{(0)}(z)$ и $\Phi_{(1)}(z)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$4(z(e^{\Phi_{(0)}})')' + 1 = 0, \quad (z(e^{\Phi_{(0)}}\Phi_{(1)})')' = 0,$$

решение которых имеет вид

$$\Phi_{(0)} = \ln\biggl(C_1\ln z + C_2 - \frac{z}{4}\biggr), \quad \Phi_{(1)} = (C_3\ln z + C_4)\bigg/\biggl(C_1\ln z + C_2 - \frac{z}{4}\biggr),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ – постоянные интегрирования. Следовательно, решением уравнения (4.1) является функция

$$u \approx \ln\biggl(C_1\ln(x^2+y^2) + C_2 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)\biggr) - \ln t - \frac{\varepsilon}{2}(x+y) +$$

$$+\varepsilon\biggl(C_3\ln(x^2+y^2) + C_4 + \frac{1}{4}(x+y)\biggl(C_1 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)\biggr)\biggr)\bigg/\biggl(C_1\ln(x^2+y^2) + C_2 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)\biggr).$$

4.2. Нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t \approx (e^u)_{xx} + (e^u)_{yy} + \varepsilon e^u u(u_x + u_y) \tag{4.2}$$

допускает операторы

$$X_1 \approx \varepsilon(y\partial_x - x\partial_y), \quad X_2 \approx t\partial_t + \frac{\varepsilon}{8}(x^2+2xy-y^2)\partial_x + \frac{\varepsilon}{8}(y^2+2xy-x^2)\partial_y + \biggl(\frac{\varepsilon}{2}(x+y) - 1\biggr)\partial_u.$$

Выбирая в качестве инвариантов соответствующей приближенной группы преобразований приближенные функции

$$I^1 \approx u + \ln t\biggl(1 - \frac{\varepsilon}{2}(x+y)\biggr), \quad I^2 \approx \sqrt{x^2+y^2}\biggl(1 - \frac{\varepsilon}{8}(x+y)\ln t\biggr), \quad I^3 \approx \varepsilon\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},$$

получаем следующий вид:

$$u \approx -\ln t + \Phi_{(0)}(r) + \varepsilon\biggl(\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{8}(x+y)r\ln t\Phi'_{(0)}(r) + \Phi_{(1)}(r,\theta)\biggr)$$

приближенно инвариантного решения уравнения (4.2), где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$. Здесь $R_0 = 1$, $R = 2$ и, значит, относительно функции $\Phi_{(0)}(r)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$1 + e^{\Phi_{(0)}}\biggl(\frac{1}{r}\Phi'_{(0)} + \Phi''_{(0)} + \Phi'^2_{(0)}\biggr) = 0$$

с решением $\Phi_{(0)} = \ln(C_1\ln r + C_2 - r^2/4)$ и относительно функции $\Phi_{(1)}(r,\theta)$ – линейное уравнение

$$e^{\Phi_{(0)}}\biggl(\Phi_{(1)rr} + \frac{1}{r^2}\Phi_{(1)\theta\theta} + \frac{1}{r}\Phi_{(1)r} + 2\Phi'_{(0)}\Phi_{(1)r} + (\sin\theta + \cos\theta)\Phi_{(0)}\Phi'_{(0)}\biggr) -$$

$$-\Phi_{(1)} - \frac{r}{2}(\sin\theta + \cos\theta) + \frac{r^2}{8}(\sin\theta + \cos\theta)\Phi'_{(0)} = 0$$

в частных производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция" (проект У0011.735) и Международного фонда INTAS (проект 03-51-4286).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962.
2. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations, Applied Mathematical Sciences. V. 81. Berlin, 1989.
3. *Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* // Мат. сб. 1988. Т. 136. № 4. С. 435–450.
4. *Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H.* // Chapter 2 in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods / Ed. Ibragimov N.H. Boca Raton, Florida, 1996. P. 31–67.
5. *Gazizov R.K.* // J. Math. Anal. and Appl. 1997. V. 213. P. 202–228.
6. *Газизов Р.К.* // Межвуз. науч. сб. "Акт. проблемы математики. Мат. методы в естествознании". Уфа, 1999. С. 66–75.
7. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН,
Уфимский государственный авиационный
технический университет

Поступила в редакцию
21.03.2002 г.