D. M. Polyakov, Spectral analysis of a fourth order differential operator with periodic and antiperiodic boundary conditions, *Algebra i Analiz*, 2015, Volume 27, Issue 5, 117–152

https://www.mathnet.ru/eng/aa1457

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №5

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© Д. М. ПОЛЯКОВ

В статье методом подобных операторов изучаются спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями. Получена асимптотика спектра и оценки спектральных разложений рассматриваемого оператора. Также построена полугруппа операторов, генератором которой является взятый со знаком минус исследуемый дифференциальный оператор.

§1. Введение

Пусть $\mathrm{L}_2[0,1]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,1]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением $(x,y) = \int\limits_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}\,\mathrm{d}\tau, x,y \in \mathrm{L}_2[0,1]$. Через $W_2^4[0,1]$ обозначим пространство Соболева $\{y \in \mathrm{L}_2[0,1] \to \mathbb{C} : y$ имеет три непрерывные производные, y''' абсолютно непрерывна и $y^{IV} \in \mathrm{L}_2[0,1]\}$.

В работе будем рассматривать оператор $L_{bc} : \mathrm{D}(L_{bc}) \subset \mathrm{L}_2[0,1] \to \mathrm{L}_2[0,1]$, который определяется следующим дифференциальным выражением:

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \text{ где } a,b \in \mathrm{L}_2[0,1].$$

Область определения $\mathrm{D}(L_{bc})$ задается одним из краевых условий bc:

(a) периодические $bc = per : y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1)$, $j = 0,1,2,3$;

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор четвертого порядка, асимптотика спектра, равносходимость спектральных разложений, метод подобных операторов.

Работа поддержана РФФИ (проекты 14-01-31196, 15-31-20241), а также грантом РНФ (проект 14-21-00066), выполняемым в Воронежском государственном университете (раздел 4).

(b) антипериодические $bc = ap : y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(1)$, $j = 0, 1, 2, 3$. А именно полагается $\mathrm{D}(L_{bc}) = \{y \in W_2^4[0,1] : y$ удовлетворяет условию $bc\}$. Соответствующие операторы будем обозначать через L_{per}, L_{ap}.

Если $a = b = 0$, то будет использоваться запись $\mathcal{L}_{bc}^0$ или $\mathcal{L}_{per}^0$, $\mathcal{L}_{ap}^0$. Оператор $\mathcal{L}_{bc}^0$ будет называться *свободным оператором*. При изучении оператора L_{bc} он будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор $B : \mathrm{D}(B) = \mathrm{D}(L_{bc}) \subset \mathrm{L}_2[0,1] \to \mathrm{L}_2[0,1]$, $By = a(t)y'' + b(t)y$, — возмущения. Оператор $\mathcal{L}_{bc}^0$ является самосопряженным оператором с компактной резольвентой. Поскольку $a, b \in \mathrm{L}_2[0,1]$, то справедливы следующие разложения: $a(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, $b(t) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{i2\pi lt}$, где a_l, b_l — коэффициенты Фурье функций a, b соответственно. Отметим, что не накладываются какие-либо дополнительные ограничения (типа гладкости) на a и b, кроме $a, b \in \mathrm{L}_2[0,1]$.

Опишем спектры $\sigma(\mathcal{L}_{bc}^0)$ и собственные функции операторов $\mathcal{L}_{bc}^0$, $bc \in \{per, ap\}$:

(a) $\sigma(\mathcal{L}_{per}^0) = \{(2\pi n)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$; соответствующее собственное подпространство для $n \neq 0$ имеет вид $E_n^0 = \mathrm{Span}\{e_n^1, e_n^2\}$, где $e_n^1(t) = \mathrm{e}^{-i2\pi nt}$, $e_n^2(t) = \mathrm{e}^{i2\pi nt}$, $t \in [0,1]$. Если $n = 0$, то $E_0^0 = \{\alpha e_0, \alpha \in \mathbb{C}\}$, где $e_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$.

(b) $\sigma(\mathcal{L}_{ap}^0) = \{\pi^4(2n+1)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n^0 = \mathrm{Span}\{e_n^1, e_n^2\}$, где $e_n^1(t) = \mathrm{e}^{-i\pi(2n+1)t}$, $e_n^2(t) = \mathrm{e}^{i\pi(2n+1)t}$, $t \in [0,1]$.

Через $P_n, n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{(2\pi n)^4\}$ или $\{\pi^4(2n+1)^4\}$. Для любого $x \in \mathrm{L}_2[0,1]$ он имеет следующий вид:

(a) $P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $\quad P_0 x = (x, e_0)e_0$;

(b) $P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Всюду в статье предполагается, что $b_0 = \int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t = 0$. (Это предположение $b_0 = 0$ не является ограничением, так как сдвиг потенциала на постоянную сдвигает спектр на ту же постоянную.) Однако мы будем учитывать эту константу при вычислении асимптотики собственных значений рассматриваемого оператора.

Интерес к изучению оператора L_{bc} связан с тем, что такой оператор описывает вибрации балок и оболочек, а также сжатого стержня на упругом основании (см., например, [1, 2]). Значительный интерес к этой теме в настоящее время возникает из-за многочисленных приложений в оптике, акустике (см. [3]), а также к изучению проводимости нанотрубок (см. [4]).

Самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка с периодическими коэффициентами исследовался во многих работах

А. В. Баданина и Е. Л. Коротяева. В статье [5] на вещественной оси изучался оператор $\frac{d^4}{dt^4} + V$ с периодическим потенциалом V из L_1. В [6] рассматривался дифференциальный оператор четвертого порядка $H = \frac{d^4}{dt^4} + \frac{d}{dt}p\frac{d}{dt} + q$ с вещественными периодическими коэффициентами p, q такими, что p, p', $q \in L_1(0,1)$. В [7] этот же оператор рассматривался на $L_2(0,1)$ с классическими краевыми условиями и коэффициентами p, p'', $q \in L_1(0,1)$. В [8] проводилось исследование периодического оператора четного порядка общего вида, действующего на $L_2(\mathbb{R})$, с коэффициентами из L_1. Во всех перечисленных работах выписывалась асимптотика собственных значений оператора, проводились исследования спектральных зон, характеристик спектра при высоких энергиях. Для изучения применялся метод, основанный на построении функции Ляпунова.

Также отметим работу [9], в которой рассматривался дифференциального оператора произвольного порядка m с комплекснозначным потенциалом из $L_1(0,1)$. Для этого оператора были получены асимптотические формулы для собственных значений.

В. А. Михайлец и В. Н. Молибога в [10]–[12] получили асимптотические оценки для оператора $(-1)^N \frac{d^{2N}}{dt^{2N}} + q$ с периодическими и антипериодическими краевыми условиями, где q — периодическое распределение из пространства Соболева.

Отметим, что в монографии М. А. Наймарка [13] была приведена асимптотика собственных значений для дифференциального оператора n-го порядка с регулярными краевыми условиями в пространстве непрерывных функций, а также в пространстве вектор-функций.

В теории возмущенных линейных операторов при изучении дифференциальных операторов, определяемых краевыми условиями на конечном промежутке, используются разнообразные методы. Так, в работе П. Джакова и Б. С. Митягина [14] операторы Шрёдингера и Дирака изучались с помощью резольвентных методов (см. [14]–[16]). Данные методы позволяют вычислять первое приближение собственных значений возмущенного оператора и его проекторов.

В [17] М. С. Аграновичем были получены результаты о равносходимости спектральных разложений возмущения, подчиненного дробной степени невозмущенного оператора, и асимптотические оценки равносходимости спектральных разложений. Однако результаты указанной работы могут быть применены только в том случае, если a — ограниченная функция.

В данной работе получены вторые приближения собственных значений, а также оценки для спектральных проекторов оператора L_{bc}. В отличие от теоремы V.4.15 из [15] функция a не предполагается ограниченной. Исследование оператора L_{bc} проводится с помощью метода подобных операторов (см. [18]–[21]). Данный метод возник при создании аналога замены Крылова–Боголюбова для нелинейных уравнений в банаховом пространстве (см. [18]–[21]). Он тесно соприкасается с методом Фридрихса (см. [16]), который относится к возмущенным операторам с непрерывным спектром. При создании метода подобных операторов использовались методы гармонического анализа.

В настоящей статье применяется вариант метода подобных операторов, развиваемый в работах [22, 23]. В [23, 24] он был применен автором для исследования оператора L_{bc} с другими классическими краевыми условиями. Суть метода заключается в преобразовании подобия исследуемого оператора L_{bc} в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора $\mathcal{L}^0_{bc}$. А именно доказывается подобие оператора L_{bc} оператору блочно-диагонального вида в базисе из собственных векторов оператора $\mathcal{L}^0_{bc}$ (аналог теоремы Жордана для линейного оператора в конечномерном пространстве). Таким образом, существенно упрощается изучение исследуемого оператора L_{bc}.

Одним из основных результатов статьи является теорема 7, в которой доказано подобие L_{bc} соответствующему оператору, имеющему те же собственные значения (кроме конечного числа), что и $\mathcal{L}^0_{bc}$. Эта теорема служит основой для получения асимптотики собственных значений рассматриваемых операторов и доказательства равносходимости спектральных разложений.

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Дифференциальный оператор L_{bc} является оператором с компактной резольвентой и его спектр представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \widetilde{\sigma}_m \cup \left\{\widetilde{\lambda}^{\mp}_n, n \geqslant m+1\right\}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\widetilde{\sigma}_m$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m. Собственные значения $\widetilde{\lambda}^{\mp}_n$, $n \geqslant m+1$, оператора L_{per} допускают следующее асимптотическое представление:

$$\widetilde{\lambda}^{\mp}_n = \left(2\pi n\right)^4 + (2\pi n)^2 a_0 - n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l}a_{-n-l} + a_{n-l}a_{l-n})l^2}{l^4 - n^4}$$

$$\mp (2\pi n)^2 \left(a_{-2n}a_{2n} + \frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4-n^4}\right)\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4-n^4}\right)\right.$$

$$-\frac{a_{-2n}}{2\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4-n^4}-\frac{a_{2n}}{2\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4-n^4}\Bigg)^{\frac{1}{2}}+\gamma_n n^2,\quad n\geqslant m+1.$$

Или в краткой форме

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(2\pi n\big)^4+(2\pi n)^2a_0+\gamma_n^{\mp}n^2,\quad n\geqslant m+1.$$

Здесь (γ_n), $(\gamma_n^{\mp})$ — *последовательности, суммируемые со степенью* $\frac{4}{3}$ *и* 2 *соответственно, и* a_k, $k\in\mathbb{Z}$, — *коэффициенты Фурье функции* a.

Для оператора L_{ap} *имеет место следующее асимптотическое представление*:

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(\pi(2n+1)\big)^4+(\pi(2n+1))^2a_0-(2n+1)^2$$
$$\times\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{(a_{n+l+1}a_{-n-l-1}+a_{n-l}a_{l-n})(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}$$
$$\mp(\pi(2n+1))^2\Bigg(a_{-2n-1}a_{2n+1}+\frac{4}{\pi^4}\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)$$
$$\times\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)$$
$$-\frac{2a_{-2n-1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}-\frac{2a_{2n+1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=0\\l\neq n}}^{\infty}\frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\widetilde{\gamma}_n n^2,\quad n\geqslant m+1.$$

Или в краткой форме

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp}=\big(\pi(2n+1)\big)^4+(\pi(2n+1))^2a_0+\widetilde{\gamma}_n^{\mp}n^2,\quad n\geqslant m+1.$$

Здесь $(\widetilde{\gamma}_n)$, $(\widetilde{\gamma}_n^{\mp})$ — *последовательности, суммируемые со степенью* $\frac{4}{3}$ *и* 2 *соответственно.*

Теорема 2. *Если функция* a *является функцией ограниченной вариации, то справедливы следующие формулы для асимптотики собственных значений*:

$$\widetilde{\lambda}_n^{\pm}=(2\pi n)^4+(2\pi n)^2a_0+O(1)$$

и

$$\widetilde{\lambda}_n^{\pm}=\big(\pi(2n+1)\big)^4+\big(\pi(2n+1)\big)^2a_0+O(1)$$

для случаев $bc=per$ *и* $bc=ap$ *соответственно.*

В следующей теореме символ $\widetilde{P}_n, n \geqslant m+1$ (число $m \in \mathbb{N}$ взято из условий теоремы 1), обозначает проектор Рисса, построенный по множествам $\{\widetilde{\lambda}_n^{\mp}\}$ из спектра $\sigma(L_{bc})$ оператора L_{bc}. Если Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, m\}$, то $\widetilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$ — проектор Рисса, построенный по множеству $\{\widetilde{\lambda}_k^{\mp}, k \in \Omega\}$. Аналогично $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$. Далее, через $\widetilde{P}_{(m)}$ будет обозначаться проектор Рисса, построенный для оператора L_{bc} по спектральному множеству $\widetilde{\sigma}_m$, и через $P_{(m)}$ — проектор $P_1 + \cdots + P_m$.

Теорема 3. *Система проекторов Рисса $\widetilde{P}_n, n \in \mathbb{N}$, обладает следующим свойством:*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$ и $\widetilde{M} > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k(\Omega)$.

Из этой теоремы следует безусловная базисность собственных и присоединенных функций рассматриваемых операторов. Отметим, что такие оценки не могут быть получены на основе резольвентного метода исследования, используемого в [14]–[16], из-за проблем, связанных с выбором контуров интегрирования.

Непосредственно из теоремы 3, используя ее условия и обозначения, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов L_{bc} и $\mathcal{L}_{bc}^0$:*

$$\left\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\right\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $\widetilde{M} > 0$ — константа из теоремы 3.

Замечание 1. Отметим, что оценки, полученные в [17], применимы к рассматриваемому классу операторов, если функция a ограничена. В этом случае в оценках теоремы 4 отсутствует множитель $(\ln n)^{\frac{1}{2}}$. Такая же оценка получается и методом подобных операторов.

В теореме 8 доказано, что дифференциальный оператор $-L_{bc}$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \bigoplus T^{(m)}(t)$, действующей в $L_2[0,1] = \mathcal{H}_{(m)} \bigoplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$, причем $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{C_k t} P_k x, \quad x \in L_2[0,1],$$

где $C_k \in \operatorname{End} \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$ (матрица этого оператора будет описана непосредственно в теореме 8).

Отметим, что данные результаты были анонсированы в заметке [25].

§2. Построение допустимой тройки

Согласно схеме метода подобных операторов (см. [22]), первым шагом к его применению является построение допустимой тройки. Данный параграф посвящен построению допустимой тройки для такого абстрактного оператора, который по своим свойствам наиболее близок к изучаемым дифференциальным операторам L_{per}, L_{ap}. В следующем параграфе она будет применена уже для исследования операторов L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$.

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Для линейного замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и подчиненных оператору A. Таким образом, линейный оператор $X : D(X) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если $D(X) \supseteq D(A)$ и конечна величина $\|X\|_A = \inf\{C > 0 : \|Xx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}$, принимаемая за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$.

Далее приведем основные понятия метода подобных операторов (см. [22, 23]).

Определение 1. Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Как известно (см. [22, лемма 1]), подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и $J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma : \mathfrak{U} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$, являются трансформаторами (т. е. линейными операторами в пространстве линейных операторов). Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, а $\mathfrak{U}$ — *пространством допустимых возмущений*, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$;

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$, более того, $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX,\ \forall X \in \mathfrak{U}$;

4) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathfrak{U},\ \forall X, Y \in \mathfrak{U}$, и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma,\ \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leqslant \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

5) для любых $X \in \mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 5 (см. [22]). *Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тройка и B — некоторый оператор из пространства $\mathfrak{U}$ допустимых для A возмущений. Тогда если выполнено неравенство $\|J\|\|B\|_*\|\Gamma\| < \frac{1}{4}$, то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathfrak{U}$ является решением (нелинейного) уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{2.1}$$

Решение уравнения (2.1) можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$ и т. д. (оператор $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\| \leqslant 3\|B\|\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End}\mathcal{X}$.

В нашем случае в качестве пространства $\mathcal{X}$ выступает комплексное гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Пусть $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта–Шмидта (см. [26]) из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$.

Напомним следующее

Определение 3. Оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $f_0, f_1, \ldots$ в $\mathcal{H}$ выполнено неравенство $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|Xf_j\|^2 < \infty$.

Если ввести матрицу (x_{kj}) оператора $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ в ортонормированном базисе $f_0, f_1, \ldots$: $x_{kj} = (Xf_j, f_k)$, $k, j \geqslant 0$, то это неравенство можно записать в виде $\sum\limits_{k,j=0}^{\infty} |x_{kj}|^2 < \infty$. Эта величина является нормой в идеале операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и будет обозначаться $\|\cdot\|_2$.

Пусть $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, спектр $\sigma(A)$ которого образует последовательность собственных значений $\lambda_{n,\theta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, вида

$$\lambda_{n,\theta} = \pi^4(2n + \theta)^4, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\theta = 0$, если $A = \mathcal{L}^0_{per}$, и $\theta = 1$, если $A = \mathcal{L}^0_{ap}$.

Собственные значения оператора A обладают следующим свойством:

$$|\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}| \geqslant \frac{1}{c}|k^4 - j^4|, \quad |\lambda_{k,\theta}| \leqslant ck^4, \;\; k, j \geqslant 0, \;\; k \neq j, \tag{2.2}$$

где $c = (2\pi)^4$ для $\theta = 0$ и $c = (3\pi)^4$ для $\theta = 1$.

Пусть e_0, e_n^1, e_n^2, $n \in \mathbb{N}$, — ортонормированный базис. Пусть P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, — ортогональный проектор, построенный по множеству $\{\lambda_{n,\theta}\} \subset \sigma(A)$ и определяемый следующим образом:

$$P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2, \;\; n \in \mathbb{N}, \quad P_0 x = (x, e_0)e_0, \;\; n = 0, \;\; \text{для } \theta = 0,$$

$$P_n x = (x, e_n^1)e_n^1 + (x, e_n^2)e_n^2, \;\; n \in \mathbb{Z}_+, \;\; \text{для } \theta = 1.$$

Далее будем рассматривать оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}P_n = AP_n = \lambda_{n,0}P_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{A}P_0 = P_0$ для $\theta = 0$ и $\mathcal{A}P_n = AP_n = \lambda_{n,1}P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для $\theta = 1$.

Рассмотрим операторную матрицу $(\mathcal{X}_{kj})$, составленную из операторных блоков $\mathcal{X}_{kj} = P_k X P_j$, $k, j \in \mathbb{Z}_+$. Для оператора $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ рассмотрим отдельные блоки этой матрицы в случае $\theta = 0$.

Если $k = j = 0$, то $(\mathcal{X}_{00})$ — матрица размера 1×1, состоящая из одного элемента $\mathcal{X}_{00} = (Xe_0, e_0)$ (см. [23]). Матричные элементы матрицы $(\mathcal{X}_{k0})$, $k \geqslant 1$, размера 2×1 имеют вид

$$\begin{pmatrix} (Xe_0, e_k^1) \\ (Xe_0, e_k^2) \end{pmatrix}.$$

Соответственно матричные элементы для матрицы $(\mathcal{X}_{0j})$, $j \geqslant 1$, размера 1×2 имеют вид $((Xe_j^1, e_0), (Xe_j^2, e_0))$.

Наконец, в силу того, что $\dim \operatorname{Im} P_n = 2$, $n \in \mathbb{N}$, матрица $(\mathcal{X}_{kj})$, $k, j \geqslant 1$, имеет вид

$$\mathcal{X}_{kj} = \begin{pmatrix} (Xe_j^1, e_k^1) & (Xe_j^2, e_k^1) \\ (Xe_j^1, e_k^2) & (Xe_j^2, e_k^2) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Отметим, что при $\theta = 1$ матрица $(\mathcal{X}_{kj})$, $k, j \geqslant 0$, имеет вид (2.3). При следующих оценках будут использоваться равенства $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{k,j=0}^{\infty} \|P_k X P_j\|_2^2$.

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} : \mathrm{D}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n,\theta}^{\frac{1}{2}} P_n x,$$

с областью определения $\mathrm{D}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) = \{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n,\theta}| \|P_n x\|^2 < \infty\}$.

Банахово пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ будет состоять из операторов $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$, представимых в виде

$$X = X_0 \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}, \quad X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Положим за норму оператора X в $\mathfrak{U}$ величину $\|X\|_* = \|X_0\|_2$.

Далее, следуя приведенной в [23] схеме, построим трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$. Вначале эти трансформаторы определим на алгебре $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ задаются равенствами

$$JX = \sum_{n=0}^{\infty} P_n X P_n, \quad \Gamma X = \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{P_k X P_j}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}}. \tag{2.4}$$

Корректность определения JX, ΓX и их ограниченность будут установлены в следующей лемме.

Лемма 1. *Трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ корректно определены, ограничены и обладают свойствами*:

1) *J — проектор, $\|J\| = 1$;*

2) *имеет место оценка $\|\Gamma\| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k \neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|} \leqslant \frac{c}{15}$, где константа c определяется в* (2.2).

Доказательство. Докажем 1). Используя свойство ортонормированной последовательности векторов из гильбертова пространства, получим следующие равенства:

$$\|(JX)x\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (P_n X P_n) x \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n(X P_n x)\|^2$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n X P_n x\|^2 \leqslant \|X\|^2 \|x\|^2,$$

где $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, $\|JX\| \leqslant \|X\|$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, оператор J корректно определен, ограничен и $\|J\| \leqslant 1$. Отметим, что равенство $\|J\| = 1$ достигается в том случае, если X совпадает с одним из проекторов P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Докажем 2), т. е. корректность и ограниченность трансформатора Γ. Справедливы следующие равенства:

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \left\| \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{P_k X P_j}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} \right\|_2^2 \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k \neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|^2} \left\| \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{\infty} P_k X P_j \right\|_2^2$$
$$= \frac{1}{\inf\limits_{k \neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|^2} \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{\infty} \|P_k X P_j\|_2^2 = \frac{1}{\inf\limits_{k \neq j} |\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}|^2} \|X\|_2^2.$$

Таким образом,

$$\|\Gamma X\|_2 \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j}|\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}|}\|X\|_2 \leqslant \frac{c}{15}\|X\|_2, \quad X\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Следовательно, оператор Γ корректно определен, ограничен и

$$\|\Gamma\| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{k\neq j}|\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}|} \leqslant \frac{c}{15}.$$

Лемма доказана. □

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространства $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{U}$ (далее обозначаемые теми же символами) будут задаваться следующим образом:

$$\begin{aligned} &JX = J(X\mathcal{A}^{-1})\mathcal{A}, \quad \Gamma X = (\Gamma X\mathcal{A}^{-1})\mathcal{A}, \quad X\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}),\\ &JX = J(X\mathcal{A}^{-\frac12})\mathcal{A}^{\frac12}, \quad \Gamma X = (\Gamma X\mathcal{A}^{-\frac12})\mathcal{A}^{\frac12}, \quad X\in\mathfrak{U}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Лемма 2. *Каждый оператор ΓX, $X\in\mathfrak{U}$, допускает расширение на все пространство $\mathcal{H}$ до оператора (обозначаемого тем же символом ΓX), принадлежащего $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, причем*

$$\|\Gamma X\|_2 \leqslant \frac{c^{\frac32}}{3}\|X\|_*, \quad X\in\mathfrak{U}, \tag{2.6}$$

где постоянная c определяется из (2.2).

Доказательство. Так как $X\in\mathfrak{U}$, справедливо представление $X = X_0\mathcal{A}^{\frac12}$, где $X_0\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Согласно оценкам (2.2) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|\Gamma X\|_2^2 &= \Bigg\|\sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty}\frac{P_kXP_j}{\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}}\Bigg\|_2^2 = \Bigg\|\sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty}\frac{(P_kX_0P_j)\lambda_{j,\theta}^{\frac12}}{\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}}\Bigg\|_2^2\\ &\leqslant c^3\sup_{\substack{k,j\geqslant0\\k\neq j}}\frac{j^4}{(k^4-j^4)^2}\sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty}\|P_kX_0P_j\|_2^2\\ &\leqslant c^3\sup_{\substack{k,j\geqslant0\\k\neq j}}\frac{1}{(k^2-j^2)^2}\|X_0\|_2^2 \leqslant \frac{c^3}{9}\|X\|_*^2. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор ΓX является оператором Гильберта–Шмидта. Следовательно, оператор ΓX допускает ограниченное расширение на все $\mathcal{H}$ и справедлива оценка (2.6). Лемма доказана. □

Замечание 2. Учитывая лемму 2, трансформатор Γ, определенный формулой (2.5), будем рассматривать как линейный оператор из $\mathfrak{U}$ со значениями в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и обозначать тем же символом. При этом из леммы 2 следует, что $\|\Gamma\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим трансформаторы $J_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следующим образом:

$$J_m X = JX - J(P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{2.7}$$

$$\Gamma_m X = \Gamma X - P_{(m)}(\Gamma X) P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{2.8}$$

где $P_{(m)} = \sum\limits_{k \leqslant m} P_k$. Отметим также, что $J_1 X = JX$ и $\Gamma_1 X = \Gamma X$, $X \in \mathfrak{U}$.

Используя определения трансформаторов J_m и Γ_m, лемму 2 и замечание 2, непосредственной проверкой легко установить справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Каждый из трансформаторов $J_m, \Gamma_m, m \in \mathbb{N}$, допускает ограниченное расширение на $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ (следовательно, и на пространство $\mathfrak{U}$). Также имеют место оценки*

$$\|J_m\| = 1, \quad \|\Gamma_m\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m},$$

где c определено в (2.2).

Замечание 3. Отметим, что непосредственно из равенств (2.7), (2.8) следует, что оператор ΓX (соответственно JX), $X \in \mathfrak{U}$, отличается от оператора $\Gamma_m X$ (соответственно $J_m X$) на оператор конечного ранга $P_{(m)}(\Gamma X) P_{(m)}$ (соответственно $P_{(m)}(JX) P_{(m)}$). Поэтому в дальнейшем мы будем осуществлять проверку всех необходимых свойств для оператора ΓX (соответственно JX).

Покажем теперь, что построенная тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой.

Лемма 4. $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ — *допустимая тройка для оператора $\mathcal{A}$, причем для величины $\gamma = \gamma_m$ из определения допустимой тройки справедлива оценка $\gamma_m \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$, где c определено в* (2.2).

Доказательство. Проверим все свойства допустимой тройки. Первые два свойства следуют из представления пространства допустимых возмущений, леммы 3 и формул (2.7), (2.8).

Докажем свойство 3), т. е. что $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ для любого $X \in \mathfrak{U}$. Согласно замечанию 3 вместо $\Gamma_m X$ можно рассмотреть ΓX. Оператор X

представим в виде $X = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Возьмем произвольный вектор $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, тогда $x = \mathcal{A}^{-1}y$, где $y \in \mathcal{H}$. Имеют место равенства

$$(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}y = \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k X P_j)\mathcal{A}^{-1}y}{\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}}$$
$$= \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k X_0 \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} P_j)y}{(\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}} = \sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{\infty} \frac{(P_k X_0 P_j)y}{(\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}.$$

Из (2.2) с учетом неравенства $\sup\limits_{k,j\geqslant 1 k\neq j} \frac{k^2}{(k-j)^2j^4} \leqslant 4$ вытекает, что

$$\left\|\mathcal{A}(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}y\right\|^2 = \left\|\mathcal{A}\sum_{\substack{k,j=0\\j\neq k}}^{\infty} \frac{(P_k X_0 P_j)y}{(\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}\right\|^2 = \left\|\sum_{\substack{k,j=0\\j\neq k}}^{\infty} \frac{\lambda_{k,\theta}(P_k X_0 P_j)y}{(\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta})\lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}\right\|^2$$
$$\leqslant c^3\left\|\sum_{\substack{k,j=0\\j\neq k}}^{\infty} \frac{k^4(P_k X_0 P_j)y}{(k^4-j^4)j^2}\right\|^2 \leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant 1\\k\neq j}} \frac{k^8}{(k^4-j^4)^2j^4}\sum_{k,j=1}^{\infty}\|(P_k X_0 P_j)y\|^2$$
$$\leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j\geqslant 1\\k\neq j}} \frac{k^2}{(k-j)^2j^4}\|X_0\|_2^2\|y\|^2 \leqslant 4c^3\|X_0\|_2^2\|y\|^2.$$

Таким образом, $(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}x \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, а из полученных оценок следует ограниченность оператора $\mathcal{A}(\Gamma X)\mathcal{A}^{-1}$. Следовательно, $(\Gamma X)\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ и, значит, $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$. Осталось установить равенство матриц операторов $\mathcal{A}(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)\mathcal{A}$ и $X - J_m X$. При $k \neq j$ имеем

$$\left(\frac{\lambda_{k,\theta}\widetilde{x}_{kj}(1-\delta_{kj})}{\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}}\right) - \left(\frac{\widetilde{x}_{kj}(1-\delta_{kj})\lambda_{j,\theta}}{\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}}\right)$$
$$= \left(\frac{\widetilde{x}_{kj}(\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta})(1-\delta_{kj})}{\lambda_{k,\theta}-\lambda_{j,\theta}}\right) = \widetilde{x}_{kj} - \delta_{kj}\widetilde{x}_{kj},$$

где $(\widetilde{x}_{kj})$ — матрица оператора X. Таким образом, получаем справедливость свойства 3).

Проверим свойство 4). Возьмем $X, Y \in \mathfrak{U}$ и запишем их в виде $X = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$, $Y = Y_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$. Тогда представим оператор $X\Gamma_m Y$ в виде $X\Gamma_m Y = X_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\Gamma_m Y_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} = Z_0\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$. Докажем, что оператор Z_0 является оператором Гильберта–Шмидта. Согласно лемме 3 достаточно проверить этот факт для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Используя оценки (2.2), получим следующие неравенства:

$$\|Z_0\|_2^2 = \|X_0 \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \Gamma Y_0\|_2^2 = \left\| X_0 \Bigg(\sum_{\substack{k,j=m \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{(P_k Y_0 P_j) \lambda_{j,\theta}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{k,\theta} - \lambda_{j,\theta}} \Bigg) \right\|_2^2$$

$$\leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j \geqslant m \\ k \neq j}} \frac{j^4}{(k^4 - j^4)^2} \left\| X_0 \sum_{k,j=m}^{\infty} P_k Y_0 P_j \right\|_2^2 \leqslant c^3 \sup_{\substack{k,j \geqslant m \\ k \neq j}} \frac{1}{(k^2 - j^2)^2}$$

$$\times \|X_0\|_2^2 \sum_{k,j=m}^{\infty} \|P_k Y_0 P_j\|_2^2 \leqslant \frac{c^3 \|X\|_*^2 \|Y\|_*^2}{m^2},$$

где c — величина из (2.2). Следовательно, $Z_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и оператор $X \Gamma_m Y$ принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$, а также справедлива оценка $\|X \Gamma_m Y\|_* \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m} \|X\|_* \|Y\|_*$. Аналогично рассуждая, получим точно такую же оценку и для оператора $(\Gamma_m X) Y$. Таким образом, непосредственным вычислением легко установить, что $\|\Gamma_m\| \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$.

Проверим последнее свойство допустимой тройки. Пусть $X = X_0 \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$ — произвольный оператор из $\mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$. В качестве λ_ε возьмем число $-cn$, $n \in \mathbb{N}$, где $c > 0$ — величина из (2.2), а $n \in \mathbb{N}$ таково, что $\frac{1}{2} c^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \|X_0\|_2 < \varepsilon$. Тогда

$$\|X(\mathcal{A} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leqslant \|X_0\|_2 \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} (\mathcal{A} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| = \|X_0\|_2 \max_{k \geqslant 1} \frac{|\lambda_{k,\theta}^{\frac{1}{2}}|}{|\lambda_{k,\theta} - \lambda_\varepsilon|}$$

$$\leqslant c^{\frac{3}{2}} \|X_0\|_2 \max_{k \geqslant 1} \frac{k^2}{k^4 + n} \leqslant \frac{\|X_0\|_2 c^{\frac{3}{2}}}{2 n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon.$$

Итак, $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ — допустимая тройка. Лемма доказана. □

§3. Предварительное преобразование подобия

Вернемся к рассмотрению исследуемого оператора L_{bc}, определенного во введении. Применим абстрактную схему, описанную в предыдущем параграфе, для исследования спектральных свойств оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap\}$. В качестве оператора $\mathcal{A}$ будут выступать операторы L_{per}^0, L_{ap}^0, определяемые следующим образом:

$$L_{per}^0 P_n = \mathcal{L}_{per}^0 P_n = \lambda_n P_n, \;\; n \in \mathbb{N}, \quad L_{per}^0 P_0 = \mathcal{L}_{per}^0 P_0 = P_0,$$
$$L_{ap}^0 P_n = \mathcal{L}_{ap}^0 P_n = \lambda_n P_n, \;\; n \in \mathbb{Z}_+,$$

где ортогональные проекторы P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, описаны во введении. Операторы L^0_{per}, L^0_{ap} являются самосопряженными операторами с компактной резольвентой и собственными значениями, удовлетворяющими (2.2), где $c = (2\pi)^4$ для оператора L^0_{per}, и $c = (3\pi)^4$ для оператора L^0_{ap}. Всюду в дальнейшем $\mathcal{H} = \mathrm{L}_2[0,1]$, и оно будет отождествляться с гильбертовым пространством $\mathrm{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ периодических периода 1 функций, определенных на $\mathbb{R}$ и суммируемых с квадратом модуля на $[0,1]$.

Оператор возмущения B, описанный во введении, принадлежит пространству $\mathfrak{L}_{L^0_{bc}}(\mathcal{H})$, $bc \in \{per, ap\}$. Следовательно, корректно определены операторы JB, ΓB, $J_m B$, $\Gamma_m B$, заданные формулами (2.4), (2.7), (2.8), для оператора B.

Так как оператор B не принадлежит построенному в предыдущем параграфе пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$, то в данном случае необходимо сделать предварительное преобразование подобия (см. [22]) оператора L_{bc} в оператор $\widetilde{L}_{bc} = L^0_{bc} - \widetilde{B}$, $bc \in \{per, ap\}$, где $\widetilde{B}$ уже входит в $\mathfrak{U}$. Этот факт будет установлен в настоящем параграфе.

Сначала рассмотрим оператор $B = B_1 + B_2$, где $B_1 y = ay''$, $B_2 y = by$, $y \in \mathrm{D}(L^0_{bc})$, $bc \in \{per, ap\}$, и $a, b \in \mathcal{H}$. Представим возмущение B в виде

$$B = \big(B(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}\big)(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} = \big(B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}\big)(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} + \big(B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}\big)(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}.$$

Так как функции a и b принадлежат $\mathcal{H}$, то справедливы следующие представления:

$$a(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{2i\pi l t}, \quad b(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{2i\pi l t}.$$

Рассмотрим случай $bc = per$. Числовые блочные матрицы $(\mathfrak{A}^{per}_{kj})$, $(\mathfrak{B}^{per}_{kj})$, $k, j \geqslant 0$, определим таким же образом, как и в предыдущем параграфе (в частности, справедлива формула (2.3)). Вычислим элементы этих матриц. Для оператора умножения на функцию a элементы этой матрицы будут вычисляться следующим образом:

$$\big(ae^1_j, e^1_k\big) = \int_0^1 a(t)e^1_j(t)\overline{e^1_k(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{2i\pi l t}\cdot \mathrm{e}^{i2\pi(k-j)t}\,\mathrm{d}t = a_{j-k}.$$

Аналогично рассуждая, получим справедливость следующих равенств:

$$\big(ae^2_j, e^1_k\big) = a_{-j-k}, \quad \big(ae^1_j, e^2_k\big) = a_{j+k}, \quad \big(ae^2_j, e^2_k\big) = a_{-j+k}.$$

В случае, если $k=0$, $j\geqslant 1$, и $k\geqslant 1$, $j=0$, соответствующие элементы имеют вид

$$\begin{aligned}&(ae_0,e_0)=0,\quad (ae_0,e_k^1)=0,\quad (ae_0,e_k^2)=0,\\&(ae_j^1,e_0)=a_j,\quad (ae_j^2,e_0)=a_{-j}.\end{aligned}$$

Таким образом, матрица для оператора B_1 выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{A}_{kj}^{per}=-(2\pi j)^2\begin{pmatrix}0 & a_j & a_{-j}\\ 0 & a_{j-k} & a_{-j-k}\\ 0 & a_{j+k} & a_{-j+k}\end{pmatrix},\quad k,j\geqslant 1. \tag{3.1}$$

Так как оператор B_2 является оператором умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то матрица $(\mathfrak{B}_{kj}^{per})$, $k,j\geqslant 1$, очевидно, определяется следующим образом:

$$\mathfrak{B}_{kj}^{per}=\begin{pmatrix}0 & b_j & b_{-j}\\ b_{-k} & b_{j-k} & b_{-j-k}\\ b_k & b_{j+k} & b_{-j+k}\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Аналогичным образом вычисляются элементы матрицы $\mathfrak{U}_{kj}^{ap}$ для случая $bc=ap$. Матрицы $(\mathfrak{A}_{kj}^{ap})$, $(\mathfrak{B}_{kj}^{ap})$, $k,j\geqslant 0$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{kj}^{ap}&=-(\pi(2j+1))^2\begin{pmatrix}a_{j-k} & a_{-j-k-1}\\ a_{j+k+1} & a_{-j+k}\end{pmatrix},\\ \mathfrak{B}_{kj}^{ap}&=\begin{pmatrix}b_{j-k} & b_{-j-k-1}\\ b_{j+k+1} & b_{-j+k}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Далее докажем несколько технических лемм.

Лемма 5. *Операторы ΓB, $\Gamma_m B$, $m\in\mathbb{N}$, являются операторами Гильберта–Шмидта, причем* $\lim\limits_{m\to\infty}\|\Gamma_m B\|_2^2=0$.

Доказательство. Покажем, что оператор ΓB является оператором Гильберта–Шмидта. Так как оператор B_2 — оператор умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то для доказательства леммы будет достаточно рассмотреть оператор ΓB_1 вместо ΓB. Сначала рассмотрим случай $bc=per$. Согласно представлению (3.1) имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\|\Gamma B_1\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}|(\Gamma B_1 e_j^1, e_0)|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}|(\Gamma B_1 e_j^2, e_0)|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty}\left|(\Gamma B_1 e_j^1, e_k^1)\right|^2 \\
&+ \sum_{k,j=1}^{\infty}\left|(\Gamma B_1 e_j^1, e_k^2)\right|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty}\left|(\Gamma B_1 e_j^2, e_k^1)\right|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty}\left|(\Gamma B_1 e_j^2, e_k^2)\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j|^2(2\pi j)^4}{(2\pi j)^8} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_{-j}|^2(2\pi j)^4}{(2\pi j)^8} + \sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{j-k}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi k)^4-(2\pi j)^4)^2} \\
&+ \sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{-j-k}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi k)^4-(2\pi j)^4)^2} + \sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{j+k}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi k)^4-(2\pi j)^4)^2} \\
&+ \sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{-j+k}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi k)^4-(2\pi j)^4)^2} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^4}\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j|^2+|a_{-j}|^2}{j^4} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{\infty}\frac{|a_{j-k}|^2}{(k-j)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{\infty}\frac{|a_{-j-k}|^2}{(k-j)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{\infty}\frac{|a_{j+k}|^2}{(k-j)^2} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{\infty}\frac{|a_{-j+k}|^2}{(k-j)^2}\Bigg) < \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, согласно замечанию 3 операторы $\Gamma_m B, m \in \mathbb{N}$, являются операторами Гильберта–Шмидта.

Проводя аналогичные рассуждения, используя равенства (3.3), получим, что $\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для случая $bc = ap$. Следовательно, и в этом случае оператор $\Gamma_m B$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Кроме того, из (2.8) следует, что

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\|\Gamma_m B\|_2^2 &= \lim_{m\to\infty}\|\Gamma B - P_{(m)}(\Gamma B)P_{(m)}\|_2^2 \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{\max\{k,j\}\geqslant m+1}^{\infty}\|P_k(\Gamma_m B)P_j\|_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Оператор $J_m B$ принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Согласно замечанию 3 достаточно провести доказательство для оператора JB. Представим его в виде

$$JB = (JB(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}})(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} = B_{JB}(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$$

и докажем, что оператор B_{JB} принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Используя представления (3.1) и (3.2), для случая $bc = per$ получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\|JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 &= |(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e_0, e_0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_n, e^1_n)|^2 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_n, e^2_n)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_n, e^1_n)|^2 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}|(JB(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_n, e^2_n)|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{2n}|^2(2\pi n)^2}{(2\pi n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{-2n}|^2(2\pi n)^2}{(2\pi n)^2} \\
&+ 2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_{2n}|^2}{(2\pi n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_{-2n}|^2}{(2\pi n)^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, используя представление (3.3), получим такие же оценки для случая $bc = ap$. Таким образом, $B_{JB} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, операторы J_mB, $m \in \mathbb{N}$, принадлежат $\mathfrak{U}$. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Операторы $B\Gamma_mB$, $(\Gamma_mB)J_mB$ принадлежат пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $B\Gamma B \in \mathfrak{U}$ (согласно замечанию 3). Для этого представим его в виде

$$B\Gamma B = (B\Gamma B(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}})(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} = B_0(L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$$

и установим, что $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В свою очередь, оператор B_0 представим в виде

$$B_0 = B_1\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}} + B_1\Gamma B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_2(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}.$$

Докажем, что $\|B_1\Gamma B_1(L^0_{bc})^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 < \infty$. Сначала рассмотрим случай $bc = per$. Согласно представлениям (3.1) и (3.2) имеем

$$\|B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 = \sum_{k,j=1}^{\infty} |(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j, e^1_k)|^2$$
$$+ \sum_{k,j=1}^{\infty} |(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_j, e^1_k)|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty} |(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j, e^2_k)|^2$$
$$+ \sum_{k,j=1}^{\infty} |(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_j, e^2_k)|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j, e_0)|^2$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} |(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^2_j, e_0)|^2.$$

Оценим первое слагаемое в этой сумме. Отметим, что все остальные слагаемые будут оцениваться аналогично. Справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} |(B_1\Gamma B_1(L^0_{per})^{-\frac{1}{2}}e^1_j, e^1_k)|^2$$
$$= \sum_{k,j=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty} \frac{(a_{l-k}a_{j-l} + a_{-l-k}a_{j+l})(2\pi j)^2(2\pi l)^2}{((2\pi l)^4 - (2\pi j)^4)(2\pi j)^2} \right|^2$$
$$\leqslant \frac{1}{8\pi^4}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{l-k}||a_{j-l}|}{|l^2-j^2|}\right)^2 + \frac{1}{8\pi^4}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{-l-k}||a_{j+l}|}{|l^2-j^2|}\right)^2.$$

Оценим какое-нибудь одно из слагаемых. Отметим, что все рассуждения справедливы для обоих случаев. Для определенности выберем слагаемое $\frac{1}{8\pi^4}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{l-k}||a_{j-l}|}{|l^2-j^2|}\Big)^2$, обозначаемое далее через γ_1. Аналогично и той же постоянной оцениваются остальные слагаемые. Рассмотрим последовательности $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty), j \geqslant 1$, вида $f_j(l) = \frac{|a_{j-l}|}{|l^2-j^2|}$, если $l \neq j$ и 0, если $l = j$. Найдем соответствующую оценку для нормы этих последовательностей в l^1:

$$\|f_j\|_{l^1} = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}|f_j(l)| = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{\infty}\frac{|a_{j-l}|}{|l^2-j^2|} \leqslant \frac{\|a\|_{l^2}}{j}\left(2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|a\|_{l^2}\pi}{j\sqrt{3}}, \quad j \geqslant 1.$$

Ввиду того, что последовательности $k \mapsto |a_{|k-l|}| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, l \geqslant 1$, обозначаемые далее через $\widetilde{a}_l$, принадлежат l^2, справедливы следующие неравенства:

$$\Big\| \sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{a}_l f_j(l) \Big\|_{l^2} \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \|\widetilde{a}_l\|_{l^2} |f_j(l)| \leqslant \|a\|_{l^2} \sum_{l=1}^{\infty} |f_j(l)| \leqslant \frac{\|a\|_{l^2}^2 \pi}{j\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\gamma_1 = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\| \sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{a}_l f_j(l) \Big\|_{l^2}^2 \leqslant \frac{\|a\|_{l^2}^4}{24\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\|a\|_{l^2}^4}{144}.$$

Отметим, что аналогичные рассуждения и вычисления справедливы и для случая $bc = ap$. Таким образом, оператор $B_1 \Gamma B_1 (L_{bc}^0)^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Так как B_2 — оператор умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то $B_1 \Gamma B_2 (L_{bc}^0)^{-\frac{1}{2}}$, $B_2 \Gamma B_1 (L_{bc}^0)^{-\frac{1}{2}}$, $B_2 \Gamma B_2 (L_{bc}^0)^{-\frac{1}{2}}$ также принадлежат $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, $B\Gamma B$ принадлежит $\mathfrak{U}$, а значит, и $B\Gamma_m B \in \mathfrak{U}$.

Осталось доказать, что $(\Gamma_m B) J_m B \in \mathfrak{U}$. Согласно лемме 5 оператор $\Gamma_m B$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а из леммы 6 следует, что оператор $J_m B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Так как произведение двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором (см. [26]), то $(\Gamma_m B) J_m B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что операторы $B, J_m B, \Gamma_m B$ удовлетворяют следующим условиям:*

(a) $\Gamma_m B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ *и* $\|\Gamma_m B\|_2 < 1$;

(b) $(\Gamma_m B) \mathrm{D}(L_{bc}^0) \subset \mathrm{D}(L_{bc}^0)$;

(c) $B\Gamma_m B, (\Gamma_m B) J_m B \in \mathfrak{U}$, *где* $\mathfrak{U}$ — *пространство допустимых возмущений*;

(d) $L_{bc}^0 (\Gamma_m B) x - (\Gamma_m B) L_{bc}^0 x = Bx - (J_m B) x$, $x \in \mathrm{D}(L_{bc}^0)$;

(e) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_{bc}^0)$ *такое, что* $\|B(L_{bc}^0 - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что оператор $\Gamma_m B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \operatorname{End} \mathcal{H}$, причем согласно (2.8) справедливо неравенство $\|\Gamma_m B\|_2 < 1$ для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, выполнено условие (a).

Для того, чтобы установить свойство (b) для оператора ΓB (см. замечание 3), необходимо провести аналогичные рассуждения, как при доказательстве свойства 3 леммы 4. Таким образом, $(\Gamma_m B) \mathrm{D}(L_{bc}^0) \subset \mathrm{D}(L_{bc}^0)$.

Свойство (c) выполнено в силу леммы 7.

Для доказательства свойства (d) необходимо провести аналогичные рассуждения, как и при доказательстве свойства 4 леммы 4. Кроме того, из равенств (2.7), (2.8) следует, что для $x \in \mathrm{D}(L^0_{bc})$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} L^0_{bc}(\Gamma_m B)x &= L^0_{bc}\Gamma Bx - L^0_{bc}P_{(m)}(\Gamma B)P_{(m)} = L^0_{bc}\Gamma Bx - P_{(m)}(L^0_{bc}\Gamma B)P_{(m)} \\ &= (B - JB)x + (\Gamma B)L^0_{bc}x - P_{(m)}(B - JB)P_{(m)}x - P_{(m)}(\Gamma B)L^0_{bc}P_{(m)}x \\ &= (B - J_m B)x + (\Gamma_m B)L^0_{bc}x. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено свойство (d).

Осталось установить свойство (e). Рассмотрим случай $bc = per$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы было справедливо неравенство

$$\left(\frac{4\|a\|^2_{l^2}}{3} + \frac{\|b\|^2_{l^2}}{1890}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\pi n^{\frac{1}{4}}} < \varepsilon. \tag{3.4}$$

В качестве λ_ε возьмем число $-\pi^4 n$. Непосредственным вычислением легко установить, что оператор $B(L^0_{per})^{-\frac{3}{4}}$ ограничен и справедлива оценка $\|B(L^0_{per})^{-\frac{3}{4}}\|^2_2 \leqslant \frac{4\|a\|^2_{l^2}}{3} + \frac{\|b\|^2_{l^2}}{1890}$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего (3.4), справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|B(L^0_{per} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| &\leqslant \|B(L^0_{per})^{-\frac{3}{4}}\|_2 \max_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_k^{\frac{3}{4}}}{|\lambda_k - \lambda_\varepsilon|} \\ &\leqslant \left(\frac{4\|a\|^2_{l^2}}{3} + \frac{\|b\|^2_{l^2}}{1890}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \max_{k \geqslant 1} \frac{k^3}{k^4 + n} \leqslant \left(\frac{4\|a\|^2_{l^2}}{3} + \frac{\|b\|^2_{l^2}}{1890}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\pi n^{\frac{1}{4}}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, свойство (e) установлено для L^0_{per}. Аналогично рассуждая, получим свойство (e) для случая $bc = ap$. Лемма доказана. □

Теорема 6. *Если число $m \in \mathbb{N}$ таково, что*

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \tag{3.5}$$

то оператор $L_{bc} = L^0_{bc} - B$ подобен оператору $\widetilde{L}_{bc} = L^0_{bc} - \widetilde{B}$, где

$$\widetilde{B} = J_m B_1 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1) J_m B_1) + \widetilde{C}. \tag{3.6}$$

Оператор $\widetilde{C}$ определяется формулой $\widetilde{C} = J_m B_2 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_2 + B_2 \Gamma_m B_1 + B_2 \Gamma_m B_2 - (\Gamma_m B_1) J_m B_2 - (\Gamma_m B_2) J_m B_1 - (\Gamma_m B_2) J_m B_2)$, причем имеет место равенство

$$(L^0_{bc} - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(L^0_{bc} - \widetilde{B}). \tag{3.7}$$

Оператор $\widetilde{B}$ из (3.7) представим в виде

$$\widetilde{B} = JB_1 + B_1 \Gamma B_1 - (\Gamma B_1) JB_1 + C \in \mathfrak{U}, \tag{3.8}$$

где $C = C_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$, C_0 принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ идеалу ядерных операторов, определенных на $\mathrm{L}_2[0,1]$ (см. [26]).

Доказательство. Существование числа $m \in \mathbb{N}$, для которого справедлива оценка (3.5), доказано в лемме 5. Согласно теореме 2 из [22] и лемме 8, оператор $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ подобен оператору $\widetilde{L}_{bc} = L_{bc}^0 - \widetilde{B}$, а также справедливы равенства (3.6), (3.7). Оператор C из (3.8) имеет вид

$$C = -(I + \Gamma_m B)^{-1}(\Gamma_m B)(B_1\Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1)J_m B_1) + C_1 + \widetilde{C},$$

где оператор

$$C_1 = B_1\Gamma_m B_1 - B_1\Gamma B_1 - (\Gamma_m B_1)J_m B_1 + (\Gamma B_1)JB_1 + J_m B_1 - JB_1$$

имеет конечный ранг и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Из леммы 7 следует, что операторы $(\Gamma_m B)J_m B$ и $B\Gamma_m B$ принадлежат $\mathfrak{U}$. Следовательно, $\widetilde{C} \in \mathfrak{U}$ и $B_1\Gamma_m B_1$, $(\Gamma_m B_1)J_m B_1 \in \mathfrak{U}$. Таким образом, оператор C представим в виде $C = C_0(L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}$, где C_0 принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ (как сумма оператора конечного ранга и произведения двух операторов Гильберта–Шмидта (см. [26])). Таким образом, $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Теорема доказана. $\square$

§4. Доказательство основных результатов

Теорема 6 позволяет свести изучение оператора L_{bc} к оператору $\widetilde{L}_{bc}$. Исследование оператора $\widetilde{L}_{bc}$ будем осуществлять методом подобных операторов с использованием теоремы 5.

В условиях следующей теоремы число $m \in \mathbb{N}$ выбирается так, чтобы одновременно были выполнены условия

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \quad \frac{c^{\frac{3}{2}}\|B\|_*}{m} < \frac{1}{4}, \tag{4.1}$$

где $c = (2\pi)^4$ для случая $bc = per$ и $c = (3\pi)^4$ для случая $bc = ap$.

Следующая теорема является одним из основных результатов статьи.

Теорема 7. *Пусть число $m \in \mathbb{N}$ таково, что выполнены условия* (4.1). *Тогда оператор $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ (а следовательно, и оператор $\widetilde{L}_{bc}$) подобен оператору вида*

$$L_{bc}^0 - J_m X_* = L_{bc}^0 - P_{(m)}X_*P_{(m)} - \sum_{j \geqslant m+1} P_j X_* P_j. \tag{4.2}$$

Оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ есть решение уравнения

$$X = \widetilde{B}\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m\widetilde{B}) - (\Gamma_m X)J_m(\widetilde{B}\Gamma_m X) + \widetilde{B}, \tag{4.3}$$

рассматриваемого в $\mathfrak{U}$. Оператор $I + \Gamma_m X_*$ обратим, и преобразование подобия оператора $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ в оператор $L_{bc}^0 - J_m X_*$ осуществляет *оператор вида*

$$U_m = (I + \Gamma_m B)(I + \Gamma_m X_*) = I + V_m, \tag{4.4}$$

где $V_m \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. *Кроме того, оператор* $J_m X_*$ *представим в виде*

$$J_m X_* = J\widetilde{B} + J(\widetilde{B}\Gamma\widetilde{B}) + T_0, \tag{4.5}$$

где T_0 *имеет вид* $T_0 = T_0'(L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}$, $T_0' \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Из оценки (3.5) (см. первое условие (4.1)) следует, что оператор $I + \Gamma_m B$ обратим. Из теоремы 6 (ее условия выполнены в силу обоих условий из (4.1)) вытекает подобие оператора $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ оператору вида $\widetilde{L}_{bc} = L_{bc}^0 - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ определен равенством (3.8). Поскольку $\widetilde{B}$ принадлежит $\mathfrak{U}$ (в силу теоремы 6), то $\widetilde{L}_{bc} = L_{bc}^0 - \widetilde{B}$ (а следовательно, и оператор $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$) подобен оператору $L_{bc}^0 - J_m X_*$ вида (4.2), где оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения (4.3). Применяя к обеим частям этого уравнения трансформатор J_m, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}J_m X_* &= J_m(\widetilde{B}\Gamma_m X_*) + J_m\widetilde{B}\\ &= J_m\widetilde{B} + J_m(\widetilde{B}\Gamma_m\widetilde{B}) + J_m(\widetilde{B}\Gamma_m(X_* - \widetilde{B})) = J\widetilde{B} + J(\widetilde{B}\Gamma\widetilde{B}) + T_0,\end{aligned}$$

где $T_0 = T_0'(L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}$, $T_0' \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. При этом использовался тот факт, что произведение двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором и что операторы $J_m X - JX$, $\Gamma_m X - \Gamma X$, $X \in \mathfrak{U}$, $m \in \mathbb{N}$, являются операторами конечного ранга.

Ясно, что оператор преобразования L_{bc} в оператор $L_{bc}^0 - J_m X_*$ совпадает с оператором U_m из (4.4). Поскольку $\Gamma_m B, \Gamma_m X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то оператор V_m из (4.4) принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Теорема доказана. □

Далее через l^p, $p \geqslant 1$, будет обозначаться пространство суммируемых со степенью p последовательностей. Прежде чем приступить к доказательству основных результатов, приведем следующую лемму.

Лемма 9. *Собственные значения* $\widetilde{\mu}_n^{\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, *матрицы*

$$\begin{pmatrix} c_1(n) & c_2(n)\\ c_3(n) & c_4(n)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1(n) & d_2(n)\\ d_3(n) & d_4(n)\end{pmatrix},$$

где $c_j \in l^2$, $d_j \in l^1$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, *допускают представление вида*

$$\widetilde{\mu}_n^{\pm} = \frac{c_1(n) + c_4(n)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(c_1(n) - c_4(n))^2 + 4c_2(n)c_3(n)} + \varepsilon_n^{\pm},$$

где последовательности $(\varepsilon_n^{\pm})$ *принадлежат* $l^{\frac{4}{3}}$, *т. е.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n^{\pm}|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Приступим к доказательству основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Полученная теорема 7 позволяет установить асимптотику собственных значений оператора L_{bc}. Из леммы 1 из [22] и теоремы 7 следует, что оператор $L^0_{bc} - J_m X_*$ вида (4.2) перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)}$, P_k, $k \geqslant m+1$ (см. введение). Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$ (где $P_{(m)} = \sum\limits_{j \leqslant m} P_j$), $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$, $j \geqslant m+1$, инвариантны для оператора $L^0_{bc} - J_m X_*$. Из подобия операторов L_{bc} и $L^0_{bc} - J_m X_*$ следует равенство $\sigma(L_{bc}) = \sigma(\widetilde{L}_{bc}) = \sigma(L^0_{bc} - J_m X_*)$. Легко установить, что оператор $L_{bc} = L^0_{bc} - B$ (как и оператор $L^0_{bc} - J_m X_*$) является оператором с компактной резольвентой. Поэтому если $\lambda_0 \in \sigma(L^0_{bc} - J_m X_*)$, то существует собственный вектор $x_0 \in \mathrm{D}(L^0_{bc})$ такой, что $(L^0_{bc} - J_m X_*) x_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, из вида оператора $J_m X_*$ следуют равенства

$$A_{(m)} P_{(m)} x_0 = \lambda_0 P_{(m)} x_0, \quad A_j P_j x_0 = \lambda_0 P_j x_0, \ \ j \geqslant m+1, \tag{4.6}$$

где

$$A_{(m)} = (L^0_{bc} - J_m X_* \,|\, \mathcal{H}_{(m)})$$

— сужение оператора $L^0_{bc} - J_m X_*$ на подпространство $\mathcal{H}_{(m)}$;

$$A_j = (L^0_{bc} - J_m X_* \,|\, \mathcal{H}_j)$$

— сужение оператора $L^0_{bc} - J_m X_*$ на подпространство $\mathcal{H}_j$, $j \geqslant m+1$. Ввиду того, что $I = P_{(m)} + \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} P_j$ (система проекторов P_j, $j \geqslant m+1$, $P_{(m)}$, образует разложение единицы), из (4.6) следует, что хотя бы один из векторов $P_j x_0$, $j \geqslant m+1$, $P_{(m)} x_0$ ненулевой. Следовательно, λ_0 — собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов A_j, $j \geqslant m+1$, $A_{(m)}$. Таким образом, установлено включение

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma(\widetilde{L}_{bc}) = \sigma(L^0_{bc} - J_m X_*) \subset \sigma(A_{(m)}) \bigcup \Big(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma(A_j) \Big).$$

Обратное включение очевидно. Следовательно, имеют место равенства

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma(\widetilde{L}_{bc}) = \sigma(L^0_{bc} - J_m X_*) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \Big(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma(A_j) \Big). \tag{4.7}$$

Из представления (4.7) следует (ввиду конечномерности подпространства $\mathcal{H}_{(m)}$, $\dim \mathcal{H}_{(m)} = m$), что множество $\sigma(A_{(m)}) = \sigma_{(m)}$ конечно. Также подпространства $\mathcal{H}_j$, $j \geqslant m+1$, являются двумерными. Таким образом, операторы $A_{(m)}, A_j, j \geqslant m+1$, корректно определены.

Поскольку каждый из операторов L_{bc} подобен соответствующему оператору $\widetilde{L}_{bc}$, то все дальнейшие вычисления будем проводить с $\widetilde{L}_{bc}$.

Вычислим собственные значения оператора L_{bc}. Для этого будем использовать представления матриц, описанных в (3.1) и (3.2), а также разложения функций a, b в их ряды Фурье:

$$a(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathrm{e}^{2i\pi lt}, \quad b(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l \mathrm{e}^{2i\pi lt}.$$

Предположим, что $bc = per$. Из формулы (3.1) следует, что блочная матрица $(\mathfrak{A}_{nn}^{per})$, $n \in \mathbb{N}$, оператора B_1 имеет вид

$$\mathfrak{A}_{nn}^{per} = -(2\pi n)^2 \begin{pmatrix} 0 & a_n & a_{-n} \\ 0 & a_0 & a_{-2n} \\ 0 & a_{2n} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно для $bc = ap$ блочная матрица $(\mathfrak{A}_{nn}^{ap})$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\mathfrak{A}_{nn}^{ap} = -(\pi(2n+1))^2 \begin{pmatrix} a_0 & a_{-2n-1} \\ a_{2n+1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Блочно-диагональные элементы $\mathcal{C}_{nn}^{per}$, $n \in \mathbb{N}$, матрицы оператора $B\Gamma B$ в случае $bc = per$ представимы в виде

$$\mathcal{C}_{nn}^{per} = n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{l^2}{l^4 - n^4} \begin{pmatrix} 0 & a_l a_{n-l} + a_{-l} a_{n+l} & a_l a_{-n-l} + a_{-l} a_{-n+l} \\ 0 & a_{n-l} a_{l-n} + a_{n+l} a_{-n-l} & 2a_{l-n} a_{-n-l} \\ 0 & 2a_{n+l} a_{n-l} & a_{n+l} a_{-n-l} + a_{n-l} a_{l-n} \end{pmatrix}.$$

Соответственно для случая $bc = ap$ матрица имеет следующий вид:

$$\mathcal{C}_{nn}^{ap} = (2n+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} \times \begin{pmatrix} a_{n-l} a_{l-n} + a_{n+l+1} a_{-n-l-1} & 2a_{l-n} a_{-n-l-1} \\ 2a_{n+l+1} a_{n-l} & a_{n+l+1} a_{-n-l-1} + a_{n-l} a_{l-n} \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 7, представление (4.5) и лемму 9, получим, что остаток представим в виде $\gamma_n n^2$, где

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |\gamma_n|^{\frac{4}{3}} < \infty.$$

Таким образом, при $n \geqslant m+1$ асимптотика собственных значений для оператора L_{per} принимает вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_n^{\mp} &= \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 - n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l}a_{-n-l} + a_{n-l}a_{l-n})l^2}{l^4 - n^4} \\
&\mp (2\pi n)^2 \Bigg(a_{-2n}a_{2n} + \frac{1}{4\pi^4} \Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg) \\
&- \frac{a_{-2n}}{2\pi^2} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4 - n^4} - \frac{a_{2n}}{2\pi^2} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg)^{\frac{1}{2}} + \gamma_n n^2, \quad n \geqslant m+1.
\end{aligned}$$

Эту асимптотику собственных значений можно также представить в виде

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 + \gamma_n^{\mp} n^2, \tag{4.8}$$

где $(\gamma_n^{\mp})$ принадлежит l^2. Действительно, это справедливо в силу следующих рассуждений:

$$\Bigg| \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4 - n^4} \Bigg| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k||a_{2n+k}|}{k(k+2n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\xi}_k}{k+2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\xi}_k \xi_{k+2n},$$

где последовательность $(\widetilde{\xi}_k)$ принадлежит l^1 и последовательность ξ_{k+2n} суммируема со степенью больше 1. Тогда

$$\Bigg\| \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\xi}_k \xi_{k+2n} \Bigg\|_{l^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{\xi}_k| \|\xi\|_{l^2} < \infty.$$

Оценивая таким образом каждое из слагаемых в асимптотике собственных значений, получим справедливость формулы (4.8).

Аналогично рассуждая, для случая $bc = ap$ получим следующую асимптотику собственных значений оператора L_{ap}:

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 - (2n+1)^2$$
$$\times \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l+1}a_{-n-l-1} + a_{n-l}a_{l-n})(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} \mp (\pi(2n+1))^2 \Bigg(a_{-2n-1}a_{2n+1}$$
$$+ \frac{4}{\pi^4}\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} \Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} \Bigg)$$
$$- \frac{2a_{-2n-1}}{\pi^2} \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} - \frac{2a_{2n+1}}{\pi^2} \sum_{\substack{l=0\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2n+1)^4} \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \widetilde{\gamma}_n n^2, \quad n \geqslant m+1,$$

где $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} |\widetilde{\gamma}_n|^{\frac{4}{3}} < \infty$. Также справедлива следующая сокращенная формула для асимптотики собственных значений:

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 + \widetilde{\gamma}_n^{\mp} n^2,$$

где $(\widetilde{\gamma}_n^{\mp})$ принадлежит l^2. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. Если функция a является функцией ограниченной вариации, тогда согласно [27] справедлива следующая оценка для ее коэффициентов Фурье: $|a_n| \leqslant \frac{c_0}{|n|}$, где c_0 — некоторая константа. Тогда, проводя аналогичные рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, получим утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Оператор* $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$, $bc \in \{per, ap\}$, *спектрален по Данфорду* (см. [16]).

Далее будем рассматривать спектральные проекторы, которые описаны во введении. Отметим, что справедливо разложение единицы

$$I = \sum_{k \geqslant m+1} P_k + P_{(m)}, \quad I = \sum_{k \geqslant m+1} \widetilde{P}_k + \widetilde{P}_{(m)},$$

где проектор $\widetilde{P}_{(m)}$ имеет вид $\widetilde{P}_{(m)} = (I + V_m)P_{(m)}(I + V_m)^{-1}$.

Доказательство теоремы 3. Из теоремы 7 следует, что оператор L_{bc} подобен оператору $L_{bc}^0 - J_m X_*$ (см. формулу (4.2)) и что оператором преобразования является U_m вида (4.4). Оператор V_m из (4.4) имеет вид

$V_m = \Gamma_m B + \Gamma_m X_* + (\Gamma_m B)(\Gamma_m X_*)$. Из равенства $L^0_{bc} - B = (I + V_m)(L^0_{bc} - J_m X_*)(I + V_m)^{-1}$ и леммы 1 из [22] следует, что спектральные проекторы $\widetilde{P}(\Omega)$, $P(\Omega)$ подобны и, более того, оператор $\widetilde{P}(\Omega)$ допускает представление $\widetilde{P}(\Omega) = (I + V_m)P(\Omega)(I + V_m)^{-1}$. Следовательно, оператор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) &= (I + V_m)P(\Omega)(I + V_m)^{-1} - P(\Omega)\\ &= \big(V_m P(\Omega) - P(\Omega)V_m\big)(I + V_m)^{-1}.\end{aligned}$$

Сначала рассмотрим случай $bc = per$. Для дальнейшего исследования оценим величины $\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma_m X_*\|_2$, $\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma_m B\|_2$. Установим оценку для $\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2$. Согласно представлению (3.1), а также замечанию 3 имеем

$$\begin{aligned}\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2^2 = \|\Gamma_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} P(\Omega)\|_2^2 &= \Bigg\| \sum_{\substack{p \geqslant 0,\, j \geqslant k(\Omega)\\ p \neq j}}^{\infty} \frac{(P_p X_0 P_j)\lambda_j^{\frac{1}{2}}}{\lambda_p - \lambda_j} \Bigg\|_2^2\\ &\leqslant c^3 \max_{\substack{p \geqslant 0,\, j \geqslant k(\Omega)\\ p \neq j}} \frac{j^4}{(p^4 - j^4)^2} \sum_{\substack{p \geqslant 0,\, j \geqslant k(\Omega)\\ p \neq j}}^{\infty} \|P_p X_0 P_j\|_2^2\\ &\leqslant c^3 \max_{\substack{p \geqslant 0,\, j \geqslant k(\Omega)\\ p \neq j}} \frac{1}{(p^2 - j^2)^2} \|X_0\|_2^2 \leqslant \frac{c^3}{(2k(\Omega) - 1)^2} \|X_0\|_2^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}} \|X_0\|_2}{2k(\Omega) - 1},$$

где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ взято из представления $X_* = X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}}$, константа $c = (2\pi)^4$ в случае $bc = per$ и $c = (3\pi)^4$ для случая $bc = ap$.

Аналогичным образом получается оценка

$$\|P(\Omega)\Gamma_m X_*\|_2 \leqslant \frac{c^{\frac{3}{2}} \|X_0\|_2}{2k(\Omega) - 1}.$$

Далее оценим величину $\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2$. Так как оператор B_2 есть оператор умножения на функцию b из $\mathcal{H}$, то достаточно оценить величины $\|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2$ и $\|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2$. Используя матричные представления (3.1), (3.2), а также замечание 3, для случая $bc = per$ получим справедливость следующих неравенств:

$$\|\Gamma B_1 P(\Omega)\|_2^2 = \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^1, e_0)|^2 + \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^2, e_0)|^2$$

$$+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^1, e_p^1)|^2 + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^2, e_p^1)|^2 + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^1, e_p^2)|^2$$

$$+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j^2, e_p^2)|^2 = \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_j|^2(2\pi j)^4}{(2\pi j)^8} + \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_{-j}|^2(2\pi j)^4}{(2\pi j)^8}$$

$$+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j-p}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi p)^4-(2\pi j)^4)^2} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j-p}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi p)^4-(2\pi j)^4)^2}$$

$$+ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j+p}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi p)^4-(2\pi j)^4)^2} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j+p}|^2(2\pi j)^4}{((2\pi p)^4-(2\pi j)^4)^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_j|^2}{j^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{j\geqslant k(\Omega)}^{\infty} \frac{|a_{-j}|^2}{j^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j-p}|^2}{(p^2-j^2)^2}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j-p}|^2}{(p^2-j^2)^2} + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{j+p}|^2}{(p^2-j^2)^2}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j, j\geqslant k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{-j+p}|^2}{(p^2-j^2)^2} \leqslant \frac{1}{2\pi^4}\|a\|_{l^2}^2 \Bigg(\sum_{p=1}^{k(\Omega)-1} \frac{1}{(p+k(\Omega))^2(k(\Omega)-p)}$$

$$+ \sum_{p=k(\Omega)+1}^{\infty} \frac{1}{(p+k(\Omega))^2(p-k(\Omega))} \Bigg) \leqslant \frac{\|a\|_{l^2}^2 c_1^2}{k^2(\Omega)} \ln\left(\frac{(k(\Omega)-1)(2k(\Omega)+1)}{k(\Omega)+1} \right),$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа. Следовательно, справедлива оценка

$$\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{c_1\|a\|_{l^2}}{k(\Omega)} \left(\ln\left(\frac{(k(\Omega)-1)(2k(\Omega)+1)}{k(\Omega)+1} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично рассуждая, получим такую же оценку (с константой $c_2 > 0$) для случая $bc = ap$. Аналогичное неравенство справедливо для нормы $\|P(\Omega)\Gamma_m B\|_2$ в обоих случаях.

Используя полученные оценки, неравенство (3.5), а также представление оператора V_m, имеем

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \|V_m P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)V_m\|_2 \leqslant \|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2 + \|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma_m X_*\|_2 + \|\Gamma_m X_* P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 \leqslant \frac{3c_1\|a\|_{l^2}}{k(\Omega)}\left(\ln\left(\frac{(k(\Omega)-1)(2k(\Omega)+1)}{k(\Omega)+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3c^{\frac{3}{2}}\|X_0\|_2}{2k(\Omega)-1} \leqslant \frac{\widetilde{M}\big(\ln k(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $\widetilde{M} > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $k(\Omega)$, и $c = (2\pi)^4$ для случая $bc = per$ и $c = (3\pi)^4$ для случая $bc = ap$. Теорема доказана. □

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 справедлива следующая оценка:*

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \leqslant \frac{M_1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M_1 > 0$ — некоторая константа. В этом случае Ω — одноточечное множество $\{n\}$ и суммирования по j не производится.

Следствие 3. *Если выполнены условия теоремы 3, то верна следующая оценка:*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \frac{M_1^2}{m^2}.$$

Доказательство теоремы 4. Из формул разложения единицы и теоремы 3 имеем

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2$$

$$= \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k\|_2$$

$$= \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k \Big\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\big(\ln n\big)^{\frac{1}{2}}}{n}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 4. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ и L_{bc}^0:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

§5. Построение аналитической полугруппы операторов

В этом параграфе полученные теоремы о спектральных свойствах дифференциального оператора $L_{bc} = L_{bc}^0 - B$ (особенно теорема 7) будут использованы для доказательства секториальности оператора $-L_{bc} = -L_{bc}^0 + B$ и построения аналитической полугруппы, генератором которой он является.

Определение 4 (см. [28]). Будем называть линейный оператор

$$C : \mathrm{D}(C) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ секториальным оператором, если он замкнут и плотно определен и, кроме того, для некоторого $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, некоторого $M \geqslant 1$ и некоторого вещественного a сектор $S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \varphi, \lambda \neq a\}$ лежит в резольвентном множестве оператора C и $\|(\lambda - C)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}$ для всех $\lambda \in S_{a,\varphi}$.

Отметим, что в следующей теореме и ее доказательстве используются обозначения теоремы 7.

Теорема 8. *Дифференциальный оператор $-L_{bc} = -L_{bc}^0 + B$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$. При этом справедливо представление вида*

$$T(t) = U_m \widetilde{T}(t) U_m^{-1},$$

где $U_m = (I + \Gamma_m B)(I + \Gamma_m X_*)$ и $\widetilde{T} : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ — полугруппа, генератором которой является оператор $-L_{bc}^0 + J_m X_*$. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \bigoplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[0,1] = \mathcal{H}_{(m)} \bigoplus \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}_{(m)} = \mathrm{Im}\, P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \mathrm{Im}\,(I - P_{(m)})$, причем $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{C_k t} P_k x, \quad x \in \mathrm{L}_2[0,1],$$

где $C_k \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = \mathrm{Im}\, P_k$. Натуральное число m выбирается так, чтобы имело место утверждение теоремы 7.

Доказательство. По теореме 7 и формуле (4.7) оператор L_{bc} (соответственно и $-L_{bc}$) подобен оператору $L_{bc}^0 - J_m X_*$ (соответственно $-L_{bc}^0 + J_m X_*$), где $X_* = X_0 (L_{bc}^0)^{\frac{1}{2}}, X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно,

1)
$$\sigma(-L_{bc}) = \sigma(-L^0_{bc} + J_m X_*) = \sigma_m \bigcup \Big(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma_j \Big),$$
где σ_m — конечное множество;

2)
$$R(\lambda, -L_{bc}) = U_m R(\lambda, -L^0_{bc} + J_m X_*) U_m^{-1},$$
где U_m — оператор преобразования, и $\lambda \in \rho(-L_{bc}) = \rho(-L^0_{bc} + J_m X_*)$, $\lambda \notin \sigma(-L_{bc})$.

Для оценки резольвенты оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ рассмотрим равенства
$$\begin{aligned} -L^0_{bc} + J_m X_* - \lambda I &= (I + J_m X_*(-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1})(-L^0_{bc} - \lambda I) \\ &= (I + J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1})(-L^0_{bc} - \lambda I). \end{aligned}$$

Укажем сектор, для которого спектр оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ лежит в нем, и оператор $I + J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1}$ обратим. Согласно 1) спектр оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ состоит из объединения конечного множества и множества $\sigma_j, j \geqslant m+1$, где $\sigma_j = \{-\widetilde{\lambda}_j\}$. Все собственные значения оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ будут лежать в секторе $\gamma = \gamma_0 + 2\|X_0\|_2^2$, где γ_0 — сектор с вершиной в нуле и аргумент удовлетворяет условию $\frac{3\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{5\pi}{4}$. Для любого λ из γ оператор $I + J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1}$ обратим, и справедлива оценка $\|J_m X_0 (L^0_{bc})^{\frac{1}{2}} (-L^0_{bc} - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}$. Непосредственным вычислением устанавливается следующая оценка на резольвенту:
$$\|R(\lambda, -L^0_{bc} + J_m X_*)\| \leqslant \frac{2}{|\pi^4 + \lambda|} \leqslant \frac{2}{|\lambda - 2\|X_0\|_2^2|}.$$

Следовательно, оператор $-L^0_{bc} + J_m X_*$ (соответственно и оператор $-L_{bc}$) является секториальным. Тогда согласно теореме II.4.6 из [29] оператор $-L_{bc}$ является генератором аналитической полугруппы $T(t) = U_m \widetilde{T}(t) U_m^{-1}$ (в силу подобия операторов $-L_{bc}$ и $-L^0_{bc} + J_m X_*$), где
$$\widetilde{T}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, -L^0_{bc} + J_m X_*)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Рассмотрим ортогональное разложение
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \bigoplus \mathcal{H}^{(m)}, \text{ где } \mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}, \quad \mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im} \Big(\sum_{k \geqslant m+1} P_k \Big).$$

Соответственно оператор $-L^0_{bc} + J_m X_*$ допускает разложение
$$-L^0_{bc} + J_m X_* = \big(-\widetilde{A}_{(m)} + P_{(m)} \,|\, \mathcal{H}_{(m)} \big) \bigoplus \widetilde{A}^{(m)},$$

где $\widetilde{A}_{(m)}$ — сужение оператора $L^0_{bc} - J_m X_*$ на $\mathcal{H}_{(m)}$ и $\widetilde{A}^{(m)}$ — сужение оператора $-L^0_{bc} + J_m X_*$ на $\mathcal{H}^{(m)}$. Тогда согласно [29] полугруппа $T(t)$ подобна полугруппе $T_{(m)}(t) \bigoplus T^{(m)}(t)$, причем $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{C_k t} P_k x, \quad x \in \mathcal{H},$$

где $C_k \in \operatorname{End} \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$. Используя вычисления, проведенные при доказательстве теоремы 1, получим следующую формулу матрицы оператора C_k для оператора L_{per}:

$$-(2\pi k)^4 I - \begin{pmatrix} 0 & a_k - a_l a_{k-l} - a_{-l} a_{k+l} & a_{-k} - a_l a_{-k-l} - a_{-l} a_{-k+l} \\ 0 & v_1^{per}(k) + k^2 \xi_n^1 & v_2^{per}(k) + k^2 \xi_n^2 \\ 0 & v_3^{per}(k) + k^2 \xi_n^3 & v_4^{per}(k) + k^2 \xi_n^4 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица и

$$v_1^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_0 - k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{(a_{k-l} a_{l-k} + a_{k+l} a_{-k-l}) l^2}{l^4 - k^4},$$

$$v_2^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_{-2k} - 2k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{a_{l-k} a_{-l-k} l^2}{l^4 - k^4},$$

$$v_3^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_{2k} - 2k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{a_{k-l} a_{l+k} l^2}{l^4 - k^4},$$

$$v_4^{per}(k) = (2\pi k)^2 a_0 - k^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{(a_{k+l} a_{-l-k} + a_{k-l} a_{l-k}) l^2}{l^4 - k^4},$$

и (ξ_n^1), (ξ_n^2), (ξ_n^3), $(\xi_n^4) \in l^1$.

Соответственно для оператора L_{ap} справедливо следующее представление этой матрицы:

$$-(\pi(2k+1))^4 I - \begin{pmatrix} v_1^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^5 & v_2^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^6 \\ v_3^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^7 & v_4^{ap}(k) + (2k+1)^2 \xi_n^8 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица и

$$v_1^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_0 - (2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{(a_{l-k}a_{k-l} + a_{k+l+1}a_{-k-l-1})(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

$$v_2^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_{-2k-1} - 2(2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{a_{l-k}a_{-l-k-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

$$v_3^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_{2k+1} - 2(2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{a_{k-l}a_{l+k+1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

$$v_4^{ap}(k) = (\pi(2k+1))^2 a_0 - (2k+1)^2 \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\infty} \frac{(a_{k+l+1}a_{-l-k-1} + a_{k-l}a_{l-k})(2l+1)^2}{(2l+1)^4 - (2k+1)^4},$$

и (ξ_n^5), (ξ_n^6), (ξ_n^7), $(\xi_n^8) \in l^1$. Теорема доказана. □

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Михлин С. Г., *Вариационные методы в математической физике*, Наука, М., 1970.

[2] Коллатц Л., *Задачи на собственные значения с техническими приложениями*, Наука, М., 1968.

[3] Якубович В. А., Старжинский В. М., *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения*, Наука, М., 1972.

[4] Korotyaev E., Lobanov I., *Schrödinger operators on zigzag nanotubes*, Ann. Henri Poincare **8** (2007), no. 6, 1151–1176.

[5] Badanin A., Korotyaev E., *Spectral asymptotics for periodic fourth-order operators*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2005**, no. 45, 2775–2814.

[6] Баданин А. В., Коротяев Е. Л., *Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №5, 1–48.

[7] Badanin A., Korotyaev E., *Eigenvalue asymptotics for fourth order operators on the unit interval*, `arXiv:1309. 3449`.

[8] Badanin A., Korotyaev E., *Even order periodic operators on the real line*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2012**, no. 5, 1143–1194.

[9] Veliev O. A., *On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions*, Israel J. Math. **176** (2010), 195–207.

[10] Mikhailets V., Molyboga V., *Singular eigenvalue problems on the circle*, Methods Funct. Anal. Topology **10** (2004), no. 3, 44–53.

[11] Mikhailets V., Molyboga V., *Uniform estimates for the semi-periodic eigenvalues of the singular differential operators*, Methods Funct. Anal. Topology **10** (2004), no. 4, 30–57.

[12] Molyboga V., *Estimates for periodic eigenvalues of the differential operator* $(-1)^m d^{2m}/dx^{2m} + V$ *with* V*-distribution*, Methods Funct. Anal. Topology **9** (2003), no. 2, 163–178.

[13] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

[14] Джаков П., Митягин Б. С., *Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака*, Успехи мат. наук **61** (2006), №4, 77–182.

[15] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[16] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., *Линейные операторы. Спектральные операторы.* Т. III, Мир, М., 1974.

[17] Агранович М. С., *Спектральные свойства задач дифракции*, В кн.: Войтович Н. Н., Кацелембаум Б. З., Сивов А. Н., *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции*, Наука, М., 1977, с. 289-416.

[18] Баскаков А. Г., *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов*, Сиб. мат. ж. **24** (1983), №1, 21–39.

[19] Баскаков А. Г., *Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения **21** (1985), №4, 555–562.

[20] Баскаков А. Г., *Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **50** (1986), №3, 435–457.

[21] Баскаков А. Г., *Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов*, Изв. РАН. Сер. мат. **58** (1994), №4, 3–32.

[22] Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О., *Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом*, Изв. РАН. Сер. мат. **75** (2011), №3, 3–28.

[23] Поляков Д. М., *Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами*, Сиб. мат. ж. **56** (2015), №1, 165–184.
[24] Поляков Д. М., *Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка*, Вестник ВГУ. Сер. физ. мат. **2012**, №1, 179–181.
[25] Поляков Д. М., *О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями*, Изв. вузов. Мат. **2015**, №5, 75–79.
[26] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
[27] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды.* Т. 1, Мир, М., 1965.
[28] Хенри Д., *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
[29] Engel K.-J., Nagel R., *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, of Grad. Texts in Math., vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000.

Воронежский
государственный университет
НИИ математики ВГУ
394006, Воронеж
Университетская пл., 1
Россия
E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Поступило 21 октября 2014 г.