А.М.Вершик, А.Б.Грибов, С.В.Керов

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ РАЗМЕРНОСТИ ТИПИЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Данные о поведении размерностей неприводимых представлений симметрической группы высокой степени немногочисленны: (I), (2), (3). Возможны две различные постановки вопроса:

I.Какова характерная размерность неприводимого представления, т.е. какова размерность тех неприводимых представлений, которые составляют массивную в смысле меры Планшереля, часть? ((4), (5)). Это - статистическая постановка вопроса;

2) Каковы рекордные размерности, например, наибольшая размерность, или наименьшие размерности в возрастающем порядке и т.д. ((I), (2), (3)) - это индивидуальные свойства представлений,

Первая задача возникла в связи с асимптотической теорией представлений классических групп, (см.(4)). Разумеется, само существование правильной асимптотики в обеих постановках надлежит установить.

В этой заметке мы приводим данные, полученные с помощью ЭВМ, подтверждающие одну гипотезу, относящуюся к первому вопросу. Гипотеза выдвинута в качестве уточнения результатов (4), (5) о предельной форме типичной диаграммы Юнга. Она состоит в следующем:

$$\lim_{n} \mu_n \left\{ \Lambda : -\log \frac{\dim \Lambda^2}{n!} = h\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \right\} = 1 \qquad (*)$$

здесь μ_n - мера Планшереля на множестве неприводимых представлений (вероятность представления Λ равна $\mu_n(\Lambda) = \frac{(\dim\Lambda)^2}{n!}$, где $\dim \Lambda$ - его размерность). Гипотезу следует рассматривать, как предположение об асимптотической равнораспределенности вероятностей типичных представлений ("теорема Шеннона"), а константу h как энтропию меры Планшереля. Из соображений (4) следует, что, если h существует, то $h \leqslant 2{,}57$, (оценка вытекает из формулы Эйлера-Харди-Рамануджана); проблема состоит в доказательстве существования предела (*) и того, что $h > 0$

Ниже мы приводим таблицы, подсчитанные для симметрических групп $\mathfrak{S}_n$ с n = 400, 500, 625, 900, 1600. Вычисления были организованы следующим образом: находились (с помощью алгорифма Робинсона-Шенстенда-Кнута) случайные диаграммы Юнга с планшерелевской статистикой и подсчитывалось выражение $h(\Lambda) =$

$=\frac{1}{\sqrt{n}}\log\frac{(\dim\Lambda)^2}{n!}$ -см. таблицу. Удивительным образом, среднее значение $h(\Lambda)$ увеличивается с ростом n, что (ввиду ограниченности h) делает несомненным существование ненулевого предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\times$ $\times\log\frac{(\dim\Lambda)^2}{n!}=h$ (по мере μ_n). Заметим, что уже при $n\geqslant 400$ имеется хорошее согласование случайных диаграмм с предельной диаграммой, найденной в (4), (6), следовательно, область значений $n\geqslant 400$, по-видимому, может быть отнесена к области, где включается асимптотика. Об этом же свидетельствует убывание дисперсий. (см.таблицы). Таким образом, полученные данные подтверждают гипотезу о том, что размерность типичного неприводимого представления симметрической группы имеет вид:

$$\dim\Lambda=\sqrt{n!}\exp\left\{-\frac{1}{2}h\sqrt{n}+O(\sqrt{n})\right.$$

где $0<h<2{,}57$.

Литература

1. Brack Baer R. Natural sorting over permutation spaces. - Math.Comp., 1968, v.22, p.385-410.
2. Rasala R. The minimal degrees of characters of S_n. - Journ. of Algebra 1977, v.45, p.132-181
3. McKay J. The Largest Degrees of Irreducible Characters of Symmetric Group.-Math Comp.1978, v.32, p.624-631.
4. Вершик А.М., Керов С.В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма диаграмм Юнга. ДАН СССР 233 № 6, 1024-27.
5. Logan B., Shepp L. A variational problem for Random Young Tableaux. - Adv.in Math., 1977, v.26, p.206-222.

Приложение: таблицы №№ 1-5.

Таблица № I. n = 400; 7I диаграмма, ЭВМ "МИНСК-34" (С.В.Керов)

Значения $h(\Lambda)$	I,3	I,35	I,40	I,45	I,50	I,55	I,60	I,65	I,70	I,75	I,80	I,85	I,90	I,95	2,0	2,05		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале		I	0	0	4	6	I2	I3	I0	6	6	6	2	2	I	I	I	I,6296387	0,I6

Таблица № 2, n = 500; 98 диаграмм, ЭВМ "МИНСК 34" (С.В.Керов)

Значения $h(\Lambda)$	I,4	I,45	I,5	I,55	I,6	I,65	I,7	I,75	I,8	I,85	I,9	I,95	2,00	2,05		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале		8	8	8	II	I7	II	I5	4	7	3	3	I	0	2	I,659	0,I5

Таблица № 3. n = 625, 3I диаграмма, ЭВМ "ОДРА I204" (А.Б.Грибов)
Время обработки одной диаграммы ~I,25 мин.

Значения $h(\Lambda)$	I,4	I,45	I,50	I,55	I,60	I,65	I,70	I,75	I,80	I,85	I,90	I,95		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале		0	4	4	2	3	6	6	I	2	2	I		I,670	0,I2

Таблица № 4. n = 900; I55 диаграмм, ЭВМ "ОДРА I204" (А.Б.Грибов)
Время обработки одной диаграммы ~2 мин.

Значения $h(\Lambda)$	I,42	I,45	I,48	I,51	I,54	I,57	I,60	I,63	I,66	I,69	I,72	I,75	I,78	I,81	I,84	I,87	I,9	I,93	I,96		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале		I	0	2	4	6	II	I6	20	I4	I7	I7	I6	7	I0	3	5	I	2		I,698	0,I0

Таблица № 5. n = I600; I4 диаграмм, ЭВМ "ОДРА I204" (А.Б.Грибов)
Время обработки одной диаграммы ~5 мин.

Значения $h(\Lambda)$	I,55	I,6	I,65	I,7	I,75	I,8	I,85	I,9		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале		I	I	2	3	3	4	0		I,737	0,077