



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Иванишвили, С. В. Кисляков, Исправление до функции с редким спектром и равномерно сходящимся рядом Фурье, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2010, том 376, 25–47

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

23 января 2025 г., 17:24:08



П. Иванишвили, С. В. Кисляков

**ИСПРАВЛЕНИЕ ДО ФУНКЦИИ С РЕДКИМ  
СПЕКТРОМ  
И РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИМСЯ РЯДОМ ФУРЬЕ**

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $G$  – компактная конечномерная абелева группа,  $\Gamma$  – двойственная с ней дискретная группа. В статье [1] было доказано следующее обобщение классической теоремы Меньшова об исправлении: любую непрерывную функцию  $f$  на  $G$  изменением на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в функцию с равномерно сходящимся рядом Фурье и редким спектром. При этом равномерная сходимость ряда  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma) \gamma$  могла пониматься в любом разумном смысле.

Например, характеры могли быть просто занумерованы произвольным образом – тогда речь шла о сходимости последовательных частичных сумм в этой нумерации. В случае, когда  $G$  –  $n$ -мерный тор  $\mathbb{T}^n$ , допускалась, например, сходимость частичных сумм по шарам либо по прямоугольникам и т.п. Условие редкости спектра гласило, что спектр исправленной функции можно поместить в объединение  $R_1 \cup R_2$ , где  $(R_1, R_2)$  – предписанная заранее *достаточная пара* подмножеств группы  $\Gamma$ . Последнее означает, что для любого конечного множества  $K \subset \Gamma$  найдется такой характер  $\lambda \in \Gamma$ , что  $-\lambda + K \subset R_1$ ,  $\lambda + K \subset R_2$ .

Для торов близкий результат иным методом получил примерно в то же время Ф. Г. Арутюнян, см. [2, 3]. Его заметка [2], в которой рассматривался лишь случай окружности, послужила второму автору мотивом для исследования, описанного в работе [1]. Отметим, что на настоящую статью повлиял, среди прочего, некий момент из [3] (подробности см. ниже), хотя мы и придерживаемся здесь подхода из [1].

Результат работы [1] тесно связан с аппроксимацией в простран-

---

*Ключевые слова:* теорема Меньшова об исправлении.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 08-01-00358.

ствах  $L^p(G)$  при  $p < 1$ . Говоря конкретно, в его основе лежит рассуждение, использованное А. Б. Александровым [4], чтобы доказать, что линейные комбинации характеров из объединения  $R_1 \cup R_2$  плотны в  $L^p(G)$  ( $p < 1$ ) для любой достаточной пары  $(R_1, R_2)$ . С тех пор в теории аппроксимации спектральными подпространствами в  $L^p$  ( $p < 1$ ) на группах произошел заметный прогресс, см. [5]. Этим можно воспользоваться, чтобы уточнить теорему об исправлении из [1], что мы и делаем. Заодно мы добьемся равномерной сходимости ряда Фурье в несколько более сильном смысле, чем это допускалось в [1]. В сущности, все уточнения получаются с помощью более правильных слов, сказанных в нужном месте, а суть действий в сравнении с [1] почти не меняется. Однако, на наш взгляд, нововведения в совокупности складываются в достаточно интересные формулировки. Тем не менее, жанр этой статьи – заметка, несмотря на ее размер.

Чтобы сделать статью читаемой, мы вынуждены будем повторить некоторые рассуждения из [1].

В [1] рассматривались также и некомпактные локально-компактные абелевы группы  $G$  – например,  $\mathbb{R}^n$ ; тогда речь шла о равномерной сходимости интегралов Фурье. Здесь для простоты мы ограничимся компактными группами, хотя распространить все на случай некомпактных групп не составляет труда.

Заканчивая Введение, упомянем главный (пожалуй) технический инструмент из [1]. Пусть  $0 < r < 1$ ,  $\mathbb{T}$  – единичная окружность с нормированной мерой Лебега  $m$ . Тогда  $\|1 - 2^{-1}(z + \bar{z})\|_{L^r(\mathbb{T}, m)} < 1$ .

Это утверждение очень просто – достаточно заметить, что функция  $1 - 2^{-1}(z + \bar{z}) = 1 - \cos \theta$  ( $z = e^{i\theta}$ ) неотрицательна, непостоянна и обладает единичным интегралом по нормированной мере Лебега на окружности (на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ). Мы находим уместным сразу сформулировать более тонкую теорему, доказанную в [5], на которой основана существенная часть дальнейшего.

**Теорема А** (см. [5, теорема 9.7]). Пусть  $G$  – компактная абелева группа, а  $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  – конечное подмножество двойственной группы  $\Gamma$  такое, что  $0 \notin E$ , но  $n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k = 0$  для некоторых неотрицательных целых чисел  $n_1, \dots, n_k$ , из которых не все равны нулю. Тогда найдутся такое число  $r$ ,  $0 < r < 1$ , и комплексные коэффициенты  $a_1, \dots, a_k$ , что тригонометрический полином  $p(x) = \sum_{j=1}^k a_j \gamma_j(x)$  отстоит от 1 в  $L^r(G)$  меньше, чем на 1.

В этом утверждении и всюду далее мера Хаара  $m$  на  $G$  считается вероятностной. Условимся еще о некоторых обозначениях и терминах. Компактную группу  $G$  мы всегда записываем мультипликативно, а двойственную с ней дискретную группу  $\Gamma$  – аддитивно. Под тригонометрическим полиномом на группе  $G$  мы понимаем произвольную линейную комбинацию ее характеров. Далее, зафиксируем (уже использованное!) обозначение для преобразования Фурье:  $\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(x) dm(x)$ ,  $f \in L^1(G)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ .

На самом деле в [5] был доказан более сильный результат: условие на множество  $E$ , приведенное в теореме А, не только достаточно, но и необходимо для существования полинома  $p$ . Это условие еще можно пересказать так: полугруппа, порожденная множеством  $E \not\equiv 0$ , содержит ноль. При такой формулировке конечность множества  $E$  несущественна. Отметим, что в случае, когда  $E \cap (-E) = \emptyset$ , может случиться так, что заключение теоремы А выполнено *не для всех*  $r < 1$ . В [5] содержится некая информация о том, для каких именно  $r$  теорема верна, но, строго говоря, нам это не понадобится.

### §1. ФОРМУЛИРОВКА

В этом параграфе мы сформулируем основную теорему, в следующем – обсудим формулировку, а в §3 – наметим доказательство. В отличие от [1], основной результат будет представлен здесь скорее в виде “схемы”, конкретизации которой будут описаны в §2.

**1.1. Спектр.** Начнем с обобщения понятия достаточной пары множеств. Пусть  $l$  – натуральное число,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma^l$  – упорядоченный набор из  $l$  характеров группы  $G$ , а  $m = (m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}^l$ . Через  $\langle m, \gamma \rangle$  мы будем обозначать характер  $m_1\gamma_1 + \dots + m_l\gamma_l$ , т.е. функцию  $x \mapsto \gamma_1(x)^{m_1} \dots \gamma_l(x)^{m_l}$  на группе  $G$ .

*Шаблоном* (точнее, *l-шаблоном*) мы будем называть любое конечное множество  $M = \{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\} \subset \mathbb{Z}^l$  такое, что  $m^{(j)} \neq 0$  при всех  $j$ , но существуют неотрицательные целые числа  $n_1, \dots, n_k$ , не равные нулю, для которых  $n_1 m^{(1)} + \dots + n_k m^{(k)} = 0$ . Иными словами, требуется, чтобы полугруппа, порожденная множеством  $M$ , содержала ноль – как в теореме А. Набор  $(R_1, \dots, R_k)$  из  $k$  подмножеств группы  $\Gamma$  называется *достаточным с шаблоном  $M$*  (или просто  *$M$ -достаточным*), если для любого конечного множества  $K \subset \Gamma$  найдется такой упорядоченный набор  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$  из характеров группы  $G$ , что  $\langle m^{(j)}, \gamma \rangle + K \subset R_j$  при  $j = 1, \dots, k$ .

Из определения видно, что достаточные пары, упомянутые во Введении – это просто достаточные наборы с 1-шаблоном  $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ .

**1.2. Базисы суммирования.** Обозначим через  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G)$  множество всех тригонометрических полиномов на группе  $G$ . Для любого конечного множества  $E \subset \Gamma$  соответствующий оператор частичной суммы ряда Фурье,

$$P_E f = \sum_{\gamma \in E} \widehat{f}(\gamma) \gamma,$$

определен по крайней мере на  $\mathcal{P}$ . Пусть  $\mathcal{B}$  – система конечных подмножеств группы  $\Gamma$ . Введем на множестве  $\mathcal{P}$  полунорму

$$\|f\| = \sup_{E \in \mathcal{B}} \|P_E f\|. \quad (1)$$

Будем рассматривать только такие системы  $\mathcal{B}$ , что для любого конечного множества  $K \subset \Gamma$  найдется множество  $E \in \mathcal{B}$ , для которого  $E \supset K$ . Тогда формула (1) определяет норму, мажорирующую норму  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in G} |f(t)|$ . Обозначим через  $u(G, \mathcal{B})$  пополнение пространства  $\mathcal{P}$  по этой норме.

С точностью до деталей, о которых речь впереди,  $u(G, \mathcal{B})$  и будет тем самым пространством функций с равномерно сходящимся рядом Фурье, которым мы будем заниматься. Тип равномерной сходимости определяется системой  $\mathcal{B}$ , которую мы будем называть *базисом суммирования*. Разумеется, нам выгодно включить как можно больше множеств в систему  $\mathcal{B}$ , однако *все* конечные множества (обозначим их совокупность через  $\mathcal{F}_\Gamma$ ) включить заведомо не удастся.<sup>1</sup> Действительно,  $u(G, \mathcal{F}_\Gamma)$  совпадает с пространством  $l^1(\Gamma)$  всех абсолютно сходящихся рядов Фурье на группе  $G$ , а для него теорема об исправлении уже неверна (см., например, обсуждение в [6]). Следующее условие, помимо прочего, ограничивает “размер” базиса  $\mathcal{B}$ . Если  $K$  – конечное подмножество группы  $\Gamma$ , обозначим через  $K_{\mathcal{B}}$  объединение тех множеств  $E \in \mathcal{B}$ , для которых оба множества  $K \cap E$  и  $K \setminus E$  непусты (т.е.  $E$  *разбивает*  $K$ ).

**Определение 1.** *Базис суммирования  $\mathcal{B}$  и  $M$ -достаточный набор  $(R_1, \dots, R_k)$  подмножеств группы  $\Gamma$  называются согласованными,*

<sup>1</sup>Если сама группа  $\Gamma$  бесконечна – но только в этом случае задача об исправлении и содержательна.

если для любого конечного множества  $K \subset \Gamma$  набор  $(R_1 \setminus K_B, \dots, R_k \setminus K_B)$  является достаточным с тем же самым  $l$ -шаблоном  $M$ .

В статье [1] рассматривалось одно конкретное семейство базисов  $\mathcal{B}$ , которое действительно было согласовано с достаточными парами – это проверялось во вспомогательной лемме. Здесь нам удобнее пока ввести условие согласованности как постулат, поскольку конкретные примеры базисов суммирования будут устроены сложнее, чем в [1].

**1.3. Пространство  $U$  и основная теорема.** Пусть заданы шаблон  $M$  и  $M$ -достаточный набор  $R = (R_1, \dots, R_k)$  подмножеств группы  $\Gamma$ . Пусть еще  $\mathcal{B}$  – базис суммирования в  $\Gamma$ . Обозначим через  $u(G, \mathcal{B}, R_j)$  множество тех функций  $f$  из  $u(G, \mathcal{B})$ , для которых  $\widehat{f}(\gamma) = 0$  при  $\gamma \notin R_j$ . Наконец, пусть  $U = U(G, \mathcal{B}, R)$  – это множество всех сумм вида  $h = f_1 + \dots + f_k$ , где  $f_i \in u(G, \mathcal{B}, R_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Снабдим пространство  $U$  нормой

$$\|h\|_U = \inf \sum_{1 \leq j \leq k} \|f_j\|_{u(G, \mathcal{B}, R_j)},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям функции  $h$  в виде, указанном выше. Стоит отметить, что если множества  $R_j$  попарно не пересекаются (а так и будет во всех интересных примерах), то такое представление единственно. Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

**Теорема 1.** *Предположим, что система  $R$  и базис суммирования  $\mathcal{B}$  согласованы. Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  и всякой функции  $f \in L^\infty(G)$  существует функция  $g \in U$  такая, что  $m\{f \neq g\} \leq \varepsilon$  и  $\|g\|_U \leq C\varepsilon^{-D}\|f\|_\infty$ . Константы  $C$  и  $D$  не зависят от  $f$ .*

## §2. ОБСУЖДЕНИЕ

**2.1.** Начнем с примеров, показывающих, как могут быть устроены достаточные наборы множеств. В статье [1] использовался только один шаблон, а именно,  $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$  (т.е. параметр  $l$  равен 1). Как уже отмечалось, ему соответствует то, что во Введении было названо достаточными парами. Типичный пример достаточной пары  $(R_1, R_2)$  в случае, когда  $G$  – это тор  $\mathbb{T}^n$ , выглядит так. Пусть  $V_k$  – попарно непересекающиеся шары в  $\mathbb{R}^n$  с радиусами, стремящимися к бесконечности; положим  $R_1 = \bigcup_{k \geq 1} (V_k \cap \mathbb{Z}^n)$ ,  $R_2 = -R_1$ .

Достаточные наборы с шаблоном  $\{-1, 2\} \subset \mathbb{Z}$  устроены несколько иначе. Для торов  $\mathbb{T}^n$ , например, очевидно, существуют  $\{-1, 2\}$ -достаточные наборы  $(R_1, R_2)$ , для которых  $R_1 \cap (-R_2) = \emptyset$ . Это интересно и для группы окружности  $\mathbb{T}$ .

Важный пример  $l$  шаблона с  $l > 1$  доставляет набор  $M_l = \{e_1, \dots, e_l, -(e_1 + \dots + e_l)\}$  из  $l + 1$  элемента группы  $\mathbb{Z}^l$ . Здесь через  $e_j$  обозначен  $j$ -й координатный орт, т.е. вектор, у которого на  $j$ -м месте стоит 1, а на остальных — нули. Очевидно, что набор  $(R_1, \dots, R_{l+1})$  подмножеств группы  $\Gamma$  является  $M_l$ -достаточным тогда и только тогда, когда для каждого конечного множества  $K \subset \Gamma$  существуют такие характеры  $\gamma_1, \dots, \gamma_{l+1} \in \Gamma$ , что  $\gamma_1 + \dots + \gamma_{l+1} = 0$  и  $\gamma_j + K \subset R_j$ ,  $j = 1, \dots, l + 1$ .

Для тора  $\mathbb{T}^2$  в качестве  $G$ , примеры  $M_2$ -достаточных множеств получаются следующим образом. Рассмотрим конфигурацию из трех непересекающихся кругов одного радиуса  $r$  с центрами на трех лучах, исходящих из начала координат под углом  $120^\circ$  друг к другу; считаем, что центры удалены на равные расстояния от начала. См. рис. 1.

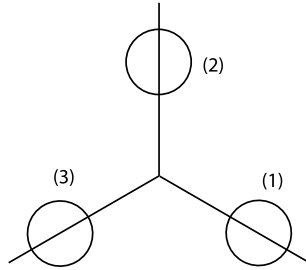


Рис. 1. Элемент построения.

Теперь рассмотрим последовательность таких конфигураций; пусть  $r_s$  — радиусы кругов  $s$ -й конфигурации. Предположим, что  $r_s \rightarrow \infty$  и что все круги в совокупности попарно не пересекаются. В остальном взаимное расположение конфигураций произвольно (каждая может быть повернута вокруг начала на какой-то угол относительно конфигурации на рис. 1). Разные конфигурации не обязаны быть гомотетичны (отношение радиуса  $r_s$  к расстоянию от центра круга до начала координат может быть разным для разных конфигураций). Искомый набор  $(R_1, R_2, R_3)$  возникает так:  $R_i$  — это объединение кругов, помеченных индексом  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в разных конфигурациях,

пересеченное с решеткой  $\mathbb{Z}^2$ . Заметим, что среди этих наборов есть такие, в которых  $-R_i$  не пересекается ни с одним из множеств  $R_1, R_2, R_3$ .

Читатель легко представит себе, как выглядят похожие множества для шаблонов  $M_l$  с другими  $l$  в случае торов любой размерности. Нетрудно также представить себе и возможности, доставляемые более причудливыми шаблонами (например,  $\{e_1, 5e_2, 10e_3, -e_1 - 5e_2 - 10e_3\}$  в случае  $l = 3$  и т.п.).

Во всех этих примерах множества  $R_i$ , составляющие достаточный набор, — относительно небольшие подмножества группы  $\Gamma$ . Вообще говоря, не для всякой группы найдется достаточный набор из “малых” множеств, отвечающий произвольному наперед заданному шаблону. Так, если  $G = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  — диадическая группа (соответственно,

$\Gamma = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ), то, например, для 1-шаблона  $M = \{-2, 2\}$  нет никаких

$M$ -допустимых наборов, кроме набора  $(\Gamma, \Gamma)$ . Все, однако, и в этом случае будет в порядке для шаблона  $\{-1, 1\}$ .

**2.2. При построении базисов суммирования** мы начнем примерно как в [1], а потом введем важное усовершенствование. Нам необходимо соблюсти баланс между двумя противоположными требованиями: с одной стороны, желательно включить в базис как можно больше множеств, а с другой — надо обеспечить условие согласованности, говорящее и о том, что слишком обширным базис быть не может. Описанная ниже конструкция — довольно громоздкая на первый взгляд. Однако мы увидим, что она удачно совмещает оба требования.

Пусть  $\Delta$  — произвольное множество. Система  $\mathcal{A}$  его подмножеств называется *блоком*, если она линейно упорядочена по включению, замкнута относительно образования любых пересечений и удовлетворяет условиям  $\emptyset \in \mathcal{A}$  и  $\cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \Delta$ . Ясно, что если  $\mathcal{A}$  — блок, то каждое конечное подмножество  $E \subset \Delta$  содержится в некотором множестве из  $\mathcal{A}$ , и что среди таких множеств есть наименьшее, которое мы будем обозначать через  $D_{\mathcal{A}}(E)$ .

Рассмотрим конечный набор  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$  из  $N$  блоков в дискретной группе  $\Gamma$ . Он называется *каркасом*, если все пересечения  $A = A_1 \cap \dots \cap A_N$ , где  $A_j \in \mathcal{A}_j$  при  $1 \leq j \leq N$ , конечны. Каждое такое множество  $A$  называется *ячейкой*. Нетрудно понять, что если  $A$  —



ячейка, то  $A = \bigcap_{j=1}^N D_{\mathcal{A}_j}(A)$ . Множество  $\text{оп } A = \bigcup_{j=1}^N D_{\mathcal{A}_j}(A)$  называется *тенью* ячейки  $A$ . *Базисом суммирования*  $\mathcal{B}$ , порожденным каркасом  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ , называется совокупность всех конечных подмножеств  $E$  группы  $\Gamma$  таких, что для любой ячейки  $A$  либо  $A \subset E$ , либо  $E \subset \text{оп } A$ .

Из линейной упорядоченности каждого блока по включению следует, что *все ячейки заведомо принадлежат базису суммирования*. В [1] только ячейками дело и ограничивалось. Наше определение включает в базис значительно более широкий класс множеств. Остановимся на этом подробнее.

Пусть для начала каркас составлен *только из одного* блока  $\mathcal{A}$ . Тогда все множества  $A \in \mathcal{A}$  конечны. Перенумеруем их в порядке возрастания:  $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ,  $\bigcup_{k \geq 0} A_k = \Gamma$ .

Пусть  $E$  – непустое конечное подмножество группы  $\Gamma$ . Найдем наименьший индекс  $k$  такой, что  $E \subset A_k$ . Легко понять, что для того, чтобы  $E$  принадлежало базису суммирования  $\mathcal{B}$ , построенному по нашему каркасу, необходимо и достаточно, чтобы  $A_{k-1} \subset E$  (поскольку  $E$  непусто, разумеется,  $k \geq 1$ , так что множество  $A_{k-1}$  имеет смысл). Иными словами,  $\mathcal{B}$  состоит из множеств вида  $A_j \cup C$ , где  $C$  – *произвольное* подмножество разности  $A_{j+1} \setminus A_j \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Это означает следующее. Занумеруем характеры группы  $G$  в последовательность  $\{\gamma_k\}$  так, чтобы сначала шли все элементы множества  $\Delta_0$ , за ними – множества  $\Delta_1$ , затем –  $\Delta_2$  и т.д. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(\gamma_k) \gamma_k$  сходится равномерно для любой функции  $f$  из  $u(G, \mathcal{B})$ , но при этом еще и

$$\sup_j \sum_{\gamma \in \Delta_j} |\widehat{f}(\gamma)| \leq c \|f\|_{u(G, \mathcal{B})}.$$

Пусть, например,  $G = \mathbb{T}$  (а  $\Gamma = \mathbb{Z}$ ), шаблон – это множество  $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$  (как было в [1]), достаточный набор имеет вид  $(-R, R)$ , где  $R = \bigcup_{k \geq 1} (2^{2k}, 2^{2k+1}]$ , а каркас имеет единственный блок  $\mathcal{A}$ , состоящий из пустого множества и отрезков  $A_j = [-2^j, 2^j]$ . Определим по этим данным пространство  $U$  как перед теоремой 1. Тогда  $U$  состоит из функций, у которых оба ряда  $\sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^n$  и  $\sum_{n < 0} \widehat{f}(n) z^n$  сходятся равномерно, но кроме того еще и суммы чисел  $|\widehat{f}(j)|$  по двоичным интервалам, составляющим множества  $R$  и  $-R$ , равномерно ограни-

чены, а на дополнительных интервалах коэффициенты Фурье равны нулю. Далее, в описанной ситуации *очевидно*, что базис суммирования и достаточный набор согласованы. Значит, теорема 1 позволяет исправлять (ограниченные) измеримые функции на окружности до функций с перечисленными свойствами.

Заметим еще, что при переходе от последовательности  $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \geq 0}$  к некоторой ее подпоследовательности базис  $\mathcal{B}$  расширяется.

Обращаясь к каркасам с несколькими блоками, упомянем сразу конкретное обстоятельство, послужившее мотивом для нашего определения базиса суммирования. Рассмотрим в качестве  $G$   $n$ -мерный тор  $\mathbb{T}^n$  при  $n > 1$ , тогда  $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ . Назовем конечное множество  $E \subset \Gamma$  *солидным*, если вместе с любой своей точкой  $a = (a_1, \dots, a_n)$  оно содержит и все точки  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , для которых  $|b_j| \leq |a_j|$  при всех  $j$ . Методом, отличным от наших, в статье [3] было показано, что на торе  $\mathbb{T}^n$  возможно исправление до функций, равномерная сходимость ряда Фурье которых определяется базисом из *всех* солидных множеств. (При таком выборе базиса равномерно сходятся частичные суммы ряда Фурье по прямоугольникам и одновременно частичные суммы по шарам и т.п.). Мы увидим, что этого (и даже большего) можно достичь и нашими методами. Удобно начать с полезного описания базиса  $\mathcal{B}$ , порожденного произвольным каркасом.

Итак, пусть имеется каркас  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$  в произвольной дискретной группе  $\Gamma$ . Для каждой точки  $x \in \Gamma$  рассмотрим наименьшее множество из блока  $\mathcal{A}_j$ , содержащее  $x$ . Мы будем обозначать его через  $D_j(x)$  вместо “правильного” обозначения  $D_{\mathcal{A}_j}(\{x\})$ , введенного выше.

Обозначим ячейку  $D_1(x) \cap \dots \cap D_N(x)$  через  $D(x)$  (это – наименьшая ячейка, содержащая точку  $x$ ). Пусть  $d_j(x)$  – это объединение всех множеств  $A \in \mathcal{A}_j$ , не содержащих  $x$ . Поскольку система  $\mathcal{A}_j$  линейно упорядочена по включению, ясно, что  $d_j(x) \subset D_j(x)$ . Положим  $d(x) = d_1(x) \cap \dots \cap d_N(x)$ .

**Предложение 1.** (а) Множество  $d(x)$  является ячейкой.

(б) Конечное множество  $E$  принадлежит базису  $\mathcal{B}$ , порожденному каркасом  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ , тогда и только тогда, когда  $d(x) \subset E$  при всяком  $x \in E$ .

**Доказательство.** (а) Ячейка  $D(x)$  конечна, поэтому конечно и множество  $d(x)$ . Для каждого  $y \in d(x)$  и для каждого  $j$  найдем множество  $C_j^y \in \mathcal{A}_j$  такое, что  $y \in C_j^y$ , но  $x \notin C_j^y$ . Поскольку система  $\mathcal{A}_j$  линейно упорядочена, в конечном наборе  $\{C_j^y : y \in d(x)\}$  (индекс  $j$  здесь за-

фиксирован) существует самое широкое множество, которое мы обозначим через  $C_j$ . Ясно, что  $C_j \supset d(x)$ , поэтому  $d(x)$  содержится в ячейке  $C_1 \cap \dots \cap C_N$ . С другой стороны, эта ячейка содержится в  $d(x)$  по определению.

(б) Пусть сначала  $E \in \mathcal{B}$ . Предположим, что  $d(x) \not\subset E$  для некоторого  $x \in E$ . Тогда множество  $E$  должно лежать в тени ячейки  $d(x)$ , следовательно, в объединении множеств  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , из доказательства пункта (а). В частности,  $x \in C_{j_0}$  для некоторого индекса  $j_0$ , однако  $C_{j_0}$  не может содержать  $x$  по определению множества  $d(x)$ .

Обратно, пусть конечное множество  $E$  содержит  $d(x)$  вместе с каждой своей точкой  $x$ . Возьмем произвольную ячейку  $A$  и положим  $A_j = D_{\mathcal{A}_j}(A)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Тогда  $A = A_1 \cap \dots \cap A_N$ . Предположим, что  $E$  не содержится в множестве  $\text{om } A = A_1 \cup \dots \cup A_N$  и возьмем точку  $y \in E \setminus (\text{om } A)$ . Тогда ясно, что  $A_j \subset d_j(y)$  при всех  $j$ , следовательно,  $A_1 \cap \dots \cap A_N \subset d_1(y) \cap \dots \cap d_N(y) = d(y) \subset E$ .  $\square$

**Следствие 1.** *Базис  $\mathcal{B}$  состоит в точности из объединений  $\bigcup_{x \in F} (d(x) \cup \{x\})$ , где  $F$  – конечное подмножество группы  $\Gamma$ .*

Действительно, всякое множество из базиса есть такое объединение ввиду утверждения (б) предложения 1. Чтобы убедиться в обратном, достаточно заметить, что если  $A$  – произвольная ячейка и  $y \in A$ , то  $d(y) \subset A$ . В частности,  $d(y) \subset d(x)$  при любом  $y \in d(x)$ .  $\square$

Перейдем теперь к конкретным примерам базисов суммирования в случае, когда  $G = \mathbb{T}^n$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ . Рассмотрим в группе  $\mathbb{Z}^n$  каркас из  $N$  блоков  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ , где  $\mathcal{A}_j = \{A_k^{(j)}\}_{k=0}^\infty$ ,  $A_0^{(j)} = \emptyset$ , а при  $k \geq 1$  множество  $A_k^{(j)}$  состоит из точек, у которых  $j$ -я координата по модулю не превосходит  $k-1$ . Ячейки этого каркаса – прямоугольные параллелепипеды с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям. Далее, для любой точки  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  очевидны равенства  $D(x) = [-|x_1|, |x_1|] \times \dots \times [-|x_n|, |x_n|]$  и  $d(x) = (-|x_1|, |x_1|) \times \dots \times (-|x_n|, |x_n|)$ . Отсюда вытекает, что *базис суммирования  $\mathcal{B}$ , порожденный этим каркасом, содержит все солидные множества.*

В действительности предложение 1 дает больше (солидные множества – это конечные объединения ячеек  $D(x)$ , а мы могли бы объединять множества  $\{x\} \cup d(x)$ , см. следствие 1). Эта дополнительная информация становится все более и более существенной, если мы будем прореживать каждую из последовательностей  $\{A_k^{(j)}\}_{k=0}^\infty$ . Как и в

случае единственного блока, после такой операции “все будет только лучше”.

Итак, переопределим блоки  $\mathcal{A}_j$ , взяв в качестве  $A_k^{(j)}$  при  $k \geq 1$  множество тех точек, у которых  $j$ -я координата по модулю не превосходит  $2^k$  (как и раньше,  $A_0^{(j)} = \emptyset$ ). Тогда  $D(x)$  и  $d(x)$  (в случае, если  $d(x)$  не вырождается) – это по прежнему 2 прямоугольных параллелепипеда, но теперь больший из них получается из меньшего растяжением вдвое относительно их общего центра. Отсюда легко усмотреть, что *базис  $\mathcal{B}$  содержит все множества вида  $X \cup V$ , где  $X$  – объединение конечного числа ячеек, а  $V \subset 2X \setminus X$ .*

Действительно, проверим, что  $d(y) \subset X$  для каждого  $y \in X \cup V$  (после этого достаточно будет сослаться на следствие 1). Пусть  $X$  есть объединение ячеек  $C_1, \dots, C_k$ . Если  $y \in C_i$  для некоторого  $i$ , то, очевидно,  $d(y) \subset C_i$ . Если же  $y \in 2C_i \setminus C_i$  для некоторого  $i$ , то из вида каркаса легко заключить, что в этом случае тоже  $d(y) \subset C_i$ .

Рассмотрим теперь пример каркаса из четырех блоков  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$  для двумерного тора  $\mathbb{T}^2$ :  $\mathcal{A}_j = \{A_k^{(j)}\}_{k=0}^{\infty}$ , где  $A_0^{(j)} = \emptyset$ , а при  $k > 0$  множество  $A_k^{(j)}$  состоит из пар  $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ , для которых:  $|m_1| \leq k - 1$ , если  $j = 1$ ;  $|m_2| \leq k - 1$ , если  $j = 2$ ;  $|m_1 + m_2| \leq k - 1$ , если  $j = 3$ ; наконец,  $|m_1 - m_2| \leq k - 1$ , если  $j = 4$ . Каждая ячейка является пересечением 4 прямолинейных полос (“горизонтальной”, “вертикальной” и двух “диагональных”) и может быть 4-, 6- или 8-угольником. Множества  $D(x)$  и  $d(x)$  – всегда параллелограммы, их вид зависит от того, в какой из 8 углов, на которые плоскость разбивается координатными осями и биссектрисами координатных углов, попадает точка  $x$  (см. рис. 2 и 3).

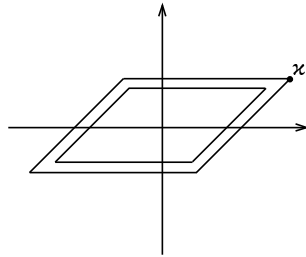


Рис. 2. Параллелограммы  $D(x)$  и  $d(x)$ .

Читатель легко представит себе, сколь причудливо может выглядеть произвольное конечное объединение множеств вида  $\{x\} \cup d(x)$ ,

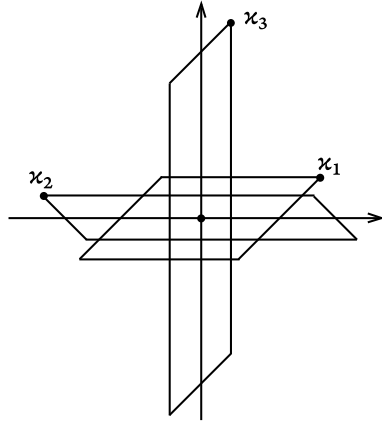


Рис. 3. Параллелограмм  $D(x)$  при различных расположениях точки  $x$ .

т.е. произвольное множество базиса  $\mathcal{B}$ .

**2.3. Небольшое усложнение.** Возвратимся к общей ситуации. Эффекта, похожего на тот, что возникает при “прореживании” блоков  $\mathcal{A}_j$ , можно добиться несколько иным способом.

Оснащением каркаса  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$  называется произвольное *несжимающее* отображение  $\Phi: \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_N \rightarrow \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_N$ ; термин “несжимающее” означает, что если  $(B_1, \dots, B_N) = \Phi(A_1, \dots, A_N)$ , то  $B_j \supset A_j$  при  $j = 1, \dots, N$ .  $\Phi$ -тью ячейки  $A = A_1 \cap \dots \cap A_N$  называется объединение  $B_1 \cup \dots \cup B_N$ , где  $(B_1, \dots, B_N) = \Phi(D_{\mathcal{A}_1}(A), \dots, D_{\mathcal{A}_N}(A))$ . Обозначение:  $\text{от}_\Phi A$ .

Базис суммирования  $\mathcal{B}$ , порожденный оснащением каркасом  $(A_1, \dots, A_N; \Phi)$ , состоит, по определению, из таких множеств  $B$ , что для любой ячейки  $A$  либо  $A \subset B$ , либо  $B \subset \text{от}_\Phi A$ .

Рассмотрим случай *простого* оснащения, когда отображение  $\Phi$  имеет вид  $\Phi(A_1, \dots, A_N) = (\Phi_1(A_1), \dots, \Phi_N(A_N))$ , где  $\Phi_j$  — несжимающее и *возрастающее* отображение блока  $\mathcal{A}_j$  в себя ( $1 \leq j \leq N$ ). (Термин “возрастающее” означает, что  $\Phi_j(A) \subset \Phi_j(B)$  всякий раз, когда  $A, B \in \mathcal{A}_j$  и  $A \subset B$ .) Остановимся, например, на уже встречавшихся нам  $n$  блоках в группе  $\mathbb{Z}^n$ :  $j$ -й блок состоит из полос  $|m_j| \leq t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  ( $m_j$  —  $j$ -я координата точки  $m \in \mathbb{Z}^n$ ).<sup>2</sup> Типичный пример

<sup>2</sup>Строго говоря, встречались нам не совсем эти блоки — число  $t$  пробегало лишь целые значения.

простого оснащения – это когда  $\Phi_j$  сопоставляет такой полосе полосу вдвое большей ширины.

Опишем (снова в общей ситуации) достаточно широкий подкласс базиса суммирования  $\mathcal{B}$  в случае простого оснащения. По аналогии с группой  $\mathbb{Z}^n$ , назовем конечное множество  $E \subset \Gamma$  *солидным*, если  $D(x) \subset E$  для любого  $x \in E$ . Обозначим еще через  $D_\Phi(x)$  ячейку  $\Phi_1(D_1(x)) \cap \dots \cap \Phi_N(D_N(x))$ . Далее, пусть  $E_\Phi = \bigcup_{x \in E} D_\Phi(x)$  для  $E \subset \Gamma$ .

**Предложение 2.** Любое множество вида  $E \cup C$ , где  $E$  – солидное множество, а  $C$  – произвольное подмножество в  $E_\Phi \setminus E$ , принадлежит базису  $\mathcal{B}$ .

**Доказательство.** Пусть  $A$  – произвольная ячейка,  $A_j = D_j(A)$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Предположим, что  $E \cup C \not\subset \text{от}_\Phi A$  и покажем, что тогда  $A \subset E \cup C$ . Возьмем любую точку  $y \in E \cup C$ , для которой  $y \notin \text{от}_\Phi A$ , т.е. существует такая точка  $x \in E$ , что  $y \in D_\Phi(x) = \Phi_1(D_1(x)) \cap \dots \cap \Phi_N(D_N(x))$ . Далее, если  $D_{j_0}(x) \subset A_{j_0}$  для некоторого индекса  $j_0$ , то  $y \in \Phi_{j_0}(D_{j_0}(x)) \subset \Phi_{j_0}(A_{j_0}) \subset \text{от}_\Phi A$ , а это неверно. Следовательно,  $A_j \subset D_j(x)$  для всех  $j$  (вспомним, что все блоки линейно упорядочены по включению), т.е.  $A \subset D(x) \subset E \subset E \cup C$ .  $\square$

В рассмотренном выше стандартном примере для тора (когда все отображения  $\Phi_j$  – растяжения полос вдвое) получается, что базису  $\mathcal{B}$  принадлежат все множества вида  $E \cup C$ , где  $E$  – солидное конечное подмножество в  $\mathbb{Z}^n$ , а  $C \subset 2E \setminus E$ .

**2.4. Условие согласования.** Напомним, что базис суммирования  $\mathcal{B}$  называется согласованным с  $M$ -достаточным набором  $(R_1, \dots, R_k)$  подмножеств группы  $\Gamma$ , если для любого конечного множества  $K \subset \Gamma$  набор  $(R_1 \setminus K_B, \dots, R_k \setminus K_B)$  является достаточным с тем же самым шаблоном  $M$ . Здесь через  $K_B$  обозначено объединение тех множеств  $E \in \mathcal{B}$ , которые разбивают  $K$  (т.е. оба множества  $K \cap E$  и  $K \setminus E$  непусты).

В дальнейшем мы будем предполагать, что базис  $\mathcal{B}$  порожден оснащенным каркасом  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N; \Phi)$  в группе  $\Gamma$ . Пусть  $K \subset \Gamma$  – конечное множество и пусть  $A$  – произвольная ячейка, содержащая  $K$ . Существование такой ячейки следует из линейной упорядоченности каждого блока  $\mathcal{A}_j$  по включению и равенства  $\bigcup \{C : C \in \mathcal{A}_j\} = \Gamma$  при каждом  $j$ . Если множество  $E$  из базиса  $\mathcal{B}$  разбивает множество  $K$ , то тем более оно разбивает и множество  $A$ , а тогда  $E$  содержится в  $\text{от}_\Phi A$ . Далее, по определению  $\text{от}_\Phi A = B_1 \cup \dots \cup B_N$  для некоторых

множеств  $B_j, B_j \in \mathcal{A}_j$  при  $1 \leq j \leq N$ . Таким образом, согласованность гарантируется следующим условием.

$$\text{Для любых множеств } B_j \in \mathcal{A}_j, j = 1, \dots, N, \text{ набор} \\ (R_1 \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j, \dots, R_k \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j) \text{ является } M\text{-достаточным.} \quad (C)$$

Мы опишем широкий класс каркасов, удовлетворяющих условию (C) для любого  $M$ -достаточного набора  $(R_1, \dots, R_k)$ . Назовем блок  $\mathcal{D}$  подмножеством группы  $\Gamma$  *правильным* по отношению к  $l$ -шаблону  $M = \{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\}$  (или  *$M$ -правильным*), если выполнены следующие два условия.

(а) Каково бы ни было множество  $D \in \mathcal{D}$ , найдется набор характеров  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma^l$  такой, что  $\langle m^{(j)}, \gamma \rangle \notin D$  при всех  $j = 1, \dots, k$ .

(б) Для любых  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  найдется множество  $D_3 \in \mathcal{D}$  такое, что  $D_1 - D_2 \subset D_3$ .

**Предложение 3.** *Если все блоки  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$  некоторого каркаса в группе  $\Gamma$  являются  $M$ -правильными, то условие (C) выполнено для любого  $M$ -достаточного набора  $(R_1, \dots, R_k)$ . В частности, оснащенный каркас  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N; \Phi)$  с произвольным оснащением  $\Phi$  порождает базис, согласованный с любым  $M$ -достаточным набором.*

Ниже будут приведены примеры, показывающие, что условие  $M$ -правильности – вполне “рабочее” и обеспечивается легко. Но сначала мы докажем предложение 3. Оно сводится к последовательному применению  $N$  раз следующего утверждения.

**Предложение 3’.** *Если  $\mathcal{D}$  –  $M$ -правильный блок, то набор  $(R_1 \setminus D, \dots, R_k \setminus D)$  является  $M$ -достаточным для любого  $M$ -достаточного набора  $(R_1, \dots, R_k)$  и любого множества  $D$  из блока  $\mathcal{D}$ .*

Для доказательства предложения 3’ сначала сформулируем лемму.

**Лемма 1.** *Если  $\mathcal{D}$  –  $M$ -правильный блок и  $H \in \mathcal{D}$ , то для любого  $t \in \mathbb{N}$  найдутся  $t$  точек  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(t)} \in \Gamma^l$ , для которых  $\langle m^{(j)}, \lambda^{(u)} - \lambda^{(v)} \rangle \notin H$  при всех  $j$  и всех  $u \neq v$ .*

**Доказательство** – индукция. Точку  $\lambda^{(1)}$  выбираем произвольно. Пусть  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(t)}$  уже выбраны. Нужно добавить к ним еще одну точку  $\lambda^{(t+1)}$ . Пусть  $H_1$  – множество из блока  $\mathcal{D}$ , содержащее все точки  $\langle m^{(j)}, \lambda^{(i)} \rangle, 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq t$ . Согласно условию (b), в блоке  $\mathcal{D}$

найдется такое множество  $H_2$ , что  $H_1 - H \subset H_2$ . В качестве  $\lambda^{(t+1)}$  достаточно взять любую точку  $\gamma$ , для которой  $\langle m^{(j)}, \gamma \rangle \notin H_2$  при всех  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$  (см. условие (а)).  $\square$

**Доказательство предложения 3'.** Пусть, как и ранее,  $k$  – число точек в шаблоне  $M$ ; пусть множество  $\Lambda \subset \Gamma^l$  содержит  $k+1$  точку. Рассмотрим произвольное конечное множество  $K \subset \Gamma$ . Множество  $K_1 = \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ 1 \leq j \leq k}} (\langle m^{(j)}, \lambda \rangle + K)$  тоже конечно, а потому найдется точка  $\mu \in \Gamma^{(l)}$  такая, что  $\langle m^{(s)}, \mu \rangle + K_1 \subset R_s$ ,  $1 \leq s \leq k$ . В частности,

$$\langle m^{(j)}, \lambda + \mu \rangle + K \subset R_j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

при всех  $\lambda \in \Lambda$ .

Предложение было бы доказано, если бы оказалось, что для некоторого  $\lambda \in \Lambda$  объединение  $\bigcup_{1 \leq j \leq k} (\langle m^{(j)}, \lambda + \mu \rangle + K)$  не пересекает множества  $D$ . Предположим, что это не так, тогда для каждого  $\lambda \in \Lambda$  найдется такой номер  $j_\lambda$ , что

$$\langle m^{(j_\lambda)}, \lambda + \mu \rangle \in D - K.$$

Поскольку число точек в множестве  $\Lambda$  равно  $k+1$ , найдутся  $\alpha, \beta \in \Lambda$ , для которых индексы  $j_\alpha$  и  $j_\beta$  совпадают. Пусть  $i$  – общее значение этих индексов, тогда

$$\langle m^{(i)}, \alpha - \beta \rangle = \langle m^{(i)}, \alpha + \mu \rangle - \langle m^{(i)}, \beta + \mu \rangle \in D - K - (D - K).$$

Однако множество  $\Lambda$  с самого начала можно выбрать так, чтобы последнее соотношение не выполнялось ни для каких  $\alpha, \beta \in \Lambda$  и ни для какого  $i$ . Действительно, в силу условия (b) правая часть этого соотношения содержится в некотором множестве  $H \in \mathcal{D}$ , и достаточно применить лемму 1 с  $t = k+1$  к этому  $H$ .  $\square$

**2.4.1. Примеры.** Мы ограничимся примерами правильных блоков – составить каркас из нескольких блоков нетрудно. Условие (а) из определения  $M$ -правильности не требует особых комментариев – обычно сразу видно, выполнено оно или нет. Заметим, что препятствием может здесь служить наличие элементов конечного порядка в группе  $\Gamma$  (см. замечание о диадической группе в п. 2.1).



Условие (b) по существу говорит о некоей “равномерной структуре” на  $\Gamma$ , в каком-то смысле согласованной “в бесконечности” со стандартной равномерной структурой дискретной группы. Понятно поэтому, что правильные блоки порождаются “равномерно непрерывными” (термин не нужно понимать слишком буквально) отображениями группы  $\Gamma$  в равномерные пространства.

Пусть, например,  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\nu}$  – ненулевое линейное отображение. Множества  $\{\lambda \in \mathbb{Z}^n : |L(\lambda)| \leq t\}$ ,  $t > 0$ , дополненные еще пустым множеством, образуют блок в  $\mathbb{Z}^n$  (через  $|\cdot|$  обозначена евклидова норма), который, очевидно, удовлетворяет условию (b). В п. 2.2 и 2.3 мы рассматривали каркасы в группе  $\mathbb{Z}^n$  именно из таких блоков с  $\nu = 1$ ; см. также [1]. Однако отображение  $L$  можно и не считать линейным: условие (b) гарантируется, например, оценкой  $|L(\lambda - \mu)| \leq F(|L(\lambda)|, |L(\mu)|)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$ , где  $F$  – *любая* неотрицательная конечная функция на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . Это, в частности, ведет к блокам из “криволинейных полос”, см. рис. 4. Заметим, что в соответствующем базисе суммирования могут содержаться очень причудливые множества

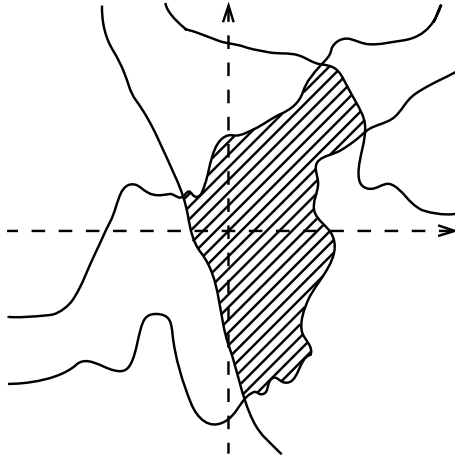


Рис. 4. Типичные “криволинейные полосы” из двух разных блоков в  $\mathbb{Z}^2$ . Заштрихована “криволинейная ячейка”.

Укажем еще, что в каком-то смысле “криволинейные” полосы мо-

гут быть начертаны практически “свободным влечением руки” внутри “прямолинейных полос” (разумеется, надо следить за тем, чтобы получился блок). Точнее, пусть  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{C}$  – два блока. Будем говорить, что блок  $\mathcal{C}$  *подчинен* блоку  $\mathcal{D}$ , если для всякого множества  $C \in \mathcal{C}$  найдется множество  $D \in \mathcal{D}$ , для которого  $C \subset D$ . Назовем блоки  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  сравнимыми, если каждый из них подчинен другому. Точная форма приведенного выше нестроного утверждения такова.

**Лемма 2.** *Если два блока сравнимы и один из них  $M$ -правилен, то  $M$ -правилен и другой.*  $\square$

Приведем еще один класс примеров, в которых выполнено условие (b) (в них, кстати, и условие (a) совсем прозрачно). Именно, таков произвольный блок  $\mathcal{D}$ , представляющий собой последовательность  $\emptyset = D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$  конечных подмножеств группы  $\Gamma$ , обладающую тем свойством, что любое конечное множество  $K \subset \Gamma$  содержится в  $D_j$  при некотором  $j$ .

Мы воздерживаемся от дальнейших комментариев.

### §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Теорема 1 доказывается практически так же, как и главный результат статьи [1], поэтому мы лишь наметим рассуждения.

**3.1. Разбиение функции на 2 слагаемых.** Как показано в [1] (см. лемму 2 и рассуждения после нее в той статье), достаточно доказать следующее утверждение. В нем мы сохраняем обозначения теоремы 1.

**Теорема о разложении.** *Найдется число  $r$ ,  $0 < r < 1$ , со следующими свойствами. Каковы бы ни были функция  $f \in L^\infty(G)$ ,  $\|f\|_\infty \leq 1$ , и число  $\eta > 0$ , существуют функции  $g \in U$  и  $h \in L^r(\mu)$  такие, что  $f = g + h$ ,  $\|g\|_U \leq \eta$  и  $\|h\|_{L^r(G)} \leq C\eta^{-\beta}$  ( $C, \beta$  – положительные постоянные, не зависящие от  $f$ ).*

**3.2.** Как и в [1], сначала мы будем разбивать *тригонометрические полиномы* в сумму двух слагаемых со свойствами, даже несколько более сильными в сравнении с теоремой о разложении. Напомним, что шаблон  $M$  – это подмножество  $\{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\}$  группы  $\mathbb{Z}^l$ , удовлетворяющее условиям теоремы А. Согласно этой теореме, на торе  $\mathbb{T}^l$  существует тригонометрический полином вида

$$u_x(z) = \sum_{1 \leq s \leq k} a_s z_1^{m_1^{(s)}} \dots z_l^{m_l^{(s)}} \quad (2)$$

(через  $m_s^{(j)}$  обозначены компоненты точки  $m^{(j)} \in \mathbb{Z}^l$ ) такой, что для некоторого  $r$ ,  $0 < r < 1$ , имеем

$$\varepsilon = \left( \int_{\mathbb{T}^l} |1 - u(z)|^r \frac{dz}{(2\pi)^l} \right)^{1/r} < 1. \quad (3)$$

Напомним, что  $\mathcal{P}(G)$  обозначает множество тригонометрических полиномов (т.е. линейных комбинаций характеров) на группе  $G$ . Мы снабдим это множество нормой пространства  $l^1(\Gamma)$ : если  $p = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \gamma$ , то  $\|p\| = \sum |c_\gamma|$ .

**Лемма 3.** Пусть  $r$  – число из формулы (3). Существует такая постоянная  $c > 0$ , что для любого  $\xi \geq c$ , любого  $M$ -достаточного набора  $(R_1, \dots, R_k)$  подмножеств группы  $\Gamma$  и любого  $p \in \mathcal{P}(G)$  найдутся тригонометрические полиномы  $q_1, \dots, q_k$  на  $G$  со следующими свойствами: при каждом  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , спектр тригонометрического полинома  $q_j p$  лежит в  $R_j$  и, кроме того,  $\|q_j\| \leq \xi$  и  $\|(1 - \sum_{s=1}^k q_s)p\|_{L^r(G)} \leq c\xi^{-\beta} \|p\|_{L^r(G)}$ . Здесь  $c$  и  $\beta$  не зависят от  $p$ ,  $\xi$  и  $M$ -достаточного набора  $(R_1, \dots, R_k)$ .

**Доказательство.** Положим  $a = \max_{1 \leq s \leq k} |a_s|$ , где числа  $a_s$  – коэффициенты полинома (2). Пусть  $t \in \mathcal{P}(G)$ . Обозначим через  $K$  носитель преобразования Фурье функции  $t$ . По определению  $M$ -достаточного набора множеств, существует набор  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma^l$ , для которого  $\langle m^{(j)}, \gamma \rangle + K \subset R_j$  при  $1 \leq j \leq k$ . Далее, для этого набора характеров  $\gamma$  можно найти такие комплексные числа  $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ ,  $|\zeta_j| = 1$ , что

$$\left\| \left( 1 - \sum_{1 \leq j \leq k} a_j (\zeta_1 \gamma_1)^{m_1^{(j)}} \dots (\zeta_l \gamma_l)^{m_l^{(j)}} \right) t \right\|_{L^r(G)}^r \leq \varepsilon^r \|t\|_{L^r(G)}^r,$$

где число  $\varepsilon$  определено формулой (3). Действительно, если проинтегрировать левую часть этого неравенства по  $\zeta_1, \dots, \zeta_l$  по нормированной мере Лебега на торе  $\mathbb{T}^n$ , то в силу той же формулы (3) мы получим правую часть.

Используя это наблюдение, возьмем функцию  $p$  из формулировки леммы и построим по индукции последовательности  $\{q_j^{(n)}\}_{n \geq 0}$  ( $j =$

$1, \dots, k$ ) тригонометрических полиномов на группе  $G$  так, чтобы

$$\text{supp } \widehat{(pq_j^{(n)})} \subset R_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (4)$$

$$\|q_j^{(n+1)}\| \leq \|q_j^{(n)}\| + a(1 + \sum_{s=1}^k \|q_s^{(n)}\|), \quad 1 \leq j \leq k, \quad (5)$$

$$\|(1 - \sum_{s=1}^k q_s^{(n)})p\|_{L^r(G)} \leq \varepsilon^n \|p\|_{L^r(G)}. \quad (6)$$

Делается это следующим образом. Положим  $q_j^{(0)} = 0$  при всех  $j$ . Если для некоторого  $n$  полиномы  $q_1^{(n)}, \dots, q_k^{(n)}$  уже построены, рассмотрим полином  $t = (1 - \sum_{s=1}^k p_s^{(n)})p$  и найдем для него характеры  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  и числа  $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ , как было описано выше. После этого положим

$$q_j^{(n+1)} = q_j^{(n)} + a_j (\zeta_1 \gamma_1)^{m_1^{(j)}} \dots (\zeta_l \gamma_l)^{m_l^{(j)}} (1 - \sum_{s=1}^k q_s^{(n)}).$$

Соотношения (4)–(6) проверяются легко. Из (5) видно, что  $\|q_s^{(n)}\| \leq b^n$  для некоторого  $b > 1$  (число  $b$  зависит только от  $a$  и  $k$ ). Вместе с (6) это доказывает лемму.  $\square$

**3.3. Покрывающие окрестности.** За доказательствами утверждений этого пункта мы отсылаем читателя к [1] или к более ранней статье [6]. Компактная окрестность  $\mathcal{V}$  единицы в группе  $G$  называется *покрывающей*, если  $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}$  и существует такое конечное семейство  $\{x_i\}$  точек группы  $G$ , что  $G = \bigcup_i (x_i + \mathcal{V})$  и  $(x_i + \mathcal{V}) \cap (x_j + \mathcal{V})$  имеет меру ноль при  $i \neq j$ .

С каждой покрывающей окрестностью  $\mathcal{V}$  свяжем функции

$$\alpha_i(t) = (m\mathcal{V})^{-1} \mathbb{I}_{\mathcal{V}} * \mathbb{I}_{\mathcal{V}}(tx_i^{-1}), \quad t \in G \quad (7)$$

( $x_i$  – точки, упоминавшиеся выше). Ясно, что  $\sum_i \alpha_i \equiv 1$  и  $\|\alpha_i\|_{L^\infty(G)} = \|\widehat{\alpha}_i\|_{l^1(\Gamma)} = 1$ . Кроме того,  $\alpha_i(x_i) = 1$ . Далее,  $\|\alpha_i\|_{L^r} \leq m(\mathcal{V} \cdot \mathcal{V})^{1/r}$ . Если размерность группы  $G$  конечна, то у точки  $1 \in G$  имеется база из покрывающих окрестностей, которые можно выбрать так, что  $m(\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}) \leq 2^{\dim G} m(\mathcal{V})$  для каждой окрестности из базы.

**3.4. Завершение доказательства теоремы о разложении.** Пусть  $f$  – функция из формулировки этой теоремы. Пусть  $\sigma$  – маленькое положительное число. Найдется такая непрерывная функция  $\varphi$  на  $G$ , что  $\|\varphi\|_{C(G)} \leq 1$  и  $\|f - \varphi\|_{L^r(G)} \leq \sigma$ . Далее, в базе покрывающих окрестностей единицы, о которой говорилось выше, найдется такая окрестность  $\mathcal{V}$ , что  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sigma$ , если  $xy^{-1} \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{V}$ . Пусть  $x_i$  – точки, соответствующие окрестности  $\mathcal{V}$ , как описано в п. 3.3. Тогда

$$\|\varphi - \sum \varphi(x_i)\alpha_i\|_\infty \leq \sigma \quad \text{и} \quad \|\varphi| - \sum |\varphi(x_i)|\alpha_i\|_\infty \leq \sigma,$$

где функции  $\alpha_i$  определены формулой (7). Тем более

$$\|\varphi - \sum \varphi(x_i)\alpha_i\|_{L^r(G)} \leq \sigma$$

и, значит,  $\|f - \sum \varphi(x_i)\alpha_i\|_{L^r(G)} \leq 2^{1/r}\sigma$ . В дальнейшем удобно считать, что точки  $x_i$  и функции  $\alpha_i$  занумерованы натуральными числами от 1 до  $N$ . Отметим еще неравенство

$$m(\mathcal{V}) \sum |\varphi(x_i)|^r = \int_G \left| \sum_i \varphi(x_i) \mathbb{1}_{x_i\mathcal{V}} \right|^r \leq \int_G |\varphi|^r + \sigma^r \leq 2, \quad (8)$$

если  $\sigma \leq 1$ .

Пусть  $\delta$  – еще одно малое положительное число. Найдем такие тригонометрические полиномы  $p_i$  на  $G$ , что  $\|\widehat{p}_j - \widehat{\alpha}_j\|_{l^1(\Gamma)} \leq \delta$ . Тогда  $\|f - \sum_j \varphi(x_j)p_j\|_{L^r} \leq (2\sigma^r + (\delta N\sigma)^r)^{1/r} \leq 3^r\sigma$ , если  $\delta$  достаточно мало.

Дальнейшая стратегия состоит в том, чтобы применить лемму 3 к каждому из полиномов  $p_i$ . Сделать это, однако, надо аккуратно, как описывается в следующей лемме. Число  $\eta$  в ней взято из формулировки теоремы о разложении. Отметим, что в той теореме при небольших  $\eta$  годится разложение  $f = 0 + f$  ( $g = 0, h = f$ ), поэтому без потери общности можно считать  $\eta$  достаточно большим. Это полезно ввиду ограничения снизу на константу  $\xi$  в лемме 3.

**Лемма 4.** На группе  $G$  найдутся тригонометрические полиномы  $q_{ij}$  ( $1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq k$ ) со следующими свойствами:

(i)  $\|p_i(1 - \sum_{1 \leq s \leq k} q_{is})\|_{L^r(G)} \leq C\eta^{-\beta}\|p_i\|_{L^r(G)}$ ;

(ii)  $\|q_{ij}\| \leq \eta$  при всех  $i$  и  $j$ ;  $\text{supp } \widehat{(q_{ij}p_i)} \subset R_i$ ;

(iii) для каждого  $i_0, 1 \leq i_0 \leq N$ , ни одно из множеств  $\text{supp } \widehat{(p_{i_0} q_{i_0 j})}$ ,  $1 \leq j \leq k$ , не пересекает множество  $K_{\mathcal{B}}$ , где  $K$  – это объединение носителей преобразований Фурье функций  $p_i q_{ij}$  с  $i < i_0$ .

Напомним, что  $K_{\mathcal{B}}$  – это объединение всех множеств базиса  $\mathcal{B}$ , которые разбивают  $K$ , см. определение 1 и обозначения перед ним.

Лемма 4 легко проверяется по индукции с использованием предположения о том, что базис суммирования  $\mathcal{B}$  и достаточный набор  $(R_1, \dots, R_k)$  согласованы: на шаге с номером  $i_0$  лемма 3 применяется к полиному  $p_{i_0}$  и достаточному набору  $(R_1 \setminus K_{\mathcal{B}}, \dots, R_k \setminus K_{\mathcal{B}})$ ; в качестве  $\xi$  берем то же самое число  $\eta$ .  $\square$

Чтобы доказать теорему о разложении, достаточно теперь положить  $g = g_1 + \dots + g_k$ , где  $g_j = \sum_{1 \leq i \leq N} \varphi(x_i) p_i q_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Оценим сначала нормы  $\|g_j\|_{u(G, \mathcal{B}, R_j)}$  (следует отметить, что спектр функции  $g_j$  действительно лежит в  $R_j$  по построению). Пусть  $E \in \mathcal{B}$ . В силу утверждения (iii) в лемме 4, найдется индекс  $i_0, 1 \leq i_0 \leq N$ , такой что

$$P_E g_j = \sum_{i < i_0} \varphi(x_i) p_i q_{ij} + P_E(\varphi(x_{i_0}) p_{i_0} q_{i_0 j}).$$

Второе слагаемое оценим через величину  $\|p_{i_0} q_{i_0 j}\|$ :

$$\begin{aligned} \|P_E(\varphi(x_{i_0}) p_{i_0} q_{i_0 j})\|_{L^\infty} &\leq |\varphi(x_{i_0})| \|p_{i_0} q_{i_0 j}\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|p_{i_0}\| \|q_{i_0 j}\| \\ &\leq \eta(\|\widehat{\alpha}_{i_0}\|_{\mu(\Gamma)} + \delta) \leq 2\eta, \end{aligned}$$

если  $\delta$  мало. Первое слагаемое не требует особой заботы:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i < i_0} \varphi(x_i) p_i q_{ij} \right\|_{L^\infty(G)} &\leq \left\| \sum_{i < i_0} \varphi(x_i) \alpha_i q_{ij} \right\|_{L^\infty(G)} + \eta \delta N \\ &\leq \eta \left\| \sum_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i)| \alpha_i \right\|_{L^\infty(G)} + \eta \delta N \leq \eta(1 + \sigma + \delta N) \leq 2\eta, \end{aligned}$$

если  $\delta$  и  $\sigma$  (в этом порядке!) выбраны достаточно малыми. Соединяя две оценки, получим, что  $\|q_i\|_{u(G, \mathcal{B}, R_j)} \leq 4\eta$ .

Осталось оценить норму  $\|f - g\|_{L^r}$  через  $C\eta^{-\beta}$ . Из предыдущего видно, что достаточно получить такую же оценку для нормы  $\left\| \sum_i \varphi(x_i) p_i - g \right\|_{L^r}$ , а затем в очередной раз воспользоваться произво-

лом в выборе величин  $\delta$  и  $\sigma$ . Однако

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i \varphi(x_i) p_i - g \right\|_{L^r(G)}^r &\leq \sum_i |\varphi(x_i)|^r \|p_i (1 - \sum_{1 \leq s \leq k} q_{is})\|_{L^r(G)}^r \\ &\leq \sum_i |\varphi(x_i)|^r (C\eta^{-\beta})^r \|p_i\|_{L^r(G)}^r \end{aligned}$$

в силу утверждения (i) в лемме 4. Далее,  $\|p_i\|_{L^r(G)}^r \leq \|\alpha_i\|_{L^r(G)}^r + \delta^r \leq 2^{\dim G} m(\mathcal{V}) + \delta^r$ . Поэтому для завершения доказательства осталось воспользоваться неравенством (8) и (еще раз) произволом в выборе  $\delta$ .  $\square$

**Благодарность.** Авторы признательны В. П. Хавину за ценные замечания об устройстве каркасов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Кисляков, *Новая теорема об исправлении*, Изв. АН СССР, сер. матем., **48** №2, (1984), 305–330.
2. Ф. Г. Арутюнян, *Представление функций кратными рядами*, Докл. АН Арм. ССР, **64** (1977), 72–76.
3. Ф. Г. Арутюнян, *Некоторое усиление теоремы Меньшова “Об исправлении”*, Матем. заметки, **35** (1984), №1, 31–41.
4. А. В. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes*. Complex analysis and spectral theory (Seminar, Leningrad 1979/80), Lecture Notes Math., 864, Springer-Verlag, 1981, pp. 1–89.
5. А. Б. Александров, *Спектральные подпространства пространства  $L^p$  при  $p < 1$* , Алгебра и анализ, **19** №3 (2007), 1–75.
6. С. В. Хрущев, *Теорема Меньшова об исправлении и гауссовские процессы*, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **155** (1981), 151–181.

Ivanishvili P., Kislyakov S. V. Correction up to a function with sparse spectrum and uniformly convergent Fourier series.

In 1984, the second author proved that, after correction on a set of arbitrarily small measure, any continuous function on a finite-dimensional compact Abelian group acquires sparse spectrum and uniformly convergent Fourier series. In the present paper we refine the result in two directions: first, we ensure uniform convergence in a stronger sense; second, we

prove that the spectrum after correction can be put in even more peculiar sparse sets.

С.-Петербургский  
государственный университет  
Университетский пр. 28, Петродворец,  
198504 Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: ivanishvili.Paata@gmail.com

Поступило 1 марта 2010 г.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия  
*E-mail*: skis@pdmi.ras.ru