КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

ГАНЕЕВ Р. М.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

§ 1. Постановка задачи T и сведение ее к интегральному уравнению

Будем рассматривать систему следующего типа

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sgn} y\,|y|^{\varkappa} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{aligned}\right\},\quad \varkappa > 0. \tag{1.1}$$

Эта система является эллиптической при $y > 0$, гиперболической при $y < 0$. Систему (1.1) будем рассматривать в области $\Omega = \Omega_1 \bigcup AB \bigcup \Omega_2$, где Ω_1 — верхняя полуплоскость $(y > 0)$, Ω_2 — область, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, где $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, и характеристиками системы

$$AC: x = (1 - 2\nu)\,(-y)^{\frac{1}{1-2\nu}}, \tag{1.2}$$

$$BC: x = 1 - (1 - 2\nu)\,(-y)^{\frac{1}{1-2\nu}}, \tag{1.3}$$

где

$$\nu = \frac{\varkappa}{2(\varkappa + 2)};\ \text{очевидно}\ 0 < \nu < \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Задача T. В области Ω найти систему функций $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$, удовлетворяющих условиям:

1. $u(x,\ y),\ v(x,\ y) \in C(\overline{\Omega})$.
2. $[u,\ v]$ — непрерывно дифференцируемое решение системы в Ω_1 и классическое (непрерывно дифференцируемое) или обобщенное решение в Ω_2.
3. Функции $u(x,\ 0),\ v(x,\ 0) \in C^1(0,\ 1)$.
4. $u(x,\ y)$ — удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u(x,\ 0)=0 \text{ при } \left|x-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}, \tag{1.5}$$

$$u/AC=g(x) \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \tag{1.6}$$

где

$$g(x)=x^a\tilde{g}(x),\quad \tilde{g}(x)\in C^n\left[0,\ \frac{1}{2}\right], \tilde{g}^{(n)}(x)\in H\left[0,\ \frac{1}{2}\right], \tag{1.7}$$

$a=1+\varepsilon$, $n=2$, $\varepsilon>0$, если в Ω_2 ищется классическое решение, и $a=\varepsilon$, $n=1$, если в Ω_2 ищется обобщенное решение.

5. $v(A)=0$. (1.8)

6. $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$ исчезают на бесконечности.

Определение 1. *Будем называть решение задачи T классическим, если u,* $v\in C^1(\Omega_1\cup\Omega_2)$.

Определение 2. *Будем называть решение задачи T обобщенным, если u,* $v\in C^1(\Omega_1)$ *и являются обобщенными решениями в* Ω_2 *в смысле Т. В. Чекмарева* [14].

При решении задачи будем применять метод интегральных уравнений.

Для вывода соотношения из гиперболической области приведем решение задачи Коши для системы (1.1) в области Ω_2; в случае $\varphi\in C[0,\ 1]$, $\psi\in H^{2\nu}[0,\ 1]$ оно дается формулами (см. [14], формулы (119), (120), с. 103)

$$u(\xi,\ \eta)=p_1(\xi-\eta)^{1-2\nu}\int_\eta^\xi\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-\eta)^{1-\nu}(\xi-t)^{1-\nu}}+$$
$$+\frac{q(2-4\nu)^{2\nu}}{2\nu}\int_\eta^\xi\frac{\chi(t)\,dt}{(t-\eta)^\nu(\xi-t)^\nu}, \tag{1.9}$$

$$v(\xi,\ \eta)=\frac{\psi(\xi)+\psi(\eta)}{2}+\frac{p_1}{(2-4\nu)^{2\nu}}\int_\eta^\xi\frac{(2t-\xi-\eta)\varphi(t)\,dt}{(\xi-t)^{1-\nu}(t-\eta)^{1-\nu}}-$$
$$-\frac{q}{2}(\xi-\eta)^{2\nu}\int_\eta^\xi\left[\frac{\psi(t)-\psi(\xi)}{(t-\eta)^\nu(\xi-t)^{1+\nu}}+\frac{\psi(t)-\psi(\eta)}{(t-\eta)^{1+\nu}(\xi-t)^\nu}\right]dt, \tag{1.10}$$

где

$$\xi=x+(1-2\nu)(-y)^{\frac{1}{1-2\nu}},\quad \eta=x-(1-2\nu)(-y)^{\frac{1}{1-2\nu}}, \tag{1.11}$$

$$p_1=\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)},\quad q=\frac{\nu\Gamma(1-2\nu)}{\Gamma^2(1-\nu)}, \tag{1.12}$$

$$\varphi(x)=u(x,\ 0),\ \psi(x)=v(x,\ 0),\ \chi(x)=\psi'(x). \tag{1.13}$$

В характеристических координатах (1.11) граничное условие (1.6) имеет вид

$$u(\xi, 0) = g\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad 0 < \xi < 1. \tag{1.14}$$

Тогда, положив в (1.9) $\eta = 0$ и учитывая (1.14), получим

$$g\left(\frac{\xi}{2}\right) = p_1 \xi^{1-2\nu} \int_0^\xi \frac{\varphi(t)\,dt}{t^{1-\nu}(\xi - t)^{1-\nu}} + \frac{q(2-4\nu)^{2\nu}}{2\nu} \int_0^\xi \frac{\chi(t)\,dt}{t^\nu(\xi - t)^\nu}. \tag{1.15}$$

Вводя обозначение

$$\chi(t)\,t^{-\nu} = \chi_1(t) \tag{1.16}$$

и решая (1.15) как уравнение Абеля относительно $\chi_1(t)$, получим после перестановки порядка интегрирования

$$\chi_1(\xi) = \frac{2\nu \sin \nu\pi}{q\pi(2-4\nu)^{2\nu}} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{g\left(\frac{t}{2}\right)dt}{(\xi - t)^{1-\nu}} -$$
$$- \frac{2\nu p_1 \sin \nu\pi}{q\pi(2-4\nu)^{2\nu}} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau^{1-\nu}} \int_\tau^\xi \frac{t^{1-2\nu}\,dt}{(\xi - t)^{1-\nu}(t-\tau)^{1-\nu}}. \tag{1.17}$$

Делая во внутреннем интеграле замену $t = \xi - (\xi - \tau)z$ и используя формулы (9.1.4), (9.2.15), (9.8.1) из [2], преобразуем (1.17) к следующему виду

$$\chi_1(\xi) = \frac{2\nu \sin \nu\pi}{q\pi(2-4\nu)^{2\nu}} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{g\left(\frac{t}{2}\right)dt}{(\xi - t)^{1-\nu}} -$$
$$- \frac{2\nu p_1 \sin \nu\pi\Gamma^2(\nu)}{q\pi(2-4\nu)^{2\nu}\Gamma(2\nu)} \left[\frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\xi^\nu(\xi - \tau)^{1-2\nu}} + \right. \tag{1.18}$$
$$\left. + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \left(\frac{\xi - \tau}{\xi}\right)^\nu \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{1-\nu}} F\left(2\nu, \nu, 2\nu + 1, \frac{\xi - \tau}{\xi}\right) d\tau \right].$$

Используя формулы (17) из [15], с. 52, (9.8.1) из [2], (1.16), (1.12) и предполагая $\varphi(0) = 0$, преобразуем (1.18) к виду

$$\chi(x) = \frac{2 \sin \nu\pi\Gamma^2(1-\nu)}{\pi(2-4\nu)^{2\nu}\Gamma(1-2\nu)} x^\nu \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g\left(\frac{t}{2}\right)dt}{(x-t)^{1-\nu}} -$$
$$- \frac{4 \cos \nu\pi\Gamma(2\nu)}{(2-4\nu)^{2\nu}\Gamma^2(\nu)} \int_0^x \frac{\varphi'(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}. \tag{1.19}$$

Чтобы вывести соотношение из эллиптической области, используем представление решения системы (1.1) при $y>0$ через функцию $u(x, 0)=\varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$, (см. [3], с. 107). Полагая в представлении для $v(x_1, y_1)$ $y_1=0$ и учитывая (1.5), получим

$$\psi(x)=A_1\left[\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}-\int_x^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-2\nu}}\right], \tag{1.20}$$

где

$$A_1=\frac{2\nu\cdot 2^{1-2\nu}}{(1-2\nu)^{2\nu}q\pi}. \tag{1.21}$$

Производя в (1.20) интегрирование по частям в предположении, что

$$\varphi(0)=0, \tag{1.22}$$

$$\varphi(1)=0, \tag{1.23}$$

а затем, дифференцируя результат, получим

$$\chi(x)=\psi'(x)=A_1\left[\int_0^x \frac{\varphi'(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}-\int_x^1 \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{1-2\nu}}\right]. \tag{1.24}$$

Из соотношений (1.19), (1.24) получим

$$\left(1+2\cos\frac{p}{2}\pi\right)\int_0^x \frac{\sigma(t)\,dt}{(x-t)^p}-\int_x^1 \frac{\sigma(t)\,dt}{(t-x)^p}=f(x), \tag{1.25}$$

где

$$p=1-2\nu, \quad \sigma(x)=\varphi'(x), \tag{1.26}$$

$$f(x)=A_2x^\nu \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g\left(\frac{t}{2}\right)dt}{(x-t)^{1-\nu}}, \tag{1.27}$$

$$A_2=\frac{2\sin\nu\pi\Gamma^2(1-\nu)}{\pi(2-4\nu)^{2\nu}\Gamma(1-2\nu)}.$$

Лемма 1. *Если функция* $g(x)$ *удовлетворяет условию* (1.7), *где* $a=1+\varepsilon$, $n=2$, *то функция* $f(x)$, *определенная соотношением* (1.27), *имеет вид*

$$f(x)=x^{1-p+\varepsilon}\tilde{f}(x), \tag{1.28}$$

где

$$\tilde{f}(x)\in C^1[0, 1], \ \tilde{f}'(x)\in H[0, 1]. \tag{1.29}$$

Доказательство леммы проводится при помощи замены $t = xz$ с учетом (1.7).

Очевидно, что

$$f(x) \in H^{1-p+\varepsilon}[0, 1]. \tag{1.30}$$

§ 2. Решение интегрального уравнения (1.25)

Уравнение (1.25) представляет собой обобщенное уравнение Абеля. Для решения этого уравнения используем метод К. Д. Сакалюка [4], с. 603. Взяв в качестве канонической функции задачи Римана, соответствующей уравнению (1.25), функцию

$$\chi(z) = z^{\frac{1}{2}(1+p/2)}(1-z)^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{p}{2}\right)}, \tag{2.1}$$

будем иметь

$$\sigma(x) = \frac{\sin p\pi}{4\pi\cos\frac{p\pi}{2}} \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-p}} +$$
$$+ \frac{\sin\frac{p\pi}{4}\sin p\pi}{4\pi^2\cos\frac{p\pi}{2}\cos\frac{p\pi}{4}} \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{1-p/4}(1-t)^{-\frac{3}{4}p}\,dt}{(x-t)^{1-p}}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\frac{3}{4}p} f(\tau)\,d\tau}{\tau^{1-p/4}(\tau-t)}. \tag{2.2}$$

Лемма 2. *Функция $\sigma(x)$, определенная соотношением* (2.2), *имеет нуль порядка ε в точке $x = 0$.*

При доказательстве леммы используется формула (9.11) из [5], известное свойство интеграла типа Коши [6], § 25 и лемма 1. Переставляя порядок интегрирования во втором слагаемом соотношения (2.2), получим

$$\sigma(x) = \frac{\sin p\pi}{4\pi\cos\frac{p\pi}{2}} \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-p}} +$$
$$+ \frac{\sin\frac{p\pi}{4}\sin p\pi}{4\pi^2\cos\frac{p\pi}{2}\cos\frac{p\pi}{4}} \frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{1-p/4}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}p}} \times \tag{2.3}$$
$$\times \int_0^x t^{1-\frac{p}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}p}(x-t)^{p-1}(\tau-t)^{-1}dt.$$

Внутренний интеграл, входящий в (2.3), обозначим через $i(\tau, x)$. При вычислении его приходится различать два случая $x > \tau$, $x < \tau$.

В случае $x > \tau$, применяя известный метод теории функций комплексного переменного (см., например, [7]) и используя при этом формулу (5), из [8], с. 225, получим

$$i(\tau, x) = -\pi \operatorname{ctg} \frac{p\pi}{4} \tau^{1-\frac{p}{4}} (1-\tau)^{-\frac{3}{4}p} (x-\tau)^{p-1} -$$

$$-\frac{\pi}{\sin \frac{p\pi}{4}} + \frac{\sin \frac{3p}{4} \pi \Gamma\left(1-\frac{3}{4}p\right) \Gamma(p) (1-x)^{p/4}}{\sin \frac{p\pi}{4} \Gamma\left(1+\frac{p}{4}\right)(1-\tau)} \times \tag{2.4}$$

$$\times F_1\left(1-\frac{3}{4}p,\ \frac{p}{4}-1,\ 1,\ 1+\frac{p}{4},\ 1-x,\ \frac{1-x}{1-\tau}\right).$$

В случае $x < \tau$, делая замену $t = xz$ и используя формулу (5), из [8], стр. 225, получим

$$i(\tau, x) = \frac{\Gamma\left(2-\frac{p}{4}\right) \Gamma(p)\, x^{1+\frac{3}{4}p}}{\Gamma\left(2+\frac{3}{4}p\right)\tau} \times \tag{2.5}$$

$$\times F_1\left(2-\frac{p}{4},\ \frac{3}{4}p,\ 1,\ 2+\frac{3}{4}p,\ x,\ \frac{x}{\tau}\right).$$

Подставляя теперь найденные значения $i(\tau, x)$ в (2.3), получим

$$\sigma(x) = -\frac{\sin p\pi}{4\pi \cos \frac{p\pi}{2} \cos \frac{p\pi}{4}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(1-\tau)^{\frac{3}{4}p} f(\tau)\, d\tau}{\tau^{1-p/4}} + \tag{2.6}$$

$$+ \frac{\sin p\pi \sin \frac{3}{4} p\pi \Gamma\left(1-\frac{3}{4}p\right) \Gamma(p)}{4\pi^2 \cos \frac{p\pi}{2} \cos \frac{p\pi}{4} \Gamma\left(1+\frac{p}{4}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(1-x)^{\frac{p}{4}} f(\tau)}{(1-\tau)^{1-\frac{3}{4}p} \tau^{1-p/4}} \times$$

$$\times F_1\left(1-\frac{3}{4}p,\ \frac{p}{4}-1,\ 1,\ 1+\frac{p}{4},\ 1-x,\ \frac{1-x}{1-\tau}\right) d\tau +$$

$$
+\frac{\sin\frac{p\pi}{4}\sin p\pi\Gamma\left(2-\frac{p}{4}\right)\Gamma(p)}{4\pi^2\cos\frac{p\pi}{2}\cos\frac{p\pi}{4}\Gamma\left(2+\frac{3}{4}p\right)}\frac{d}{dx}\int_0^1\frac{x^{1+\frac{3}{4}p}f(\tau)}{\tau^{2-p/4}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}p}}\times
$$

$$
\times F_1\left(2-\frac{p}{4},\ \frac{3}{4}p,\ 1,\ 2+\frac{3}{4}p,\ x,\ \frac{x}{\tau}\right)d\tau.
$$

Найдем теперь решение уравнения (1.25) другим методом. Для этого к обеим частям этого уравнения применим оператор

$$
\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{p-1}\,dt.
$$

Так как указанный оператор не имеет собственных функций [9], с. 47, то в результате мы придем к эквивалентному уравнению. Это уравнение после обычных преобразований [10] принимает вид

$$
\sigma(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^1\left(\frac{\tau}{x}\right)^{1-p}\frac{\sigma(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=\frac{\lambda}{\pi}F(x), \tag{2.7}
$$

где

$$
\lambda=\operatorname{tg}\frac{p\pi}{4},\quad F(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-p}}. \tag{2.8}
$$

Лемма 3. *Функция* $F(x)$, *определенная соотношением* (2.8), *имеет вид*

$$
F(x)=x^{\varepsilon}\widetilde{F}(x), \tag{2.9}
$$

где

$$
\widetilde{F}(x)\in H[0,\ 1]. \tag{2.10}
$$

Доказательство леммы проводится при помощи замены $t=xz$ с использованием леммы 1.

Решение уравнения (2.7) сводится к задаче Римана [4]. Будем искать решение этой задачи, взяв в качестве ее канонической функции $X(z)=z^{1-p/4}(1-z)^{p/4-1}$; в этом случае индекс задачи равен нулю. Решение уравнения (2.7) имеет вид

$$
\sigma(x)=\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{4}}{\pi}F(x)+\frac{\sin^2\frac{p\pi}{4}}{\pi^2}\int_0^1\left(\frac{1-\tau}{1-x}\right)^{1-p/4}\left(\frac{x}{\tau}\right)^{\frac{3}{4}p}\frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau-x}. \tag{2.11}
$$

Лемма 4. *Функция* $\sigma(x)$, *определенная соотношением* (2.11), *имеет вид*

$$\sigma(x) = x^{\varepsilon}(1-x)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\nu}\tilde{\sigma}(x), \tag{2.12}$$

где

$$\tilde{\sigma}(x) \in H[0,\ 1]. \tag{2.13}$$

Утверждение леммы следует из формулы (22.8) из [6], с учетом леммы 3 и соотношения $p = 1 - 2\nu$.

Перебирая все возможные классы решений эквивалентных уравнений (1.25) и (2.7), можно убедиться, что решения (2.6) и (2.11) совпадают.

Отсюда следует, что функция (2.6) имеет вид (2.12), (2.13).

§ 3. Решение задачи T

Для решения задачи мы должны найти функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi'(x) = \sigma(x), \tag{3.1}$$

$$\varphi(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$\varphi(1) = 0, \tag{3.3}$$

(см. (1.26), (1.22), (1.23)).

Из (3.1) и (3.2) найдем $\varphi(x)$ в следующем виде

$$\varphi(x) = \int_0^x \sigma(t)\,dt, \tag{3.4}$$

где $\sigma(x)$ определена соотношением (2.6).

Итак, $\varphi(x)$ — первообразная функции $\sigma(x)$, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$. Нетрудно видеть, что выражение для $\varphi(x)$ получается из (2.6) или (2.2) вычеркиванием символа $\frac{d}{dx}$. Нетрудно убедиться, что определенная так функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять условию (3.3), если

$$\int_0^1 \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{1-p/4}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}p}} = 0. \tag{3.5}$$

Следовательно, условие (3.5) является необходимым условием разрешимости задачи T. Зная функцию $\varphi(x)$, можно определить функцию $\psi(x)$ по формуле

$$\psi(x) = A_2\int_0^x f(t)\,dt - \frac{4\Gamma(2\nu)\cos\nu\pi}{(2-4\nu)^{2\nu}\Gamma^2(\nu)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}, \tag{3.6}$$

которая получается из (1.19) путем интегрирования; при этом учитывается условие (1.8) и соотношение (1.27).

Займемся теперь исследованием свойств функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Из (2.2), с учетом, что $p=1-2\nu$, следует представление

$$\varphi(x)=B_1\int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{2\nu}}+B_2\int\limits_0^x \frac{M(t)\,dt}{(x-t)^{2\nu}}, \tag{3.7}$$

где

$$M(t)=\frac{t^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu}}{(1-t)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}}\int\limits_0^1 \frac{(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}f(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu}(\tau-t)}, \tag{3.8}$$

B_1, B_2 — постоянные.

Лемма 5. *Функция* $M(t)$, *определенная соотношением* (3.8), *где* $f(t)$ *удовлетворяет условию* (1.28), *имеет вид*

$$M(x)=x^{2\nu+\varepsilon}\widetilde{M}(x), \tag{3.9}$$

где

$$\widetilde{M}(x)\in H^{2\nu+\varepsilon}[0,\ 1).$$

Утверждение следует из свойств интеграла типа Коши [6], § 25, 1° с учетом леммы 1.

Лемма 6. *Функция* $\varphi(x)\in H^{1-\varepsilon}[0,\ 1)\cap C[0,\ 1]$.

Доказательство. Из (3.7) с помощью теоремы Харди — Литтлвуда [11], с. 109 и лемм 1, 5 получаем, что $\varphi(x)\in H^{1-\varepsilon}[0,\ 1)$. Из (3.4) следует, что $\varphi(x)\in C[0,1)$.

Лемма 7. *Функция* $\psi(x)$, *определенная соотношением* (3.6), *принадлежит классу* $H^{2\nu}[0,\ 1]$.

Доказательство. Утверждение леммы для первого слагаемого следует из леммы 1, а для второго — из теоремы Харди — Литтлвуда с учетом, что $\varphi(x)\in C[0,\ 1]$.

Лемма 8. *Функция* $\chi(x)=\psi'(x)$, *определенная соотношением* (1.19), *принадлежит классу* $H^{2\nu+\varepsilon}[0,\ 1)$.

Доказательство. Утверждение для первого слагаемого следует из леммы 1, а для второго — из теоремы Харди — Литтлвуда с учетом леммы 4.

Решение задачи Коши для системы (1.1) в области Ω_2 в случае $\varphi\in C[0,\ 1]$, $\psi\in H^{2\nu}[0,\ 1]$ дается формулами (1.9), (1.10). Очевидно, что в нашем случае указанные выше условия на φ и ψ выполняются.

В характеристических координатах $(\xi,\ \eta)$ область Ω_2 совпадает с треугольником, ограниченным прямыми $\eta=0$, $\xi=1$, $\xi=\eta$; обозначим его через Δ.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $\varphi \in H^{1-\nu+\varepsilon}[0,\ 1)$, $\psi' \in H^{\nu+\varepsilon}[0,\ 1)$, *то функции* $u(\xi,\ \eta)$, $v(\xi,\ \eta)$, *определенные формулами* (1.9), (1.10), *имеют производные* u_ξ, u_η, v_ξ, v_η, *непрерывные в* Δ, *причем*

$$\lim_{y\to 0} u_y(x,\ y) = \lim_{\xi-\eta\to 0} (u_\xi - u_\eta)(\xi-\eta)^{2\nu} = -\psi'(x).$$

Доказательство. Предложение относительно $u(\xi,\ \eta)$ доказывается так же, как лемма 3 из [12], с. 190. При исследовании же функции $v(\xi,\ \eta)$ применим тот же метод, преобразовав предварительно (1.10) с помощью формулы Лагранжа.

Из теоремы 1 и лемм 6, 5 следует, что формулы (1.9), (1.10) дают классическое решение задачи T в Ω_2. Классическое решение задачи T в Ω_1 получим по формулам, приведенным в [3], с. 107. Это решение исчезает на бесконечности.

Теорема 2. *Задача* T *в классе непрерывно дифференцируемых функций не может иметь более одного решения.*

Это предложение доказывается с помощью принципа экстремума А. В. Бицадзе [1] с учетом того, что решение задачи T исчезает на бесконечности.

Результаты предыдущих исследований можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 3. *Классическое решение задачи* T *существует и единственно, если выполнено условие разрешимости* (3.5)

$$\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\frac{3}{4}p} f(\tau)\, d\tau}{\tau^{1-p/4}} = 0.$$

Аналогичным способом можно получить и другое решение задачи T, если воспользоваться некоторым решением уравнения (1.25), отличным от рассмотренного в § 2. Это решение уравнения (1.25) имеется в [13]; оно обращается в бесконечность интегрируемого порядка на обоих концах. В этом случае мы получим обобщенное решение задачи T. Это решение существует без условий разрешимости.

В заключение приношу искреннюю благодарность моему руководителю Ю. М. Крикунову за постоянную помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.

2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963.

3. Чекмарев Т. В. О свойствах решений вырождающейся эллиптической системы уравнений типа уравнения Трикоми, II. — „Изв. вузов, Математика“, 1969, № 11.

4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

5. Чекмарев Т. В. Задачи с граничными условиями для некоторых систем уравнений различных типов. Докт. дис. Казань, 1971.

6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.

7. Крикунов Ю. М. Задача Трикоми для одного частного случая уравнения $K(y)u_{xx}+u_{yy}=0$ II — Труды семинара по краевым задачам, вып. 5. Изд-во Казан. ун-та, 1968.

8. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., „Наука“, 1965.

9. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1962.

10. Крикунов Ю. М. Задача Трикоми для одного частного случая уравнения $K(y)u_{xx}+u_{yy}=0$ I. — Труды. семинара по краевым задачам, вып. 4. Изд-во Казан. ун-та, 1967.

11. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., „Наука“, 1970.

12. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., „Наука“, 1966.

13. Wolfersdorf L. Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die Verallgemeinerte Tricomi-Gleichung. — Mathem. Nachrichten, 29, *H* 3/4, 1965.

14. Чекмарев Т. В. Задачи Коши, Гурса и Коши-Гурса для вырождающихся систем уравнений, II. — „Изв. вузов, Математика“, № 1, 1970.

15. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, 1957.

Доложено на семинаре 3 февраля 1976 г.