V. N. Kublanovskaya, Some factorizations of matrix and scalar polynomials,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 6, 168–177

В.Н.Кублановская

О НЕКОТОРЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ МАТРИЧНЫХ И СКАЛЯРНЫХ ПОЛИНОМОВ

Рассматриваются матричные полиномы от одной и двух переменных. Предлагаются алгоритмы для разложения таких полиномов на множители.

§ 1. Введение

В статье рассматриваются численные аспекты некоторых задач алгебры. Основными объектами исследования являются матричные полиномы (или, что то же, полиномиальные матрицы)

$$D(\lambda) = C_s\lambda^s + C_{s-1}\lambda^{s-1} + \ldots + C_0 \tag{1.1}$$

от одной переменной и

$$F(\lambda,\mu) = D_s(\mu)\lambda^s + D_{s-1}(\mu)\lambda^{s-1} + \ldots + D_0(\mu) = \tilde{D}_t(\lambda)\mu^t + \ldots + \tilde{D}_0(\lambda) \tag{1.2}$$

от двух переменных. Здесь C_k - постоянные $m\times n$-матрицы; $\tilde{D}_k(\lambda)$, $D_k(\mu)$ - матричные полиномы размеров $m\times n$ от одной переменной; s и t - максимальные степени по λ и μ соответственно. Частным случаем матричных полиномов (1.1) и (1.2) являются скалярные полиномы. Они получаются при $m=n=1$. В дальнейшем слово матричный в сочетании „матричный полином" будем опускать, если в этом нет необходимости и сказанное имеет место как для матричных, так и для скалярных полиномов.

В статье предлагаются алгоритмы следующих факторизаций полиномов от одной и двух переменных.

1. Факторизация матричного полинома в произведение двух множителей одного и того же ранга: первый - полного столбцового ранга, имеет спектр, совпадающий с конечным спектром исходного матричного полинома; второй множитель - полного строчного ранга, не имеет конечного спектра; на бесконечности имеет собственное значение при наличии его у исходного полинома. В дальнейшем такую факторизацию будем называть ΔW-факторизацией.

2. Факторизация каждого полинома из заданной последовательности полиномов в произведение двух множителей. Первый множитель, называемый левым общим наибольшим делителем (ОНД), имеет полный столбцовый ранг и является общим для всех заданных полиномов. Вторые множители в совокупности образуют взаимно простые полиномы слева, т.е. полиномы, не имеющие левых нетривиальных общих делителей. В дальнейшем такую факторизацию будем называть вычислением ОНД.

Ключевые слова: полиномиальные матрицы, матричные полиномы, скалярные полиномы, факторизация полиномов.

3. Разложение полинома от двух переменных в произведение неприводимых множителей над кольцом полиномов от одной переменной.

Все предлагаемые алгоритмы основаны на применении унимодулярных матриц, построенных на базе элементарных матриц плоских вращений или отражений, что является гарантией их численной стабильности. Алгоритмы могут быть распространены на многопараметрические (число параметров больше двух) матричные полиномы. Они могут быть использованы при решении прикладных задач, моделируемых в терминах матричных полиномов, в частности для решения нелинейных алгебраических уравнений от одной, двух и большего числа неизвестных, а также для решения многопараметрических спектральных задач.

§ 2. Алгоритм ΔW-факторизации

Под ΔW-факторизацией матричного полинома (1.1) от одной переменной будем понимать представление $D(\lambda)$ в одном из видов:

$$D(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda),0] \text{ или } D(\lambda) = \Delta(\lambda)V(\lambda). \tag{2.1}$$

Здесь $W(\lambda)$ - унимодулярная $n\times n$-матрица, 0 - нулевая $m\times(n-\rho)$-матрица, $\Delta(\lambda)$ - матрица $m\times\rho$ полного столбцового ранга ($\rho=\operatorname{rank}D(\lambda)$) степени не выше s, спектр которой совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$; $V(\lambda)$ - матрица $\rho\times n$ ранга ρ.

В лаборатории алгоритмических методов ЛОМИ АН СССР разработан алгоритм ΔW-факторизации матричных полиномов от одной переменной [1-3] и Т.Я.Коньковой написана программа, реализующая его на персональном компьютере. Алгоритм можно индуктивно распространить на факторизацию полиномов от нескольких переменных. Ниже рассматривается алгоритм ΔW-факторизации матричного полинома

$$F(\lambda,\mu) = D_s(\mu)\lambda^s + D_{s-1}(\mu)\lambda^{s-1} + \ldots + D_0(\mu)$$

(размеров $m\times n$ от двух переменных, не приводимого над кольцом матричных полиномов от одной переменной), т.е. представление $F(\lambda,\mu)$ в одном из видов

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [H(\lambda,\mu),0] \text{ или } F(\lambda,\mu) = H(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu). \tag{2.2}$$

Здесь $W(\lambda,\mu)$ - унимодулярная двухпараметрическая полиномиальная порядка n матрица; 0 - нулевая $m\times(n-\rho)$-матрица; $H(\lambda,\mu)$ - двухпараметрическая $m\times\rho$-полиномиальная матрица полного столбцового ранга $\rho(\rho=\operatorname{rank}F(\lambda,\mu))$, спектр которой совпадает с конечным спектром $F(\lambda,\mu)$; $V(\lambda,\mu)$ - двухпараметрическая $\rho\times n$ полиномиальная матрица ранга ρ.

Вычисление разложения (2.2) проведем конструктивно, описывая алгоритм, его реализующий.

Строится конечная последовательность матричных полиномов

$$F_0(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu),\ F_1(\lambda,\mu),\ldots,F_\ell(\lambda,\mu) = [H(\lambda,\mu),\ 0].$$

Приводим описание типичного (первого) шага.

1. Формируется вспомогательная полиномиальная матрица $M_1(\mu)$. Построение начинается с просмотра коэффициента $D_s(\mu)$ при старшей степени λ полинома $F_0(\lambda,\mu)$.

Если среди столбцов $D_s(\mu)$ нет нулевых, то $M_1(\mu)=D_s(\mu)$. В противном случае следует переставить столбцы в коэффициентах[1] $D_q(\mu)$ так, чтобы

$$D_s(\mu) = [\bar{D}_{s1}(\mu),\ 0],$$

(через $\bar{D}_{s1}(\mu)$ обозначены ненулевые столбцы $D_s(\mu)$, их число t_1); $D_q(\mu)=[D_{q1}(\mu), D_{q2}(\mu)]$, $q=s-1,\dots,0$. Здесь $D_{q1}(\mu)$ и $D_{q2}(\mu)$ блоки $D_q(\mu)$ соответственно размеров $m\times t_1$ и $m\times(n-t_1)$. Если $D_{s-1,2}(\mu)$ не имеет нулевых столбцов, то

$$M_1(\mu) = [\bar{D}_{s1}(\mu),\ D_{s-1,2}(\mu)].$$

В противном случае следует переставить столбцы в коэффициентах $D_q(q=s-1,\dots,0)$ так, чтобы $D_{s-1,2}(\mu)=[\bar{D}_{s-1,2}(\mu),0]$. (Через $\bar{D}_{s-1,2}(\mu)$ обозначены ненулевые столбцы $D_{s-1,2}(\mu)$, их число t_2); $D_{q2}(\mu)=[D_{q2}(\mu);D_{q3}(\mu)]$, $q=s-2,\dots,0$. Блоки $D_{q2}(\mu)$ и $D_{q3}(\mu)$ имеют соответственно размеры $m\times t_2$ и $m\times(n-\sigma_2)$, где $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} t_i$. Если $D_{s-2,3}(\mu)$ не имеет нулевых столбцов, то

$$M_1(\mu) = [\bar{D}_{s1}(\mu)\bar{D}_{s-1,2}(\mu)D_{s-2,3}(\mu)].$$

В противном случае процесс образования матрицы $M_1(\mu)$ может быть аналогично продолжен и заканчиваться на шаге $p\le s+1$, когда будет построена $m\times n$ матрица

$$M_1(\mu) = [\bar{D}_{s1}(\mu)\bar{D}_{s-1,2}(\mu),\dots,D_{s+1-p,p}(\mu)],$$

состоящая из блоков размеров $m\times t_1$, $m\times t_2,\dots,m\times t_{s+2-p}$ и $m\times(n-\sigma_{p-1})$. При $p<s+1$ матрица $M_1(\mu)$ имеет все n столбцов ненулевыми; при $p=s+1$ среди последних столбцов $M_1(\mu)$ могут быть нулевые. В этом случае все коэффициенты $D_k(\mu), k=s,\dots,0$, преобразуемого матричного полинома $F(\lambda,\mu)$ имеют последними нулевые столбцы, и размеры $F(\lambda,\mu)$ должны быть уменьшены вычеркиванием нулевых столбцов. Матрица $M_1(\mu)$ размеров $m\times n_1(n_1\le n)$ будет иметь вид

$$M_1(\mu) = [\bar{D}_{s1}(\mu)\bar{D}_{s-1,2}(\mu),\dots,\bar{D}_{s+1-p,p}(\mu)].$$

2. Находится минимальный базис нуль-пространства $M_1(\mu)$ из правых полиномиальных решений. Матрица $T_1(\mu)$, составленная из столбцов этого базиса, преобразуется к левой трапецевидной матрице $L_1(\mu)$ размеров $m\times h_1(h_1\ge n_1-r_1$, $r_1=\mathrm{rank}M_1(\mu))$ с ненулевой, не зависящей от μ главной диагональю. Вычисление минимального базиса правого нуль-пространства $M_1(\mu)$ может быть осуществлено, например, с помощью ΔW-алгоритма, реализующего ΔW-разложение полинома $M_1(\mu)$ от одной переменной. Покажем, как $T_1(\mu)$ преобразовать к левой трапецевидной матрице $L\ (\mu)$ вида

$$L_1(\mu) = \begin{bmatrix} * & 0 \\ & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(\mu) \\ L_{21}(\mu) \end{bmatrix}$$

с ненулевыми, не зависящими от μ диагональными элементами. Рассмотрим две

---

[1]Здесь и ниже одной и той же буквой обозначены коэффициенты до и после перестановки столбцов.

ситуации: в первой - главный минор порядка n_1-r_1 матрицы $T_1(\mu)$ есть ненулевая константа; во второй - упомянутый минор или равен нулю, или зависит от μ.

В первой ситуации переход от $T_1(\mu)$ к $L_1(\mu)$ проводится за (n_1-r_1-1) шагов, каждый из которых осуществляет ΔW-факторизацию полиномиальной матрицы - строки. Рассмотрим типичный (первый) шаг. Матрица $T_1(\mu)$ умножается на унимодулярную матрицу $W_1(\mu)$ порядка (n_1-r_1), которая осуществляет ΔW-факторизацию первой (ведущей) строки матрицы $T_1(\mu)$. В результате получим матрицу

$$T_1^{(1)}(\mu) = T_1(\mu)W_1(\mu) = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ t_{21}(\mu) & t_{22}(\mu)\ldots & t_{2,n_1-r_1}(\mu) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ t_{n_1-r_1,1}(\mu) & \ldots\ldots & t_{n_1-r_1,n_1-r_1}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Далее в качестве ведущей строки берется строка $[t_{22}(\mu),\ldots,t_{2,n_1-r_1}(\mu)]$, составленная из (n_1-r_1-1) последних элементов второй строки $T_1^{(1)}(\mu)$, и находится ее ΔW-разложение. Пусть $W_2(\mu)$ - унимодулярная матрица порядка (n_1-r_1-1), осуществляющая это разложение так, что имеем

$$T_1^{(2)}(\mu) = T_1^{(1)}(\mu) \begin{bmatrix} 1 & \\ & W_2(\mu) \end{bmatrix}.$$

Процесс аналогично повторяется, пока на шаге n_1-r_1-1 придем к левой трапецевидной матрице $L_1(\mu)$ с ненулевыми, не зависящими от μ диагональными элементами.

Перейдем к рассмотрению второй ситуации, когда главный минор порядка n_1-r_1 матрицы $T_1(\mu)$ зависит от μ или равен нулю. Построение матрицы $L_1(\mu)$, столбцы которой содержат базис нуль-пространства $M_1(\mu)$ (но не исчерпываются ими), будем осуществлять по следующему предписанию.

Как и выше, матрица $T_1(\mu)$ умножением справа на унимодулярные матрицы приводится к матрице $L_1(\mu)$ без перестановок строк. Если при этом в преобразуемой матрице строка с номером i является нулевой или ее элементы (скалярные полиномы) имеют нетривиальный общий наибольший делитель,[2] то эта строка вычеркивается. Соответствующий столбец в $L_1(\mu)$ заменяется столбцом $e_i=(0,\ldots,1,\ldots,0)^T$ так, чтобы диагональный элемент (i,i) был равен единице. Приведение к левой трапецевидной матрице продолжается с преобразуемой матрицей меньших размеров (с вычеркнутой строкой). В результате будет построена левая трапецевидная матрица (обозначим ее по-прежнему $L_1(\mu)$), элементы которой, отличные от нуля, не зависят от μ, причем

$$\mathrm{span}[\ell_1(\mu),\ldots,\ell_{h_1}(\mu)] \supseteq \mathrm{span}[\tau_1(\mu),\ldots,\tau_{n_1-r_1}(\mu)],$$

$h_1 \geq n_1-r_1$. Здесь $\ell_1(\mu),\ldots,\ell_{h_1}(\mu)$ - столбцы матрицы $L_1(\mu)$; $\tau_1(\mu),\ldots,\tau_{n_1-r_1}(\mu)$ - столбцы $T_1(\mu)$.

---

[2] Наличие нетривиального общего делителя у элементов преобразуемой i-й строки равносильно (в результате ΔW-разложения ее) появлению в позиции (i,i) элемента, зависящего от μ.

Описанный выше процесс построения $L_1(\mu)$ с указанными свойствами всегда реализуем - матрица $T_1(\mu)$ не имеет конечного спектра, так как построена из столбцов унимодулярной матрицы так, что существует ненулевой порядка n_1-r_1 минор матрицы $T_1(\mu)$, который не зависит от μ. В дальнейшем для определенности считаем $h_1=n_1-r_1$. В противном случае ниже число (n_1-r_1) надо заменить на h_1. Представим $L_1(\mu)$ в блочном виде. Если $k\le p-1$ и $\sigma_{k-1}\le n_1-r_1$, $\sigma_k\ge n_1-r_1$, то $L_1(\mu)$ имеет вид

$$L_1(\mu) = \begin{array}{c} t_1\{ \\ t_2\{ \\ \\ t_p\{ \end{array}\left[\begin{array}{cccc} L_{11}(\mu) & & & \\ L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & \mathbb{O} & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ L_{p1}(\mu) & L_{p2}(\mu) & \cdots & L_{pk}(\mu) \end{array}\right].$$
$$\qquad\qquad t_1 \qquad t_2 \qquad\qquad t_k$$

Здесь $L_{ii}(\mu)(i=1,\dots,k-1)$ неособенные левые треугольные полиномиальные матрицы порядка t_1, $L_{pk}(\mu)$ - левая трапецевидная матрица полного столбцового ранга размеров $t_p\times(n_1-r_1-\sigma_{k-1})$, k - число блочных столбцов в $L_1(\mu)$. Если $k=p$, $\sigma_{k-1}\le n_1-r_1, \sigma_k\ge n_1-r_1$, то

$$L_1(\mu) = \left[\begin{array}{ccccc} L_{11}(\mu) & & & & \\ L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & & \mathbb{O} & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & \\ L_{p-1,1}(\mu) & L_{p-1,2}(\mu) & \cdots & L_{p-,-1}(\mu) & \\ L_{p1}(\mu) & L_{p2}(\mu) & \cdots & L_{p,-}(\mu) & L_{pp}(\mu) \end{array}\right].$$
$$t_1 \qquad\qquad t_2 \qquad\qquad t_{p1} \qquad t_p$$

3. Формируется левая треугольная унимодулярная матрица $W_1(\lambda,\mu)$ порядка n_1, которая в зависимости от соотношения чисел n_1-r_1 и σ_{k-1} будет иметь следующий вид

1. Если $k\le p-1$, $\sigma_{k-1}\le n_1-r_1$, $\sigma_k\ge n_1-r_1$, то

$$W_1(\lambda,\mu) = \left[\begin{array}{ccccc} L_{11}(\mu) & & & & \\ \lambda\, L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & & \\ \lambda^{p-1}L_{p1}(\mu) & \lambda^{p-2}L_{p2}(\mu) & \cdots & \lambda^{p-k}L_{pk}(\mu) & I_{r_1} \end{array}\right].$$

2) Если $k=p$, $\sigma_{p-1}\le n-r_1$, $\sigma_p\ge n-r_1$, то

$$W_1(\lambda,\mu) = \left[\begin{array}{cccccc} L_{11}(\mu) & & & & & \\ \lambda\, L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ & & & L_{p-1,p-1}(\mu) & & \\ \lambda^{p-1}L_{p1}(\mu) & \lambda^{p-2}L_{p2}(\mu) & \cdots & \lambda L_{p,p-1}(\mu) & L_{pp}(\mu) & I_{r_1} \end{array}\right].$$

Здесь $L_{ii}(\mu)$, $i=1,\dots,p-1$ - левые треугольные полиномиальные $t_i\times t_i$ матрицы с постоянными, от μ не зависящими, ненулевыми диагональными элементами; $L_{pp}(\mu)$ - полиномиальная матрица размеров $t_p\times[(n_1-r_1)-\sigma_{p-1}]$, полного столбцового ранга, с постоянными, от μ не зависящими, ненулевыми диагональными элементами; I_{r_1} - единичная матрица порядка r_1.

4. Осуществляется переход к пучку

$$F_1(\lambda,\mu) = F_0(\lambda,\mu)\theta_1\bar{W}_1(\lambda,\mu) \equiv D_s^1(\mu)\lambda^s + \ldots + D_0^1(\mu),$$

$$\bar{W}_1(\lambda,\mu) = \begin{cases} W_1(\lambda,\mu), & \text{если } n=n_1, \\ \text{block diag}\{W_1(\lambda), I_{n-r_1}\}, & \text{если } n_1<n; \end{cases}$$

θ_1 - результирующая матрица перестановок первого шага.

По построению каждый шаг с номером $k(k\geq1)$ понижает степень у $n-r_k$ векторных полиномов-столбцов преобразуемого полинома $F(\lambda,\mu)$. Выбор унимодулярной матрицы в форме $W_1(\lambda,\mu)$ не увеличивает степень λ преобразуемого матричного полинома.

II. Операции 1-4 алгоритма надо выполнять до тех пор, пока на некотором шаге $\ell+1$ получим матрицу $M_{\ell+1}(\mu)$ полного столбцового ранга. В этом случае

$$F_\ell(\lambda,\mu) = [H(\lambda,\mu),0] = F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu). \tag{2.3}$$

Здесь 0 - нулевая $m\times(n-\rho)$ матрица; $H(\lambda,\mu)$ - $m\times\rho$ матрица полного столбцового ранга; $W(\lambda,\mu) = \prod_{k=1}^{\ell} \theta_k\bar{W}_k(\lambda,\mu)$ - результирующая унимодулярная матрица. Обозначим через $V(\lambda,\mu)$ матрицу $\rho\times n$, составленную из первых ρ строк унимодулярной матрицы[3] $W^{-1}(\lambda,\mu)$. Тогда из (2.3) находим

$$F(\lambda,\mu) = H(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu). \tag{2.4}$$

Построением (2.3) и (2.4) завершается алгоритм ΔW-факторизации $F(\lambda,\mu)$.

§ 3. Алгоритм вычисления общего наибольшего делителя

Ниже рассматривается алгоритм вычисления ОНД для полиномов от одной переменной и для полиномов от двух переменных, неприводимых над кольцом полиномов от одной переменной. Алгоритм вычисления ОНД для полиномов от двух переменных общего вида (не требующий их неприводимости) будет рассмотрен в § 5.

3.1. Пусть $D_1(\lambda),\ldots,D_r(\lambda)$ - заданные размеров $m\times n$ полиномы, левый[4] ОНД которых следует найти. Задача состоит в построении разложений вида

$$D_k(\lambda) = \Delta(\lambda)W_{1k}(\lambda),\ k = 1,\ldots,r, \tag{3.1}$$

где $W_{11}(\lambda),\ldots,W_{1r}(\lambda)$ - взаимно простые $\rho\times n$ ранга ρ полиномы; $\Delta(\lambda)$ - искомый ОНД, полином $m\times\rho$ полного столбцового ранга.

Для вычисления разложений (3.1) надо выполнить следующие шаги.

1. Сформировать матрицу $\mathfrak{A}(\lambda)\equiv[D_1(\lambda),\ldots,D_r(\lambda)]$ и найти ее ΔW-разложение вида (2.1)

$$\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda),0],$$

[3]Алгоритм обращения унимодулярной матрицы будет рассмотрен в § 3.

[4]В дальнейшем слово „левый" будем опускать.

где $\Delta(\lambda)$ - $m\times\rho$-полиномиальная матрица полного столбцового ранга $\rho(\rho=\mathrm{rank}\mathfrak{A}(\lambda))$, спектр которой совпадает с конечным спектром $\mathfrak{A}(\lambda)$; 0 - нулевая $m\times(n-1)\rho$-матрица; $W(\lambda)$ - унимодулярная $n\times n$-матрица.

2. Найти

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda) \\ * \quad \ldots \quad * \end{bmatrix},$$

где $W_{11}(\lambda)$ - $\rho\times n$-матрицы, составленные из первых ρ строк унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$. Тогда из равенства

$$[D_1(\lambda), \ldots, D_r(\lambda)] = \Delta(\lambda)[W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda)]$$

и свойств ΔW-факторизации следует справедливость (3.1); полиномы $W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda)$ как блоки унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$ суть взаимно простые слева матричные полиномы, имеющие ранг ρ.

3.2. Пусть $F_1(\lambda,\mu), \ldots, F_r(\lambda,\mu)$ - заданный набор $m\times n$-полиномов (не приводимых над кольцом полиномов от одной переменной), ОНД которых следует вычислить. Задача состоит в построении полиномов $H(\lambda,\mu)$ и $W_{11}(\lambda,\mu), \ldots, W_{1r}(\lambda,\mu)$, удовлетворяющих равенствам

$$F_k(\lambda,\mu) = H(\lambda,\mu)W_{1k}(\lambda,\mu) \qquad k=1,\ldots,r, \tag{3.2}$$

причем $W_{11}(\lambda,\mu), \ldots, W_{1r}(\lambda,\mu)$ - взаимно простые слева матричные полиномы полного строчного ранга ρ полиномы, $H(\lambda,\mu)$ имеет полный столбцовый ранг, является ОНД для заданных полиномов.

Для построения разложений (3.2) следует, как и в случае (3.1), выполнить шаги.

1. Сформировать матрицу $\mathfrak{A}(\lambda,\mu)=[F_1(\lambda,\mu), \ldots, F_r(\lambda,\mu)]$ и найти ее ΔW-разложение вида (2.2)

$$\mathfrak{A}(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [H(\lambda,\mu), 0].$$

2. Найти

$$W^{-1}(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} W_{11}(\lambda,\mu), \ldots, W_{1r}(\lambda,\mu) \\ * \quad \ldots \quad * \end{bmatrix}.$$

Тогда из равенства

$$\mathfrak{A}(\lambda,\mu) = H(\lambda,\mu)[W_{11}(\lambda,\mu), \ldots, W_{1r}(\lambda,\mu)]$$

следует справедливость равенств (3.2), причем, как и выше, из свойств ΔW-разложения следует, что $H(\lambda,\mu)$ - матричный полином полного столбцового ранга; $W_{11}(\lambda,\mu), \ldots, W_{1r}(\lambda,\mu)$ - взаимно простые полиномы как блоки унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda,\mu)$.

Замечание. Обращение унимодулярных матриц $W(\lambda)$ и $W(\lambda,\mu)$ может быть осуществлено с помощью алгоритма ΔW-факторизации и проводится по одной схеме как для $W(\lambda)$, так и для $W(\lambda,\mu)$.

Для вычисления W^{-1} следует:

а) применить ΔW-алгоритм к матрице W

$$W\hat{W} = \Delta.$$

(Здесь в силу унимодулярности W матрица Δ есть неособенная постоянная матрица);

б) обратить матрицу Δ. Тогда искомая обратная матрица будет $W^{-1}=\tilde{W}\Delta^{-1}$.

§ 4. Алгоритм разложения полиномов на неприводимые множители

Пусть

$$F(\lambda,\mu) = D_s(\mu)\lambda^s + \ldots + D_0(\mu)$$

– $m\times n$-полином от двух переменных. Задача состоит в разложении $F(\lambda,\mu)$ на неприводимые над кольцом полиномов от одной переменной множители, т.е. в разложении $F(\lambda,\mu)$ вида

$$F(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\tilde{\Delta}(\lambda)\hat{F}(\lambda,\mu), \tag{4.1}$$

где $\Delta(\mu)$, $\tilde{\Delta}(\lambda)$ – полиномы от одной переменной; $\hat{F}(\lambda,\mu)$ – полином от двух переменных, не имеющий своими левыми делителями матричных полиномов от одной переменной, так что полиномы $\Delta(\mu)$ и $\hat{F}(\lambda,\mu)$, $\tilde{\Delta}(\lambda)$ и $\hat{F}(\lambda,\mu)$ попарно взаимно простые (слева) как полиномы по μ и по λ соответственно.

Для вычисления разложения (4.1) надо выполнить следующие шаги.

1. Вычислить ОНД полиномов $D_s(\mu),\ldots,D_0(\mu)$, т.е. получить для них равенства вида (3.1)

$$D_k(\mu) = \Delta(\mu)W_{1k}(\mu),\ k=s,s-1,\ldots,0. \tag{4.2}$$

2. Поставить (4.2) в $F(\lambda,\mu)$

$$F(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)[W_{1s}(\mu)\lambda^s + W_{1,s-1}(\mu)\lambda^{s-1} + \ldots + W_{10}(\mu)] = \Delta(\mu)\tilde{F}(\lambda,\mu), \tag{4.3}$$

где $\tilde{F}(\lambda,\mu)=W_{1s}(\mu)\lambda^s+\ldots+W_{10}(\mu)$, причем коэффициенты $W_{1s}(\mu),\ldots,W_{10}(\mu)$ не имеют общих левых нетривиальных делителей.

3. Записать полином $\tilde{F}(\lambda,\mu)$ по степеням μ

$$\tilde{F}(\lambda,\mu) = \tilde{D}_t(\lambda)\mu^t + \ldots + \tilde{D}_0(\lambda) \tag{4.4}$$

и найти ОНД полиномов $\tilde{D}_t(\lambda),\ldots,D_0(\lambda)$, т.е. найти для них равенства вида (3.1):

$$\tilde{D}_k(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)\tilde{W}_{1k}(\lambda),\ k=t,\ t-1,\ldots,0. \tag{4.5}$$

Учитывая (4.4), (4.5), из (4.3) получим равенство (4.1)

$$F(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\tilde{\Delta}(\lambda)\hat{F}(\lambda,\mu),$$

где $\hat{F}(\lambda,\mu)\equiv\tilde{W}_{1t}(\lambda)\mu^t+\ldots+\tilde{W}_{10}(\lambda)$. По построению $\tilde{W}_{1t}(\lambda),\ldots,\tilde{W}_{10}(\lambda)$ суть полиномы полного строчного ранга, так что полином $\hat{F}(\lambda,\mu)$ не имеет своими левыми делителями матричных полиномов от одной переменной.

§ 5. Алгоритм вычисления ОНД для полиномов от двух переменных

Пусть $F_1(\lambda,\mu),\ldots,F_r(\lambda,\mu)$ – заданный набор полиномов от двух переменных. Задача состоит в вычислении ОНД для них, т.е. в представлении каждого полинома в виде

$$F_k(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\tilde{\Delta}(\lambda)H(\lambda,\mu)\hat{F}_k(\lambda,\mu),\qquad k = 1,\ldots,r, \tag{5.1}$$

где $\hat{F}_1(\lambda,\mu),\ldots,\hat{F}_r(\lambda,\mu)$-слева взаимно простые полиномы от двух переменных –

полином $[\Delta(\mu)\tilde{\Delta}(\lambda)H(\lambda,\mu)]$ искомый ОНД для заданных полиномов, имеет полный столбцовый ранг.

Для вычисления разложений (5.1) надо выполнить следующие шаги.

1. Для каждого полинома

$$F_k(\lambda,\mu) = D_s^{(k)}(\mu)\lambda^s + \ldots + D_0^{(k)}(\mu)\lambda^0, \qquad k = 1,\ldots,r,$$

получить равенства вида (4.3)

$$F_k(\lambda,\mu) = \Delta^{(k)}(\mu)\hat{F}^{(k)}(\lambda,\mu), \qquad k = 1,\ldots,r. \tag{5.2}$$

2. Найти ОНД полиномов $\Delta^{(1)}(\mu),\ldots,\Delta^{(r)}(\mu)$, т.е. получить для них равенства вида (3.1)

$$\Delta^{(k)}(\mu) = \Delta(\mu)W_k(\mu), \qquad k = 1,\ldots,r. \tag{5.3}$$

С учетом (5.2) и (5.3) записать $F_k(\lambda,\mu)$ в виде

$$F_k(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)[W_k(\mu)\hat{F}^{(k)}(\lambda,\mu)] \equiv \Delta(\mu)F_{1k}(\lambda,\mu), \tag{5.4}$$

где $F_{1k}(\lambda,\mu)=W_k(\mu)\hat{F}^{(k)}(\lambda,\mu)$ $(k=1,\ldots,r)$ суть слева взаимно простые полиномы как полиномы по μ.

3. Каждый из полиномов $F_{1k}(\lambda,\mu)$ записать по степеням μ

$$F_{1k}(\lambda,\mu) = \tilde{D}_t^{(k)}(\lambda)\mu^t+\ldots+\tilde{D}_0^{(k)}(\lambda), \qquad k = 1,\ldots,r,$$

и найти ОНД полиномов $\tilde{D}_t^{(k)}(\lambda),\ldots,\tilde{D}_0^{(k)}(\lambda)$, т.е. получить равенства вида (3.1)

$$\tilde{D}_i^{(k)}(\lambda) = \tilde{\Delta}^{(k)}(\lambda)\tilde{W}_{1i}^{(k)}(\lambda), \qquad i = t,t-1,\ldots,0.$$

Имеем

$$F_{1k}(\lambda,\mu) = \tilde{\Delta}^{(k)}(\lambda)[\tilde{W}_{1t}^{(k)}(\lambda)\mu^t + \ldots + \tilde{W}_{10}^{(k)}(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}^{(k)}(\lambda)\tilde{F}_{1k}(\lambda,\mu). \tag{5.5}$$

Полиномы $\tilde{F}_{1k}(\lambda,\mu) = \tilde{W}_{1t}^{(k)}(\lambda)\mu^t + \ldots + \tilde{W}_0^{(k)}(\lambda)$ $(k=1,\ldots,r)$ суть взаимно простые как полиномы по λ.

4. Найти ОНД полиномов

$$\tilde{\Delta}^{(1)}(\lambda),\ldots,\tilde{\Delta}^{(r)}(\lambda),$$

т.е. получить для них равенства вида (3.1)

$$\tilde{\Delta}^{(k)}(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)\tilde{W}_k(\lambda), \qquad k = 1,\ldots,r. \tag{5.6}$$

С учетом (5.6), (5.5) равенства (5.4) запишутся

$$F_k(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\tilde{\Delta}(\lambda)F_{2k}(\lambda,\mu), \qquad k = 1,\ldots,r, \tag{5.7}$$

где по построению $F_{2k}(\lambda,\mu)\equiv\tilde{W}_k(\lambda)\tilde{F}_{1k}(\lambda,\mu)$ суть взаимно простые полиномы, рассматриваемые как полиномы от одной переменной по μ и по λ.

5. Найти ОНД полиномов $F_{2k}(\lambda,\mu)$ $(k=1,\ldots,r)$, т.е. равенства вида (3.2)

$$F_{2k}(\lambda,\mu) = H(\lambda,\mu)\hat{F}_k(\lambda,\mu), \tag{5.8}$$

где $H(\lambda,\mu)$ - ОНД полиномов $F_{21}(\lambda,\mu),\ldots,F_{2r}(\lambda,\mu)$; $\hat{F}_1(\lambda,\mu),\ldots,\hat{F}_r(\lambda,\mu)$ - взаимно простые матричные полиномы от двух переменных λ и μ. С учетом (5.7), (5.8) полином (5.4) запишется

$$F_k(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\tilde{\Delta}(\lambda)H(\lambda,\mu)\hat{F}_k(\lambda,\mu).$$

Разложение (5.1) получено.

Список литературы

[1] Кублановская В.Н., Хазанов В.Б., Белый В.А. Спектральные задачи для пучков матриц. Методы и алгоритмы. III. Препринт ЛОМИ. Р-4-88, 1988. 54 с.

[2] Belyi V.A., Khazanov V.B., Kublanovskaya V.N. Spectral problems for matrix pencils. Methods and Algorithms. III // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1989. Vol.4, N 1. P.19-51.

[3] Кублановская В.Н., Белый В.А. Решение спектральных задач для полиномиальных пучков матриц // Прикладная математика и вычислительные системы в судостроении: Тр. ЛКИ. Л., 1989. С.4-17.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 10 мая 1989 г.